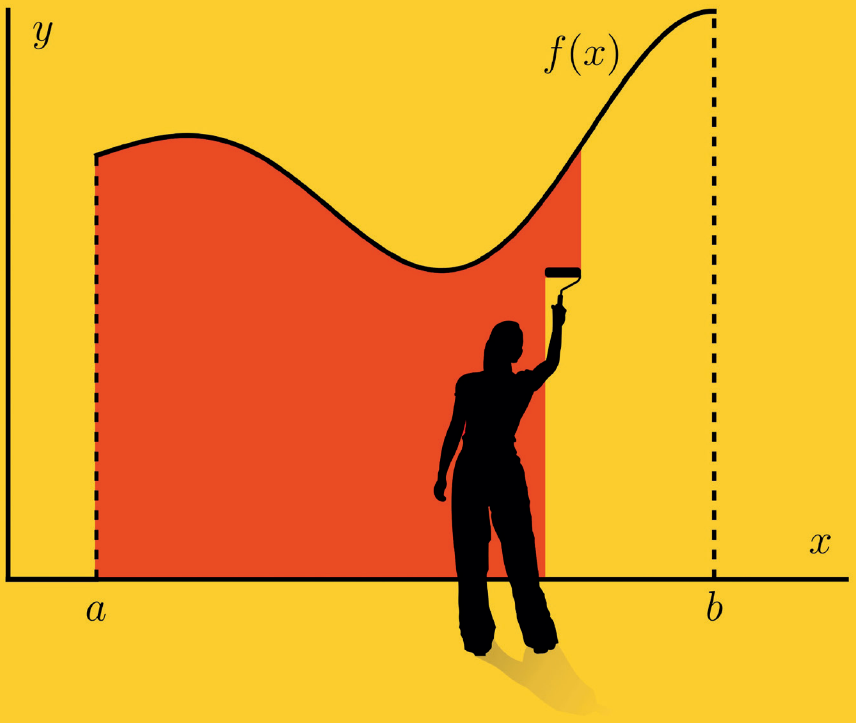
Materials

246

Antoni Méndez

Càlcul en una variable real



UAB Universitat Autònoma de Barcelona

Servei de Publicacions

Antoni Méndez

Càlcul en una variable real

Universitat Autònoma de Barcelona
Servei de Publicacions
Bellaterra, 2024

Primera edició: octubre de 2024

Edició i impressió:
Servei de Publicacions
Universitat Autònoma de Barcelona
Edifici A. 08193 Bellaterra (Cerdanyola del Vallès). Spain
Tel. 93 581 10 22
sp@uab.cat
https://publicacions.uab.cat

Imprès a Espanya. Printed in Spain

ISBN (físic) 978-84-10202-25-2
ISBN (digital) 978-84-10202-26-9
Dipòsit legal: B 17700-2024

Índex

Pròleg

Aquest llibre tracta de càlcul en una variable real. Es basa en notes, inicialment manuscrites i posteriorment impreses, que he anat modificant i ampliant al llarg de diversos anys d'impartició d'aquesta matèria als alumnes del primer curs de física de la UAB.

No he seguit la redacció habitual d'un llibre de matemàtiques amb definicions, teoremes, corol·laris, equacions, etc. numerats. He intentat una redacció més lleugera, adreçada als alumnes que inicien l'etapa universitària de la seva formació. Tanmateix, els teoremes estan clarament assenyalats i quasi tots demostrats (faig servir el símbol $\diamondsuit$ per indicar el final de les demostracions).

A part de petites aportacions de "collita pròpia", com a text de referència vaig basar-me fonamentalment en el llibre de J. M. Ortega *Introducció a l'anàlisi matemàtica* (Manuals de la UAB) i, en menor mesura, en el de W. Rudin *Principios de análisis matemático* (McGraw-Hill) i el de R. G. Bartle i D. R. Sherbert *Introducción al análisis matemático de una variable* (Limusa), tots ells magnífics textos de referència per ampliar, completar o aprofundir en els diferents temes de l'anàlisi matemàtica. N'hi ha molts d'altres amb aparença més o menys atractiva, però els continguts són bàsicament els mateixos. Al final del llibre s'inclou una bibliografia no exhaustiva.

El llibre conté material per a un curs d'un any acadèmic sencer, tot i que, opcionalment, alguns temes es poden ometre. Està organitzat en vuit capítols, amb títols autoexplicatius, i dos apèndixs. Al final de cada capítol hi ha una llista breu de problemes amb les seves solucions. Al llarg del text també hi ha exemples (destacats sobre fons gris) que són aclariments o aplicacions directes de les definicions i teoremes que els precedeixen.

El primer capítol es dedica als preliminars amb l'exposició dels conceptes més bàsics: conjunt, correspondència, relació, aplicació i principi d'inducció. La descripció dels diferents conjunts de nombres (naturals, enters i racionals) es pot fer amb més o menys detall, ja que se suposa que el lector ja hi està familiaritzat. Això no obstant, es presenta esquemàticament la construcció dels racionals a partir dels enters, que és bastant intuïtiva (la construcció dels enters a partir dels naturals s'inclou en un exercici).

En el segon capítol es parteix de les limitacions dels nombres racionals per construir els reals. Aquesta part es pot ometre i es pot començar amb una definició axiomàtica dels nombres reals com la del resum de la pàgina 36. Si es fa així, cal veure abans els conceptes de fita, conjunt fitat i extrem (superior i inferior) i, també, el de successió de nombres reals i el de límit.

Els capítols tercer, quart i cinquè es dediquen, respectivament, a les funcions d'una variable, a la derivada (i la fórmula de Taylor) i a la integral, de les quals se'n pressuposa un coneixement elemental, i formen el nucli central del curs. En el sisè es tracten les integrals impròpies i s'apliquen a l'estudi de la funció Γ d'Euler i a la transformada de Laplace.

El capítol setè tracta de les sèries numèriques ("sumes infinites") i el vuitè de les sèries de funcions, amb èmfasi especial en les sèries de potències i les de Fourier. Al final hi ha una presentació breu de la transformada de Fourier.

El llibre té dos apèndixs. El primer (apèndix A) es dedica als nombres complexos. Tot i que, estrictament, no corresponen a aquest curs, el seu coneixement és ocasionalment útil en alguns temes del càlcul real, particularment les seccions A.1 i A.2. A l'altre (apèndix B) es presenten, com a curiositat, dues demostracions senzilles de la irracionalitat dels nombres π i e que només fan servir la derivació i la integració.

Al llarg d'aquests anys he rebut comentaris, aportacions i correccions d'errors per part d'alumnes i de col·legues que, d'una manera o altra, han estat involucrats en la docència d'aquesta matèria. A tots ells i elles els estic molt agraït. Particularment, als professors Javier Bafaluy i Eduard Massó que m'han proporcionat algun material que he inclòs en aquest llibre. També vull agrair al professor Emili Bagan i a la Mònica Marcet la seva ajuda en la confecció de la figura de la portada.

Espero que el llibre sigui útil. He passat bones estones treballant-hi.

Antoni Méndez
UAB, juny de 2024

1 PRELIMINARS

1.1 Símbols

$\forall \ldots$: per a *tot* ...; per a *cada* ...

$\exists \ldots$: hi ha *algun* ...; existeix *algun* ...

$\ldots \Rightarrow \ldots$: ... implica ...; si ... aleshores ...

$\ldots \Leftrightarrow \ldots$: ... equival a ...; ... si i només si ...

1.2 Conjunts

$a \in A$: l'*element* a pertany al *conjunt* A. Un conjunt es pot definir donant la llista dels seus elements (quan això sigui possible) o donant propietats que els identifiquin, i s'expressa

$$A = \{\text{llista d'elements}\} = \{x \,|\, \text{propietats que ha de complir } x\}.$$

EXEMPLE: $A = \{1, 2, 3\} = \{x \,|\, x \text{ és un nombre natural} < 4\}$.
L'ordre dels elements és irrellevant, és a dir, $\{1, 2, 3\} = \{2, 1, 3\}$.

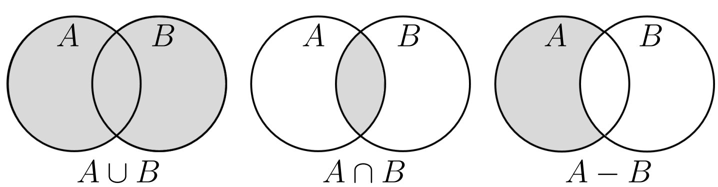
$\emptyset$: *conjunt buit* (sense elements).

$A \cup B$: *unió* de A i B (conjunt dels elements que són de A o de B).

$A \cap B$: *intersecció* de A i B (conjunt dels elements que són de A i de B).

$A - B$ o $A \backslash B$: conjunt dels elements de A que no són de B.

EXEMPLE: $\{1, 2, 3\} \cup \{1, 3, 5, 7\} = \{1, 2, 3, 5, 7\}$.
$\{1, 2, 3\} \cap \{1, 3, 5, 7\} = \{1, 3\}$.
$\{1, 2, 3\} - \{1, 3, 5, 7\} = \{2\}$.



$B \subset A :$ B és *subconjunt* de A, (tots els elements de B també ho són de A).

EXEMPLE: $\{2, 3\} \subset \{1, 2, 3\}$.

Notem que $A \subset A$ i $\emptyset \subset A$.

$A = B :$ quan $B \subset A$ i $A \subset B$.

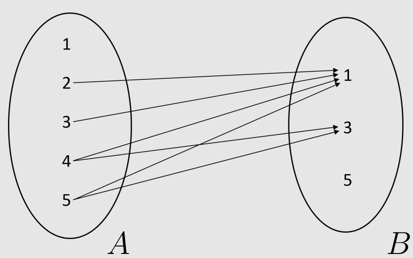
$A \times B :$ *producte cartesià* de A i B (conjunt de parelles (x, y), on $x \in A$ i $y \in B$).

EXEMPLE: $\{1, 2\} \times \{a, b, c\} = \{(1, a), (1, b), (1, c), (2, a), (2, b), (2, c)\}$.

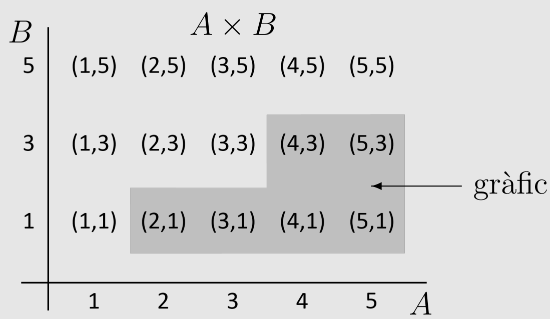
1.3 Correspondències

Donats dos conjunts A i B, si a alguns elements de A els associem elements de B diem que hem establert una *correspondència* de A a B. Alguns elements de A poden no tenir associat cap element de B mentre que altres en poden tenir més d'un.

EXEMPLE 1: $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{1, 3, 5\}$, a cada element de A li associem els de B que siguin més petits:



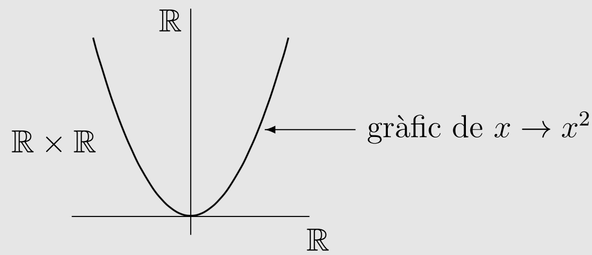
El conjunt de les parelles formades pels elements de A i els seus associats de B és un subconjunt de $A \times B$ que s'anomena *gràfic* de la correspondència:



EXEMPLE 2: Considerem $A = B = \mathbb{N}$, on $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$ és el conjunt dels nombres naturals. Si a cada nombre natural li associem el seu quadrat, el gràfic és

$$\{(1, 1), (2, 4), (3, 9), \ldots\} \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}.$$

EXEMPLE 3: El motiu d'emprar el nom "gràfic" es fa més palès si considerem l'exemple anterior amb $A = B = \mathbb{R}$, on $\mathbb{R}$ és el conjunt dels nombres reals. Si identifiquem els elements de $\mathbb{R}$ amb els punts d'una recta (la "recta real") i representem A i B mitjançant dues rectes perpendiculars, el conjunt $A \times B$ (en aquest cas, $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$) s'identifica amb el conjunt dels punts (x, y) del pla. Llavors, el gràfic de la correspondència que associa cada nombre real amb el seu quadrat és el subconjunt dels punts del pla del tipus (x, x^2):



1.4 Relacions

Quan $A = B$ les correspondències també s'anomenen *relacions*. Així, en l'anterior exemple 2 diem que "a cada nombre natural a li *correspon* el seu quadrat b $(= a^2)$", però també podem dir que "cada nombre natural a està *relacionat* amb el seu quadrat b $(= a^2)$" i expressar-ho així:

$$a\mathcal{R}b \;\text{ si }\; b = a^2.$$

Són de particular interès les relacions d'*ordre* i les d'*equivalència*.

Relacions d'ordre
Una relació $\mathcal{R}$ definida en el conjunt A és una *relació d'ordre* si és

reflexiva: $a\mathcal{R}a$, $\forall a \in A$,

antisimètrica: $a\mathcal{R}b$ i $b\mathcal{R}a \Rightarrow a = b$,

transitiva: $a\mathcal{R}b$ i $b\mathcal{R}c \Rightarrow a\mathcal{R}c$.

Una relació d'ordre $\mathcal{R}$ és *total*, i el conjunt A està *totalment ordenat* per $\mathcal{R}$ si $\forall a, b \in A$ sempre es compleix $a\mathcal{R}b$ o $b\mathcal{R}a$, és a dir, si dos elements de A són sempre relacionables per $\mathcal{R}$. En aquest cas, els elements de A s'ordenen formant una "cadena" única.

Exemple 1: La relació $a\mathcal{R}b$ si $a \leq b$, definida en el conjunt $\mathbb{N}$, és una relació d'ordre *total* que ordena els elements de $\mathbb{N}$ en una única "cadena":

$$1 \leq 2 \leq 3 \leq 4 \leq 5 \leq 6 \leq 7 \leq 8 \leq 9 \leq 10 \leq 11 \leq \cdots$$

Exemple 2: La relació $a\mathcal{R}b$ si $a < b$, definida en el conjunt $\mathbb{N}$, tot i que també ens ordena els elements de $\mathbb{N}$, no és una relació d'ordre perquè no compleix la propietat reflexiva (l'antisimètrica, sí!).

Exemple 3: Si $p(x)$ i $q(x)$ són polinomis, la relació $p(x)\mathcal{R}q(x)$ si el grau de $p(x)$ és menor o igual que el grau de $q(x)$ tampoc és una relació d'ordre (no compleix la propietat antisimètrica).

Exemple 4: Sigui el conjunt $X = \{a, b, c\}$. Considerem el conjunt $\mathcal{C}_X$ de tots els subconjunts de X ("conjunt de les parts de X"):

$$\mathcal{C}_X = \{\, \emptyset\, , \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\} = X \,\} \,.$$

Definim, a $\mathcal{C}_X$, la relació següent: si $A, B \in \mathcal{C}_X$ diem que $A\mathcal{R}B$ si $A \subset B$. Aquesta és també una relació d'ordre però no és total (per exemple, si $A = \{a, b\}$ i $B = \{a, c\}$, no es compleix $A \subset B$ ni $B \subset A$). En aquest cas $\mathcal{C}_X$ s'ordena en múltiples "cadenes":

$$\begin{tikzcd}
 & \{a\} \arrow[r] \arrow[ddr] & \{a,b\} \arrow[dr] & \\
\emptyset \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[dr] & \{b\} \arrow[ur] \arrow[r] & \{b,c\} \arrow[r] & \{a,b,c\}=X \\
 & \{c\} \arrow[r] \arrow[ur] & \{a,c\} \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Per expressar les relacions d'ordre sovint s'utilitzen, en lloc de $\mathcal{R}$, símbols "unidireccionals" com $\prec, \leq, \subset, \mapsto, \vdash, \ldots$

Relacions d'equivalència

Una relació $\mathcal{R}$ definida en un conjunt A és una *relació d'equivalència* si és

reflexiva,

simètrica: $a\mathcal{R}b \Rightarrow b\mathcal{R}a$,

transitiva.

El conjunt dels elements relacionats amb un element concret a s'anomena *classe d'equivalència* de a, i la representem per $[a]$, és a dir,

$$[a] = \{x \mid x\mathcal{R}a\}.$$

Tots els elements de la classe $[a]$ estan relacionats entre ells (propietats simètrica i transitiva). Per tant, $b \in [a] \Rightarrow [b] = [a]$ i, conseqüentment, si dues classes tenen algun element comú, llavors han de coincidir totalment. D'altra banda, les classes no són mai buides: $[a]$ conté almenys l'element a (propietat reflexiva). Ho podem resumir així:

- Les classes són iguals o disjuntes: $[a] = [b]$ o $[a] \cap [b] = \emptyset$.
- La unió de totes les classes és tot el conjunt A.

Així doncs,

Una relació d'equivalència indueix una *partició* del conjunt A en classes d'equivalència.

El conjunt de totes les classes d'equivalència definides per la relació $\mathcal{R}$ s'anomena *conjunt quocient* i es representa per $A/\mathcal{R}$. Notem que

$$a \in [a]\,,\ \ [a] \subset A, \text{ però } \ [a] \in A/\mathcal{R}.$$

Exemple: Considerem el conjunt $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$ dels nombres enters. Definim la relació

$$a\mathcal{R}b \text{ si } b - a = \dot{5} \ (= \text{múltiple de } 5).$$

Aquesta relació és d'equivalència i genera una partició de $\mathbb{Z}$ en les classes següents:

$$\begin{aligned}
[0] &= \{\ldots, -10, -5, 0, 5, 10, 15, \ldots\},\\
[1] &= \{\ldots, -9, -4, 1, 6, 11, 16, \ldots\},\\
[2] &= \{\ldots, -8, -3, 2, 7, 12, 17, \ldots\},\\
[3] &= \{\ldots, -7, -2, 3, 8, 13, 18, \ldots\},\\
[4] &= \{\ldots, -6, -1, 4, 9, 14, 19, \ldots\}.
\end{aligned}$$

Notem, per exemple, que la classe [0] i la classe [15] són la mateixa classe, és a dir, qualsevol element d'una classe es pot utilitzar per "representar-la". Observem, també, que les classes no tenen elements comuns (són disjuntes) i que la unió de totes les classes és el conjunt $\mathbb{Z}$. El conjunt quocient $\mathbb{Z}/\mathcal{R}$ té en aquest cas 5 elements (les 5 classes d'equivalència):

$$\mathbb{Z}/\mathcal{R} = \{\, [0]\,, [1]\,, [2]\,, [3]\,, [4]\,\}.$$

Per expressar les relacions d'equivalència sovint s'utilitzen, en lloc de $\mathcal{R}$, símbols "bidireccionals" com $=, \equiv, \sim, \approx, \doteq, \ldots$

1.5 Aplicacions o funcions

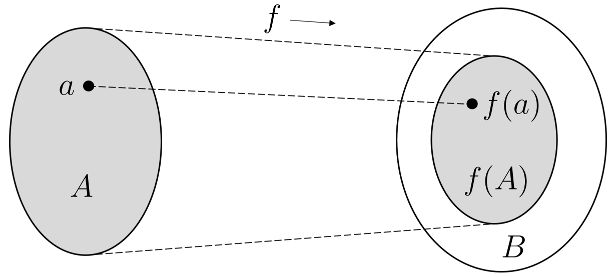
Les aplicacions (o funcions) són un tipus particular de correspondència:

DEFINICIÓ: Una *aplicació* (o *funció*), f, de A a B, és una correspondència de A a B en la qual a cada element de A (sense excepció) li correspon un (i només un) element de B.

Ho expressem

$$\begin{array}{ccll} A & \xrightarrow{f} & B & \\ a & \rightarrow & f(a) & = \text{imatge (o transformat) de } a \text{ per } f. \end{array}$$

Notem que en una aplicació cadascun dels elements de A té imatge (única) a B. No obstant això, un element de B pot ser imatge de diversos elements de A o pot, també, no ser imatge de cap. El conjunt de les imatges de tots els elements de A s'anomena *imatge de* f i es representa per $f(A)$. Evidentment, $f(A) \subset B$.



Hi ha tres tipus particularment interessants d'aplicació:

Injectiva: quan elements diferents de A tenen imatges diferents, és a dir,

$$a \neq b \;\Rightarrow\; f(a) \neq f(b).$$

Exhaustiva: quan tots els elements de B són imatge d'algun element de A, és a dir,

$$f(A) = B.$$

Bijectiva: quan és injectiva i exhaustiva. En aquest cas f estableix una correspondència *biunívoca* (un a un) entre A i B.

En general les aplicacions no són de cap dels tres tipus anteriors però una aplicació sempre es pot descompondre en una d'exhaustiva, una de bijectiva i una d'injectiva (en aquest ordre). Efectivament, donada una aplicació f de A a B, definim la següent relació d'equivalència a A: si $a, b \in A$ diem que

$$a\mathcal{R}b \text{ si } f(a) = f(b).$$

Cada classe d'equivalència es caracteritza, per tant, per la imatge comuna que tenen els seus elements. Llavors, l'aplicació $f\colon A \to B$ equival a les següents aplicacions successives:

$$\begin{array}{ccccccc} A & \stackrel{\alpha}{\to} & A/\mathcal{R} & \stackrel{\beta}{\to} & f(A) & \stackrel{\gamma}{\to} & B \\ a & \to & [a] & \to & f(a) & \to & f(a) \end{array}$$

on, clarament, α és exhaustiva, β és bijectiva i γ és injectiva.

1.6 Sobre els teoremes

Un teorema és una afirmació del tipus "si es compleix P, aleshores es compleix Q" i ho expressem

$$P \Rightarrow Q, \qquad\qquad (*)$$

on P és la *hipòtesi* i Q és la *tesi*. El teorema $(*)$ també es pot enunciar:

"P és condició *suficient* perquè es compleixi Q", o també,
"Q és condició *necessària* perquè es compleixi P", o simplement,
"P implica Q".

Per exemple, podem enunciar el teorema $n \in \mathbb{N} \Rightarrow n^2 \in \mathbb{N}$ així:

"Si $n \in \mathbb{N}$, aleshores $n^2 \in \mathbb{N}$", o
"$n \in \mathbb{N}$ és condició *suficient* perquè $n^2 \in \mathbb{N}$", o
"$n^2 \in \mathbb{N}$ és condició *necessària* perquè $n \in \mathbb{N}$", o
"$n \in \mathbb{N}$ implica $n^2 \in \mathbb{N}$".

Per demostrar que un teorema és cert cal seguir un raonament lògic. Tanmateix, per demostrar que no és cert només cal trobar un cas en el qual no es compleixi (un *contraexemple*).

El teorema

$$\text{no } Q \Rightarrow \text{no } P \qquad (**)$$

(és a dir, "si no es compleix Q, aleshores no es compleix P") s'anomena teorema *contrarecíproc* del teorema $P \Rightarrow Q$. Tots dos teoremes són *equivalents*, és a dir, es compleixen tots dos o cap d'ells (si un es complís i l'altre no, tindríem una contradicció). Per això, per demostrar el teorema $(*)$ sovint el que es fa és demostrar el teorema $(**)$ (demostració "per reducció a l'absurd"). El teorema de l'exemple anterior és, per tant, equivalent a $n^2 \notin \mathbb{N} \Rightarrow n \notin \mathbb{N}$).

D'altra banda, el teorema $Q \Rightarrow P$ s'anomena teorema *recíproc* del teorema $(*)$ i és, òbviament, equivalent a no $P \Rightarrow$ no Q. En general, encara que un teorema sigui cert el seu recíproc no ho és (per exemple, $n^2 \in \mathbb{N} \not\Rightarrow n \in \mathbb{N}$). Quan un teorema i el seu recíproc són tots dos certs ho expressem

$$P \Leftrightarrow Q,$$

i l'enunciem:

"P és condició *necessària i suficient* perquè es compleixi Q",
"P es compleix *si i només si* es compleix Q".

Evidentment, per demostrar-lo cal demostrar que $P \Rightarrow Q$ i que $Q \Rightarrow P$. Per exemple, dins del conjunt $\mathbb{N}$ tenim $n = \dot{2} \Leftrightarrow n^2 = \dot{2}$ i ho enunciem:

"Si $n \in \mathbb{N}$: $n = \dot{2}$ és condició necessària i suficient perquè $n^2 = \dot{2}$"
"Si $n \in \mathbb{N}$: $n = \dot{2}$ si i només si $n^2 = \dot{2}$".

1.7 Conjunt $\mathbb{N}$ dels nombres naturals

És el conjunt $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$ en el qual hi ha definides:

- Dues operacions, suma $(+)$ i producte $(\cdot)$, amb les propietats següents:
  - *Suma* $(+)$:
    - *associativa*: $(a + b) + c = a + (b + c)$, $\forall a, b, c \in \mathbb{N}$,
    - *commutativa*: $a + b = b + a$, $\forall a, b \in \mathbb{N}$,
    - no hi ha element *neutre*, però es pot afegir:[1] 0

$$0 + a = a + 0 = a, \ \forall a \in \mathbb{N},$$

[1] De vegades ens convindrà que $\mathbb{N}$ contingui el 0 i de vegades no, però normalment això no genera cap confusió.

- els elements de $\mathbb{N}$ no tenen *simètric*: si $a \in \mathbb{N}$ no hi ha cap $a' \in \mathbb{N}$ tal que $a + a' = 0$.

- *Producte* $(\cdot)$:
  - *associativa*: $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$, $\forall a, b, c \in \mathbb{N}$,
  - *commutativa*: $a \cdot b = b \cdot a$, $\forall a, b \in \mathbb{N}$,
  - hi ha element *neutre*: 1

$$1 \cdot a = a \cdot 1 = a, \ \forall a \in \mathbb{N},$$

  - els elements de $\mathbb{N}$ no tenen *simètric*: en general, si $a \in \mathbb{N}$ no hi ha cap $\bar{a} \in \mathbb{N}$ tal que $a \cdot \bar{a} = 1$.

- El producte $(\cdot)$ és *distributiu* respecte de la suma $(+)$:

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c, \quad \forall a, b, c \in \mathbb{N}.$$

- Una relació d'ordre *total* $\leq$

$$(0 \leq) 1 \leq 2 \leq 3 \leq 4 \leq 5 \leq \ldots$$

amb les propietats:

1) $a \leq b \Rightarrow a + c \leq b + c$, $\forall c \in \mathbb{N}$,
2) $a \leq b \Rightarrow a \cdot c \leq b \cdot c$, $\forall c \in \mathbb{N}$.

1.8 Principi d'inducció

PRINCIPI D'INDUCCIÓ: Si $P(n)$ és una propietat o afirmació que fa referència al nombre natural n i es compleix que:

1) $P(1)$ és certa,
2) $P(n) \Rightarrow P(n+1)$,

aleshores $P(n)$ és certa $\forall n \in \mathbb{N}$.

DEMOSTRACIÓ: si utilitzem 1) i 2) tenim que $P(1) \Rightarrow P(2)$ i, per tant, $P(2)$ és certa; si fem servir novament 2) tenim que $P(2) \Rightarrow P(3)$ i, per tant, $P(3)$ és també certa. Amb n iteracions haurem demostrat que $P(n)$ és certa. $\diamondsuit$

Aquest principi es fa servir habitualment per demostrar propietats que fan referència als nombres naturals (demostracions "per inducció").

EXEMPLE: Demostrem la igualtat $\sum_{k=1}^{n} k = n(n+1)/2$, $\forall n \in \mathbb{N}$:

- El cas $n = 1$ es compleix: $1 = 1 \cdot 2/2$.
- Suposem que es compleix el cas n, $\sum_{k=1}^{n} k = n(n+1)/2$, ("hipòtesi d'inducció") i amb aquest supòsit demostrem el cas $n+1$:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} k &= \sum_{k=1}^{n} k + (n+1) \overset{\text{h.i.}}{=} \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \\ &= \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}. \end{aligned}$$

Notem que no n'hi ha prou que es compleixi 2), cal també comprovar 1). Per exemple, l'afirmació (òbviament falsa) "$\forall n \in \mathbb{N} : n = n + 5$" compleix 2), ja que si suposem cert $P(n)$ (és a dir, $n = n + 5$) podem demostrar $P(n+1)$: $n + 1 \overset{\text{h.i.}}{=} (n+5) + 1 = (n+1) + 5$. En aquest cas no es compleix $P(1)$, ja que $1 \neq 1 + 5$.

Evidentment, per demostrar una afirmació $P(n)$ no n'hi ha prou amb "comprovar molts casos". Per exemple, l'afirmació "$n^2 - n + 41$ és un nombre *primer*" es compleix per als 40 primers nombres naturals però no per $n = 41$, ja que $41^2 - 41 + 41$ és divisible per 41.

El binomi de Newton

FÓRMULA DEL BINOMI DE NEWTON:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Aquesta igualtat també es demostra "per inducció". Recordem, abans, la definició dels *nombres combinatoris*. Si $k, n \in \mathbb{N}$, amb $k \leq n$, definim

$$\binom{n}{k} \overset{\text{def}}{=} \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

El seu valor és el nombre de subconjunts de k elements que hi ha en un conjunt de n elements (o nombre de *combinacions* de n objectes diferents "agafats de k en k"). Notem que aquesta definició també és vàlida quan $k = 0$ o $k = n$

si definim $0! \stackrel{\text{def}}{=} 1$ (aquest és precisament el motiu per definir-ho així). Algunes propietats dels nombres combinatoris són

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}, \qquad \binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1, \qquad \binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n,$$

i també,

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}.$$

Aquesta darrera propietat és la base del *triangle de Pascal* on cada nombre combinatori és la suma dels dos immediatament superiors.

$$\begin{array}{c} \binom{0}{0} \\ \binom{1}{0}\ \binom{1}{1} \\ \binom{2}{0}\ \binom{2}{1}\ \binom{2}{2} \\ \binom{3}{0}\ \binom{3}{1}\ \binom{3}{2}\ \binom{3}{3} \\ \binom{4}{0}\ \binom{4}{1}\ \binom{4}{2}\ \binom{4}{3}\ \binom{4}{4} \\ \binom{5}{0}\ \binom{5}{1}\ \binom{5}{2}\ \binom{5}{3}\ \binom{5}{4}\ \binom{5}{5} \\ \vdots \end{array} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{array}{c} 1 \\ 1\ \ 1 \\ 1\ \ 2\ \ 1 \\ 1\ \ 3\ \ 3\ \ 1 \\ 1\ \ 4\ \ 6\ \ 4\ \ 1 \\ 1\ \ 5\ \ 10\ \ 10\ \ 5\ \ 1 \\ \vdots \end{array}$$

Amb les propietats anteriors podem demostrar "per inducció" la fórmula del binomi de Newton.

DEMOSTRACIÓ: el cas $n = 1$ es compleix

$$(a+b)^1 = a + b = \tbinom{1}{0} a^{1-0} b^0 + \tbinom{1}{1} a^{1-1} b^1.$$

Suposem que es compleix el cas n, $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$, i amb aquest supòsit demostrem el cas $n+1$, $(a+b)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k$:

$$\begin{aligned} (a+b)^{n+1} &= (a+b)(a+b)^n \\ &\stackrel{\text{h.i.}}{=} (a+b)\left[\tbinom{n}{0}a^n + \tbinom{n}{1}a^{n-1}b + \tbinom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \cdots + \tbinom{n}{n}b^n\right] \\ &= \tbinom{n}{0}a^{n+1} + \tbinom{n}{1}a^n b + \tbinom{n}{2}a^{n-1}b^2 + \cdots + \tbinom{n}{n}ab^n \\ &\qquad + \tbinom{n}{0}a^n b + \tbinom{n}{1}a^{n-1}b^2 + \cdots + \tbinom{n}{n-1}ab^n + \tbinom{n}{n}b^{n+1} \\ &= \tbinom{n+1}{0}a^{n+1} + \tbinom{n+1}{1}a^n b + \tbinom{n+1}{2}a^{n-1}b^2 + \cdots \\ &\qquad + \tbinom{n+1}{n}ab^n + \tbinom{n+1}{n+1}b^{n+1}. \quad \diamondsuit \end{aligned}$$

1.9 Conjunt $\mathbb{Z}$ dels nombres enters

El conjunt dels nombres naturals és insuficient. Per exemple, l'equació $a+x=b$ (amb $a, b \in \mathbb{N}$) no té, en general, solució dins $\mathbb{N}$. La raó és la inexistència d'element simètric respecte de la suma (si existís a' tal que $a+a'=0$, només caldria sumar a' als dos membres de l'equació per obtenir la solució $x=b+a'$).

La solució del problema passa per una ampliació del conjunt $\mathbb{N}$ al conjunt $\mathbb{Z}$ dels nombres *enters*. No detallarem aquí la construcció de $\mathbb{Z}$ a partir de $\mathbb{N}$ i només enunciarem les seves propietats.

El conjunt dels nombres enters és:

$$\mathbb{Z}=\{\ \ldots,-4,-3,-2,-1,0,\underbrace{1,2,3,4,5,\ldots}_{\mathbb{N}}\ \}$$

en el qual hi ha definides:

- Dues operacions, suma $(+)$ i producte $(\cdot)$, *compatibles amb les de* $\mathbb{N}$, amb les propietats:
  - Suma $(+)$:
    - · *associativa*: $(a+b)+c=a+(b+c)$, $\forall a, b, c \in \mathbb{Z}$,
    - · *commutativa*: $a+b=b+a$, $\forall a, b \in \mathbb{Z}$,
    - · hi ha element *neutre*, 0, tal que $0+a=a+0=a$, $\forall a \in \mathbb{Z}$,
    - · $\boxed{\forall a \in \mathbb{Z} \text{ hi ha un } \textit{simètric}, -a, \text{ tal que } a+(-a)=(-a)+a=0.}$
      (a i $-a$ són mútuament simètrics, és a dir, $-(-a)=a$).
  - Producte $(\cdot)$:
    - · *associativa*: $(a \cdot b) \cdot c=a \cdot(b \cdot c)$, $\forall a, b, c \in \mathbb{Z}$,
    - · *commutativa*: $a \cdot b=b \cdot a$, $\forall a, b \in \mathbb{Z}$,
    - · hi ha element *neutre*, 1, tal que: $1 \cdot a=a \cdot 1=a$, $\forall a \in \mathbb{Z}$,
    - · els elements de $\mathbb{Z}$ *no tenen* simètric: en general, si $a \in \mathbb{Z}$ no hi ha cap $\bar{a} \in \mathbb{Z}$ tal que $a \cdot \bar{a}=1$.
  - El producte $(\cdot)$ és *distributiu* respecte de la suma $(+)$:

    $$a \cdot(b+c)=a \cdot b+a \cdot c, \quad \forall a, b, c \in \mathbb{Z}.$$

- Una relació d'ordre *total*, $\leq$, *compatible amb la de* $\mathbb{N}$:

  $$\underbrace{\ldots-4 \leq-3 \leq-2 \leq-1}_{\text{enters negatius}} \leq 0 \leq \underbrace{1 \leq 2 \leq 3 \leq 4 \leq \ldots}_{\text{enters positius } (\mathbb{N})}$$

  amb les propietats:

  1) $a \leq b \Rightarrow a+c \leq b+c$, $\forall c \in \mathbb{Z}$,
  2) $a, b \geq 0 \Rightarrow a \cdot b \geq 0$.

1.10 Conjunt $\mathbb{Q}$ dels nombres racionals

Novament, el conjunt dels nombres enters és insuficient. La inexistència de simètric respecte del producte $(\cdot)$ fa que, en general, l'equació $a \cdot x = b$ no tingui solució dins $\mathbb{Z}$. Això requereix una nova ampliació: el conjunt $\mathbb{Q}$ dels nombres *racionals*. Donarem una idea sobre la seva construcció sense entrar en detalls.

Els nombres racionals estan formats per parelles de nombres enters $\mathbb{Q} \ni x = p/q$ on $p, q \in \mathbb{Z}$, $(q \neq 0)$ però això s'ha de fer de manera que garanteixi que, per exemple, $2/3$ i $4/6$ siguin el mateix nombre racional. Per aconseguir-ho considerem el conjunt $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} - \{0\})$, els elements del qual (p, q) representarem per p/q. En aquest conjunt hi definim la següent relació d'equivalència

$$\frac{p}{q} \mathcal{R} \frac{p'}{q'} \text{ si } p \cdot q' = q \cdot p',$$

i definim els nombres *racionals* com les classes d'equivalència generades per aquesta relació. En altres paraules, $\mathbb{Q}$ és el conjunt quocient

$$\mathbb{Q} = \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} - \{0\})/\mathcal{R}.$$

Això vol dir que els nombres racionals $2/3$ i $-1/4$ són, de fet, les classes

$$\left[\frac{2}{3}\right] = \left\{\dots, \frac{-4}{-6}, \frac{-2}{-3}, \frac{2}{3}, \frac{4}{6}, \frac{6}{9}, \dots\right\}, \left[\frac{-1}{4}\right] = \left\{\dots, \frac{2}{-8}, \frac{1}{-4}, \frac{-1}{4}, \frac{-2}{8}, \frac{-3}{12}, \dots\right\}.$$

Podem utilitzar qualsevol element de la classe per representar el nombre racional però habitualment usarem el representant *irreductible* (p i q sense divisors comuns i $q > 0$).

El conjunt $\mathbb{Q}$ conté $\mathbb{Z}$, ja que podem identificar l'enter p amb el racional $[p/1]$.

A $\mathbb{Q}$ hi definim una suma $(+)$ i un producte $(\cdot)$:

$$\left[\frac{p}{q}\right] + \left[\frac{p'}{q'}\right] \stackrel{\text{def}}{=} \left[\frac{p \cdot q' + p' \cdot q}{q \cdot q'}\right],$$

$$\left[\frac{p}{q}\right] \cdot \left[\frac{p'}{q'}\right] \stackrel{\text{def}}{=} \left[\frac{p \cdot p'}{q \cdot q'}\right].$$

És fàcil comprovar que:

- les definicions d'aquestes operacions són consistents, és a dir, són independents dels representants escollits de cada classe,
- si les restringim al subconjunt $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$, coincideixen amb les operacions suma i producte existents allà,

- la suma $(+)$ i el producte $(\cdot)$ de $\mathbb{Q}$ tenen les propietats:
  - Suma $(+)$:
    - *associativa*: $(a+b)+c = a+(b+c)$, $\forall a,b,c \in \mathbb{Q}$,
    - *commutativa*: $a+b = b+a$, $\forall a,b \in \mathbb{Q}$,
    - hi ha element *neutre* 0 $(= [0/q])$ tal que $0+a = a+0 = a$, $\forall a \in \mathbb{Q}$,
    - $\forall a \in \mathbb{Q}$ hi ha un simètric a' tal que $a + a' = a' + a = 0$.
      El simètric de $a = [p/q]$ és $a' = [-p/q]$ (i el simètric de a' és a).
  - Producte $(\cdot)$:
    - *associativa*: $(a \cdot b)\cdot c = a\cdot(b\cdot c)$, $\forall a,b,c \in \mathbb{Q}$,
    - *commutativa*: $a\cdot b = b\cdot a$, $\forall a,b \in \mathbb{Q}$,
    - hi ha element *neutre* 1 $(= [q/q])$ tal que $1\cdot a = a\cdot 1 = a$, $\forall a \in \mathbb{Q}$,
    - $\boxed{\forall a \neq 0 \text{ de } \mathbb{Q} \text{ hi ha un simètric } a^{-1} \text{ tal que } a\cdot a^{-1} = a^{-1}\cdot a = 1.}$
      El simètric de $a = [p/q]$ és $a^{-1} = [q/p]$ (i el simètric de a^{-1} és a).
  - El producte $(\cdot)$ és *distributiu* respecte de la suma $(+)$:

$$a\cdot(b+c) = a\cdot b + a\cdot c, \quad \forall a,b,c \in \mathbb{Q}.$$

A $\mathbb{Q}$ hi definim la relació d'ordre *total* següent: si les expressions *irreductibles* de $a, b \in \mathbb{Q}$ són $a = p/q$ i $b = p'/q'$, diem que $a \leq b$ si $p\cdot q' \leq q\cdot p'$. Aquesta ordenació és compatible amb la de $\mathbb{Z}$ i classifica els nombres racionals diferents de 0 en *positius* $(a > 0)$ i *negatius* $(a < 0)$. És fàcil comprovar que es compleixen les propietats:

P1) $a \leq b \Rightarrow a+c \leq b+c$, $\forall c \in \mathbb{Q}$,

P2) $a, b \geq 0 \Rightarrow a\cdot b \geq 0$,

de les quals es *dedueixen* les propietats següents:

1) "0 · racional = 0": $\boxed{\forall a \in \mathbb{Q} : a\cdot 0 = 0}$

   Demostració: $a\cdot 0 = a\cdot(0+0) = a\cdot 0 + a\cdot 0 \overset{(P1)}{\Rightarrow} 0 = a\cdot 0$. ♢

2) Si el producte de dos racionals és 0, un d'ells ha de ser 0: $\boxed{a\cdot b = 0 \Rightarrow a = 0 \text{ o } b = 0}$

   Demostració: si $a\cdot b = 0$ i $a \neq 0$, en multiplicar per a^{-1} tenim $a^{-1}\cdot(a\cdot b) = a^{-1}\cdot 0 = 0$. Però, d'altra banda, $a^{-1}\cdot(a\cdot b) = (a^{-1}\cdot a)\cdot b = 1\cdot b = b$. Per tant, $b = 0$. ♢

3) "més · més = més": $\boxed{a, b > 0 \Rightarrow a\cdot b > 0}$

Demostració: d'acord amb P2) tenim $a \cdot b \geq 0$, però no pot ser $a \cdot b = 0$, ja que a o b hauria de ser 0. $\diamondsuit$

4) La suma de desigualtats manté la desigualtat. Si una és estricta, la desigualtat resultant també ho és:

a) $\boxed{a \leq b \ , \ u \leq v \Rightarrow a + u \leq b + v}$

Demostració: si sumem u a cada costat de $a \leq b$ obtenim $a+u \leq b+u$. D'altra banda, si sumem b a cada costat de $u \leq v$ obtenim $u + b \leq v + b$. Tenim, doncs, $a + u \leq b + v$. $\diamondsuit$

b) $\boxed{a < b \ , \ u \leq v \Rightarrow a + u < b + v}$

Demostració: només cal excloure $a+u = b+v$. Si es complís, en sumar-la a $v \geq u$ tindríem $a + u + v \geq b + v + u$, és a dir, $a \geq b$, que contradiu la hipòtesi. $\diamondsuit$

5) Un racional és positiu si i només si el seu simètric (respecte de la suma) és negatiu: $\boxed{a > 0 \Leftrightarrow (-a) < 0}$

Demostració: si $a > 0$ i fos $(-a) \geq 0$, com que la primera és estricta, en sumar-les tindríem la contradicció $0 > 0$. Recíprocament, si $(-a) < 0$ i fos $a \leq 0$ arribaríem a $0 < 0$. $\diamondsuit$

6) El simètric (respecte de la suma) del producte de dos racionals és el producte d'un d'ells pel simètric de l'altre: $\boxed{-(a \cdot b) = (-a) \cdot b = a \cdot (-b)}$

Demostració: demostrem la primera igualtat: $a \cdot b + (-a) \cdot b = (a - a) \cdot b = 0 \cdot b = 0$, és a dir, $(-a) \cdot b$ és el simètric de $a \cdot b$. $\diamondsuit$

Corol·lari: $\boxed{(-a) \cdot (-b) = a \cdot b}$

7) "menys · menys = més" i "més · menys = menys":

a) $\boxed{a, b < 0 \Rightarrow a \cdot b > 0}$

Demostració: si $a, b < 0 \overset{5)}{\Rightarrow} (-a), (-b) > 0 \overset{6)3)}{\Rightarrow} a \cdot b = (-a) \cdot (-b) > 0$. $\diamondsuit$

b) $\boxed{a > 0, b < 0 \Rightarrow a \cdot b < 0}$

Demostració: si $a > 0, b < 0 \overset{5)}{\Rightarrow} a > 0, (-b) > 0 \overset{6)3)}{\Rightarrow} -(a \cdot b) = a \cdot (-b) > 0 \overset{5)}{\Rightarrow} a \cdot b < 0$. $\diamondsuit$

8) El producte d'una desigualtat per un racional positiu manté la desigualtat. Si el racional és negatiu, la desigualtat s'inverteix:

a) $\boxed{\forall c > 0 : \quad a \leq b \Rightarrow a \cdot c \leq b \cdot c}$

Demostració: $a \leq b \stackrel{P1)}{\Rightarrow} b - a \geq 0 \stackrel{P2)}{\Rightarrow} (b-a) \cdot c = b \cdot c - a \cdot c \geq 0 \stackrel{P1)}{\Rightarrow} b \cdot c \geq a \cdot c$. $\diamondsuit$

b) $\boxed{\forall c < 0 : \quad a \leq b \Rightarrow a \cdot c \geq b \cdot c}$

Demostració: ara tenim $(-c) > 0$ i, per tant, $(b-a) \cdot (-c) = -b \cdot c + a \cdot c \geq 0 \stackrel{(P1)}{\Rightarrow} a \cdot c \geq b \cdot c$. $\diamondsuit$

Notem que aquestes 8 propietats (que ens són ben familiars!) són conseqüència de les propietats P1) i P2), és a dir, es complirien amb qualsevol altra ordenació que respectés aquestes dues propietats.

Valor absolut

Definim *valor absolut* $|x|$ d'un nombre racional x:

$$|x| \stackrel{\text{def}}{=} \max\{-x, x\} = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0, \\ -x & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Sempre es compleix, doncs, que $-|x| \leq x \leq |x|$, i també que $|-x| = |x|$. El valor absolut té les propietats següents:

1) $\forall x \neq 0$: $|x| > 0$,

2) $|0| = 0$,

3) $\forall x, y \in \mathbb{Q} : |x \cdot y| = |x| \cdot |y|$,

4) $\forall x, y \in \mathbb{Q} : |x + y| \leq |x| + |y|$ (desigualtat triangular).

De la desigualtat triangular es dedueix la desigualtat triangular "inversa":

$$|x - y| \geq \Big| |x| - |y| \Big|.$$

Demostració: $|x| = |x - y + y| \leq |x - y| + |y|$ i, per tant, $|x| - |y| \leq |x - y|$. Similarment, $|y| = |y - x + x| \leq |x - y| + |x|$ i, per tant, $|y| - |x| \leq |x - y|$. $\diamondsuit$

Distància
A partir del valor absolut es defineix la *distància* $d(x,y)$ entre dos nombres racionals x i y:

$$d(x,y) \stackrel{\text{def}}{=} |x-y|.$$

La distància té les propietats següents:

1) $d(x,y) > 0$ si $x \neq y$,

2) $\forall x \in \mathbb{Q} : d(x,x) = 0$,

3) $\forall x,y \in \mathbb{Q} : d(x,y) = d(y,x)$,

4) $\forall x,y,z \in \mathbb{Q} : d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$.

1.11 Estructures: grup, anell i cos

- **Grup:** és un conjunt A amb una operació[2] $*$ que té les propietats:

  1) *associativa*: $(a*b)*c = a*(b*c)$, $\forall a,b,c \in A$,
  2) hi ha un element *neutre* e tal que $e*a = a*e = a$, $\forall a \in A$,
  3) $\forall a \in A$ hi ha un *simètric* a' tal que $a*a' = a'*a = e$.

  L'element neutre d'un grup és únic, ja que si n'hi hagués dos, e i e', tindríem $e = e*e' = e'$.

  Similarment, el simètric d'un element a és, també, únic, ja que si en tingués dos, a' i $\hat{a}$, tindríem $a' = a'*e = a'*(a*\hat{a}) = (a'*a)*\hat{a} = e*\hat{a} = \hat{a}$.

  La unicitat del simètric juntament amb la tercera propietat permeten afirmar que a és el simètric de a', és a dir, $(a')' = a$.

  El grup s'anomena *abelià* o *commutatiu* si es compleix també la propietat:

  4) *commutativa*: $a*b = b*a$, $\forall a,b \in A$.

EXEMPLES: $(\mathbb{Z},+)$, $(\mathbb{Q},+)$ i $(\mathbb{Q}-\{0\},\cdot)$ són grups abelians.

- **Anell:** és un conjunt A amb dues operacions $*$ i $\diamond$ que tenen les propietats:

  1) $(A,*)$ és *grup abelià*,
  2) $\diamond$ és *associativa*: $(a \diamond b) \diamond c = a \diamond (b \diamond c)$, $\forall a,b,c \in A$,

[2] Una *operació* és una aplicació $A \times A \to A$ que a cada parella d'elements de A li assigna un "resultat" que també pertany a A.

3) l'operació $\diamond$ és *distributiva* respecte de l'operació $*$:

$$a \diamond (b * c) = (a \diamond b) * (a \diamond c),\ \forall a, b, c \in A.$$

L'anell s'anomena *commutatiu* si $\diamond$ també compleix la propietat:

4) *commutativa*: $a \diamond b = b \diamond a$, $\forall a, b \in A$.

Es diu que l'anell té *unitat* si

5) hi ha element *neutre* e' tal que $e' \diamond a = a \diamond e' = a$, $\forall a \in A$.

EXEMPLES: $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ és un anell commutatiu amb unitat. Si $\mathcal{P}_{\mathbb{Z}}$ és el conjunt dels polinomis amb coeficients enters, $(\mathcal{P}_{\mathbb{Z}}, +, \cdot)$ és, també, un anell commutatiu amb unitat.

- **Cos:** és un conjunt A amb dues operacions, $*$ i $\diamond$ que tenen les propietats:

1) $(A, *)$ és *grup abelià* (neutre: e),
2) $(A - \{e\}, \diamond)$ és *grup abelià*,
3) l'operació $\diamond$ és *distributiva* respecte de l'operació $*$:

$$a \diamond (b * c) = (a \diamond b) * (a \diamond c),\ \forall a, b, c \in A.$$

EXEMPLE: $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ és un cos.

Cos ordenat: Si en un cos $(A, *, \diamond)$ hi ha definida una relació d'ordre total $\prec$, diem que $(A, *, \diamond, \prec)$ és un *cos ordenat* si es compleix:

P1) $a \prec b \Rightarrow a * c \prec b * c, \forall c \in A$,
P2) $a, b \succ e \Rightarrow a \diamond b \succ e$.

EXEMPLE: $(\mathbb{Q}, +, \cdot, \leq)$ és un cos ordenat.

En un cos ordenat sempre podem classificar els elements diferents del neutre e en "positius" ($\succ e$) i "negatius" ($\prec e$) i es compleixen les 8 propietats que hem deduït de P1) i P2) per al cas de $\mathbb{Q}$.

1.12 Problemes

P1.1 Considereu les correspondències següents de $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$. A partir dels seus gràfics indiqueu si són aplicacions (o funcions). En el cas que no ho siguin indiqueu en quin domini $D \subset \mathbb{R}$ s'han de restringir per ser-ho i indiqueu si són injectives, exhaustives o bijectives.

(a) $x \to 1$	(e) $x \to 1/x$	(i) $x \to \sin x$
(b) $x \to x^2 + 1$	(f) $x \to 1/x, 0 \to 0$	(j) $x \to \arccos x$
(c) $x \to x^3 - x$	(g) $x \to 1/x, 0 \to 1$	(k) $x \to e^x$
(d) $x \to x^3$	(h) $x \to \sqrt{x}$	(l) $x \to \ln x$

P1.2 Trobeu el conjunt de nombres reals que satisfan el sistema d'inequacions següent

$$\left\{ \begin{array}{c} \left| \dfrac{1}{2} - x \right| < 3, \\ 1 + \dfrac{x}{x+2} > \dfrac{-1}{x+2}\,. \end{array} \right.$$

P1.3 Demostreu "per inducció":

(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\,,\ \forall n \in \mathbb{N}.$

(b) La desigualtat de Bernouilli:
Si $x \in \mathbb{R}$ i $x \geq -1$, llavors se satisfà $(1+x)^n \geq 1 + nx,\ \forall n \in \mathbb{N}$.

(c) $2^{n+1} < n!$, a partir d'un cert valor de n. Quin?

P1.4 Els nombres enters es poden construir a partir dels naturals de manera semblant a com els racionals es construeixen a partir dels enters. Considerem el conjunt $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, on $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$, i definim en aquest conjunt la relació d'equivalència $(a, b)\mathcal{R}(a', b')$ si $a + b' = b + a'$. Aleshores definim el conjunt dels nombres enters com el conjunt quocient $\mathbb{Z} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{N} \times \mathbb{N}/\mathcal{R}$, és a dir, els nombres enters són classes de parelles de naturals. Expressem amb $[(a, b)]$ la classe que conté la parella (a, b).

(a) Identifiqueu els elements de la classe $[(7, 2)]$ i els de la classe $[(3, 6)]$.

(b) Identifiqueu l'element *irreductible* (amb alguna component nul·la) de cadascuna d'aquestes classes.

Es defineix la suma i el producte de classes:

$$[(a,b)] + [(a',b')] \stackrel{\text{def}}{=} [(a+a', b+b')],$$
$$[(a,b)] \cdot [(a',b')] \stackrel{\text{def}}{=} [(aa'+bb', ab'+ba')].$$

És fàcil (però avorrit) comprovar que aquestes definicions no depenen dels representants de cada classe utilitzats. Amb aquestes operacions, $\mathbb{Z}$ té l'estructura d'anell conmutatiu amb unitat (també és fàcil i avorrit comprovar-ho).

(c) Sumeu i multipliqueu les dues classes esmentades a l'apartat (a) fent servir els representants irreductibles.

(d) Trobeu les classes que fan el paper d'elements neutres de la suma i el producte.

(e) Identifiqueu l'element simètric, respecte de la suma, de la classe $[(a,b)]$.

L'ordenació dels nombres enters es fa així: diem que $[(a,b)] \leq [(a',b')]$ si $a+b' \leq b+a'$.

(f) Quines classes s'identifiquen amb els elements nombres naturals?

(g) Quines classes s'identifiquen amb els nous elements (els "enters negatius")?

Solucions

S1.1 (a) És funció. No és injectiva (repeteix valors en punts diferents) ni exhaustiva, ja que $f(\mathbb{R}) = \{1\} \neq \mathbb{R}$.

(b) És funció. No és injectiva ni exhaustiva.

(c) És funció. No és injectiva, però sí exhaustiva.

(d) És funció. És injectiva i exhaustiva i, per tant, bijectiva.

(e) No és funció. Ho és restringida a $D = \mathbb{R} - \{0\}$ i és injectiva, però no exhaustiva, ja que $f(D) = \mathbb{R} - \{0\}$.

(f) És funció. És injectiva i exhaustiva i, per tant, bijectiva.

(g) És funció. És exhaustiva, però no injectiva, ja que $f(0) = f(1)$.

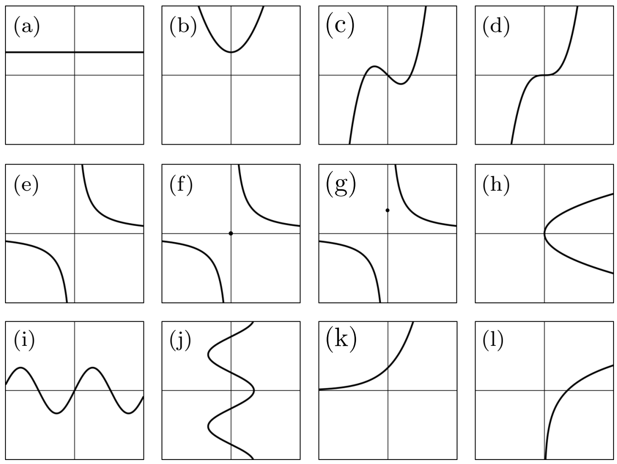
(h) No és funció, ni restringida a $D = \mathbb{R}^+ = \{x | x \geq 0\}$, ja que pren dos valors a cada punt. Es tracta de dues funcions de D a $\mathbb{R}$: $x \to +\sqrt{x}$ i $x \to -\sqrt{x}$, que són injectives però no exhaustives.

(i) És funció. No és injectiva ni exhaustiva ($f(\mathbb{R}) = \{x \mid -1 \leq x \leq 1\}$).

(j) No és funció, ni restringida a $D = \{x \,|\, -1 \le x \le 1\}$, ja que pren una infinitat de valors a cada punt. Es tracta d'una infinitat de funcions de D a $B_k = \{x \,| k\pi \le x \le (k+1)\pi\}$, on $k \in \mathbb{Z}$.

(k) És funció. És injectiva, però no exhaustiva, ja que $f(\mathbb{R}) = \{x \,|\, x > 0\}$.

(l) No és funció. Sí que ho és restringida a $D = \{x \,|\, x > 0\}$ i és injectiva i exhaustiva i, per tant, bijectiva.



S1.2 La primera desigualtat equival a $-3 < \frac{1}{2} - x < 3 \Rightarrow -6 < 1 - 2x < 6 \Rightarrow -7 < -2x < 5 \Rightarrow 7 > 2x > -5$. Per tant, el conjunt de valors que satisfà la primera desigualtat és $A = \{x \,|\, -5/2 < x < 7/2\}$.

A la segona desigualtat s'han de distingir els casos $x > -2$ i $x < -2$. Si $x > -2$ els denominadors són positius i si multipliquem la desigualtat per $x+2$ i arribem a $2x > -3 \Rightarrow x > -3/2$. Si $x < -2$ els denominadors són negatius i si multipliquem la desigualtat per $x + 2$, la desigualtat s'inverteix i arribem a $x < -3/2$, però en aquest cas la condició $x < -2$ és més restrictiva. Per tant, el conjunt de valors que satisfà la segona desigualtat és $B = \{x \,|\, x < -2 \text{ o } x > -3/2\}$. Així doncs, el conjunt de valors que satisfà les dues desigualtats és

$$A \cap B = \{x \,|\, -5/2 < x < -2, \quad \text{o} \quad -3/2 < x < 7/2\}.$$

S1.3 (a) El cas $n = 1$ es compleix, ja que $1^2 = 1 \cdot 2 \cdot 3/6$.

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} k^2 &= \left(\sum_{k=1}^{n} k^2\right) + (n+1)^2 \overset{\text{h.i.}}{=} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \\ &= \frac{(n+1)(2n^2+n+6n+6)}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} \\ &= \frac{(n+1)[(n+1)+1][2(n+1)+1]}{6}.\end{aligned}$$

(b) Per a $n = 1$, tenim que $(1 + x)^1 = 1 + x$, per tant es compleix el cas inicial. Suposem que es compleix el cas n: $(1 + x)^n \geq 1 + nx$, per a $x \geq -1$. Aleshores,

$$\begin{aligned}(1+x)^{n+1} &= (1+x)^n(1+x) \overset{\text{h.i.}}{\geq} (1+nx)(1+x)\\ &= (1+(n+1)x+nx^2) \geq 1+(n+1)x,\end{aligned}$$

ja que $nx^2 \geq 0$.

(c) El cas $n = 5$ és el primer que es compleix. Suposem que es compleix el cas n ($n \geq 5$), aleshores,

$$2^{(n+1)+1} = 2 \cdot 2^{n+1} \overset{\text{h.i.}}{<} 2 \cdot n! < (n+1)n! = (n+1)!.$$

S1.4 (a) $[(7,2)] = \{(5,0),(6,1),(7,2),(8,3),(9,4),\ldots\} = \{(n+5,n) \mid n \in \mathbb{N}\}$,
$[(3,6)] = \{(0,3),(1,4),(2,5),(3,6),(4,7),\ldots\} = \{(n,n+3) \mid n \in \mathbb{N}\}$.

(b) $(5,0) \in [(7,2)]$,
$(0,3) \in [(3,6)]$.

(c) $[(5,0)] + [(0,3)] = [(5,3)] = [(2,0)]$,
$[(5,0)] \cdot [(0,3)] = [(0,15)]$.

(d) $[(a,b)] + [(x,y)] = [(a,b)] \Rightarrow x = y = 0$. L'element neutre respecte de la suma és $[(0,0)] = \{(n,n) \mid n \in \mathbb{N}\} = \{(0,0),(1,1),(2,2),\ldots\}$.
$[(a,b)] \cdot [(x,y)] = [(a,b)] \Rightarrow x = 1,\ y = 0$. L'element neutre respecte del producte és $[(1,0)] = \{(n+1,n) \mid n \in \mathbb{N}\} = \{(1,0),(2,1),(3,2),\ldots\}$.

(e) El simètric de $[(a,b)]$ és $[(b,a)]$, ja que

$$[(a,b)] + [(b,a)] = [(a+b,a+b)] = [(0,0)].$$

(f) Amb l'ordenació tenim

$$\cdots \leq [(0,3)] \leq [(0,2)] \leq [(0,1)] \leq [(0,0)] \leq [(1,0)] \leq [(2,0)] \leq \cdots$$

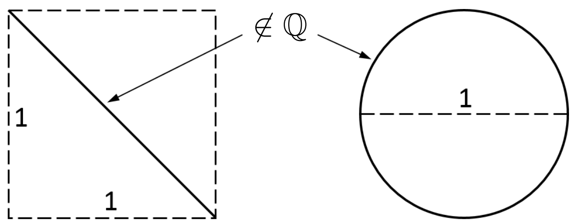
A més, $[(a,0)] + [(b,0)] = [(a+b,0)]$, i $[(a,0)] \cdot [(b,0)] = [(ab,0)]$. Per tant, el nombre natural n s'identifica amb la classe $[(n,0)]$.

(g) Les classes $[(0,n)]$ són els nous elements "negatius" que representem per $-n$. Notem que $[(0,a)]+[(0,b)] = [(0,a+b)]$, però $[(0,a)]\cdot[(0,b)] = [(ab,0)]$, és a dir, el producte de negatius és positiu.

2 NOMBRES REALS

2.1 Insuficiència dels nombres racionals

El conjunt dels nombres racionals és encara insuficient. Per exemple, la diagonal d'un quadrat de costats 1 o el perímetre d'un cercle de diàmetre 1 no són expressables amb nombres racionals.[1]



Hi ha tres problemes amb els nombres racionals:

- el problema de l'arrel
- el problema de l'extrem
- el problema de les successions de Cauchy

Aquests problemes estan, de fet, relacionats i, com veurem, tots tres se solucionen amb una nova ampliació.

2.1.1 Problema de l'arrel

$$\boxed{\text{Si } a \in \mathbb{Q} \text{ i } n \in \mathbb{N}, \text{ no sempre existeix } b \in \mathbb{Q} \text{ tal que } b^n = a.}$$

En altres paraules, l'arrel n-èsima d'un nombre racional no sempre existeix dins del conjunt dels nombres racionals.

Ho podem comprovar en un cas concret: $\sqrt{2}$ no és racional.

Demostració: suposem que $x \in \mathbb{Q}$ i que $x^2 = 2$. Suposem que p/q és l'expressió *irreductible* del racional x, llavors:

$$\frac{p^2}{q^2} = 2 \Rightarrow p^2 = 2q^2 \Rightarrow p^2 = \dot{2} \Rightarrow \boxed{p = \dot{2}} \text{ (ja que senar}^2 = \text{senar)}$$

$$\Rightarrow p^2 = \dot{4} \Rightarrow q^2 = \frac{p^2}{2} = \dot{2} \Rightarrow \boxed{q = \dot{2}}$$

$$\Rightarrow p/q \text{ no és irreductible (contradicció).} \quad \diamondsuit$$

[1] A l'apèndix B hi ha una demostració senzilla que π no és racional.

2.1.2 Problema de l'extrem

Abans ens calen algunes definicions. Sigui C un conjunt amb una relació d'ordre *total*, $\leq$, i sigui $A \subset C$ (òbviament, A també està totalment ordenat per $\leq$):

- $k \in C$ és una *fita superior* de A si $x \leq k$, $\forall x \in A$. Si A té alguna fita superior diem que A és *fitat superiorment*. De manera similar, k és una *fita inferior* de A (i A és *fitat inferiorment*) si $x \geq k$, $\forall x \in A$. Diem que A és *fitat* si ho és superiorment i inferiorment.

- Si A és fitat superiorment, la menor (en el sentit de la relació d'ordre $\leq$) de les fites superiors, si existeix, s'anomena *extrem superior* o *suprem* de A. De manera similar, l'*extrem inferior* o *ínfim* de A és la major de les fites inferiors de A, si existeix.

- Si k és el suprem de A i $k \in A$, llavors k s'anomena *màxim* de A. De manera similar, si k és l'ínfim de A i $k \in A$, l'anomenem *mínim* de A.

Alguns exemples ajudaran a aclarir aquests conceptes (considerem $C = \mathbb{Q}$):

Exemple 1: $A = \{x \,|\, x \in \mathbb{Q}, x < 1\}$ és fitat superiorment, però no inferiorment. Té suprem (1), però no té màxim, ja que $1 \notin A$.

Exemple 2: $A = \{x \,|\, x \in \mathbb{Q}, 0 \leq x < 1\}$ és fitat superiorment i inferiorment. Té suprem (1), però no té màxim. Té ínfim (0), que també és mínim.

Exemple 3: $A = \{x \,|\, x = 1/n, n \in \mathbb{N}\}$ és fitat superiorment i inferiorment. Té suprem, que també és màxim (1), i té ínfim (0), però no té mínim.

En els exemples anteriors, quan el conjunt és fitat, no sempre hi ha màxim o mínim però sempre hi ha extrem (suprem o ínfim). Podem preguntar-nos si això és un fet general en el conjunt $\mathbb{Q}$ dels nombres racionals. La resposta és negativa tal com mostra l'exemple següent.

Exemple 4: $A = \{x \,|\, x \in \mathbb{Q}, x \geq 0, x^2 \leq 2\}$. Aquest conjunt és fitat superiorment (per exemple, 3/2 és una fita superior) però *no té suprem*. Ho seria $\sqrt{2}$, si fos racional. De fet, si k és una fita superior de A, sempre en podem trobar una altra, $k - \varepsilon$, que també ho sigui. Com que la desigualtat $(k-\varepsilon)^2 > 2$ equival a $\varepsilon < \frac{k^2-2}{2k-\varepsilon}$, que és $< \frac{k^2-2}{2k-1}$ si $\varepsilon < 1$, només cal que ε satisfaci aquestes desigualtats.

Així doncs,

> un conjunt fitat superiorment (o inferiorment) de nombres racionals, no sempre té extrem superior (o inferior).

Anomenem aquest fet el *problema de l'extrem.*

2.1.3 Problema de les successions de Cauchy

Més definicions:

- **Successió de nombres racionals:** és una aplicació del conjunt dels nombres naturals sobre els racionals

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{Q} \\ n & \to & a_n \end{array}$$

  que representem per $\{a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots\}$ o, abreviadament, $\{a_n\}$. L'ordre és important, $\{1, 1, 3, \ldots\}$ i $\{1, 3, 1, \ldots\}$ són successions diferents.

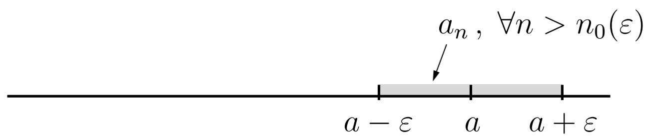
- **Successió convergent:** una successió $\{a_n\}$ és *convergent* cap al nombre racional a (o *té límit* a) si es compleix que

$$\forall \varepsilon > 0 \, (\varepsilon \in \mathbb{Q}),\ \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} \text{ tal que } d(a_n, a) < \varepsilon,\ \forall n > n_0(\varepsilon).$$

  En paraules, "la distància $d(a_n, a)$ es pot fer tan petita com es vulgui prenent n suficientment gran" i ho expressem

$$\lim\{a_n\} = a, \quad \lim_{n\to\infty} a_n = a, \quad \text{o simplement, } \{a_n\} \to a.$$

  D'acord amb aquesta definició, a partir del subíndex $n_0(\varepsilon)$ *tots* els termes de la successió són dins l'interval d'extrems $a - \varepsilon$, $a + \varepsilon$.



Exemple: sigui $a_n = (n+1)/(2n-1)$, comprovem que $\lim\{a_n\} = 1/2$. Per fer-ho, calculem $d(a_n, 1/2)$

$$d\left(\frac{(n+1)}{2n-1}, \frac{1}{2}\right) = \left|\frac{(n+1)}{2n-1} - \frac{1}{2}\right| = \frac{3}{4n-2}\,.$$

Donat $\varepsilon > 0$, aquesta distància és $< \varepsilon$ si $3/(4n-2) < \varepsilon \Rightarrow 4n - 2 > 3/\varepsilon \Rightarrow n > (3/4\varepsilon) + (1/2)$. Per tant, $\forall \varepsilon > 0$ tenim $d(a_n, 1/2) < \varepsilon$ si $n > n_0(\varepsilon) =$ part entera de $(3/4\varepsilon) + (1/2)$.

- **Successió de Cauchy:** una successió $\{a_n\}$ és *de Cauchy* si es compleix que

  $$\forall\varepsilon > 0\,(\varepsilon \in \mathbb{Q}),\ \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} \text{ tal que } d(a_n, a_m) < \varepsilon,\ \forall n, m > n_0(\varepsilon).$$

  D'acord amb aquesta definició, a partir del subíndex $n_0(\varepsilon)$ les distàncies entre termes de la successió és $< \varepsilon$.

EXEMPLE: comprovem que $\{a_n\}$, on $a_n = (-1)^n/(n+1)$, és una successió de Cauchy. Suposem $m > n$ (per tant, $\frac{1}{m+1} < \frac{1}{n+1}$) i calculem $d(a_n, a_m)$,

$$d(a_n, a_m) = \left|\frac{(-1)^n}{n+1} - \frac{(-1)^m}{m+1}\right| \leq \left|\frac{1}{n+1}\right| + \left|\frac{1}{m+1}\right| < \frac{2}{n+1} < \varepsilon.$$

La darrera desigualtat es compleix si $n > (2/\varepsilon)-1$. Per tant, $\forall\varepsilon > 0$, si $m, n > n_0 =$ part entera de $(2/\varepsilon) - 1$, tenim $d(a_n, a_m) < \varepsilon$.

Per alleugerir la notació, en endavant escriurem n_0 en comptes de $n_0(\varepsilon)$. Vegem ara algunes propietats de les successions.

Propietats de les successions convergents

- El límit d'una successió convergent és únic.

  DEMOSTRACIÓ: si $\{a_n\} \to a$, i també $\{a_n\} \to a'$, si fem servir la desigualtat triangular tenim

  $$d(a, a') \leq d(a, a_n) + d(a_n, a').$$

  Els dos sumands del segon membre es poden fer tan petits com es vulgui prenent n suficientment gran. Per tant, $d(a, a') = 0$, és a dir, $a = a'$. $\diamondsuit$

- Les successions convergents són fitades.

  DEMOSTRACIÓ: si $\{a_n\} \to a$ i triem un valor concret de ε, a partir d'un subíndex n_0 els termes a_n de la successió són dins l'interval d'extrems $a \pm \varepsilon$. Aquesta part de la successió és, doncs, fitada. Els n_0 primers termes poden estar dins o fora d'aquest interval, però com que es tracta d'un nombre finit de termes, d'entre els que estiguin fora (si n'hi ha algun) hi haurà el més allunyat per la dreta i el més allunyat per l'esquerra. Per tant, la successió sencera és fitada. $\diamondsuit$

- $\boxed{\{a_n\} \to a \text{ i } \{b_n\} \to b \;\Rightarrow\; \{a_n \pm b_n\} \to a \pm b.}$

  En paraules: "el límit de la suma és la suma dels límits".

  Demostració: com que les successions $\{a_n\}$ i $\{b_n\}$ són convergents, donat $\varepsilon > 0$, $\exists n_1, n_2$ tals que

  $$d(a_n, a) < \frac{\varepsilon}{2}\,,\ \forall n > n_1, \quad d(b_n, b) < \frac{\varepsilon}{2}\,,\ \forall n > n_2.$$

  Per tant,

  $$\begin{aligned} d(a_n \pm b_n, a \pm b) &= |a_n \pm b_n - a \mp b| \leq |a_n - a| + |b_n - b| \\ &= d(a_n, a) + d(b_n, b) < \varepsilon,\ \forall n > \max\{n_1, n_2\}. \quad \diamondsuit \end{aligned}$$

- $\boxed{\{a_n\} \to a \text{ i } \{b_n\} \to b \;\Rightarrow\; \{a_n b_n\} \to ab.}$

  En paraules: "el límit del producte és el producte dels límits".

  Demostració: com que $\{a_n\}$ és convergent, també és fitada, és a dir, $\exists k$ tal que $|a_n| \leq k$, $\forall n$. Llavors, si $M = \max\{k, |b|\}$, donat $\varepsilon > 0$, $\exists n_1, n_2$ tals que

  $$d(a_n, a) < \frac{\varepsilon}{2M}\,,\ \forall n > n_1, \quad d(b_n, b) < \frac{\varepsilon}{2M},\ \forall n > n_2.$$

  Per tant,

  $$\begin{aligned} d(a_n b_n, ab) &= |a_n b_n - ab| \\ &= |a_n b_n - a_n b + a_n b - ab| \leq |a_n| d(b_n, b) + |b| d(a_n, a) \\ &\leq M d(b_n, b) + M d(a_n, a) < \varepsilon,\ \forall n > \max\{n_1, n_2\}. \quad \diamondsuit \end{aligned}$$

- $\boxed{\{a_n\} \to a \text{ i } \{b_n\} \to b\,(\text{amb } b, b_n \neq 0) \;\Rightarrow\; \{a_n/b_n\} \to a/b.}$

  En paraules: sempre que no hi hagi zeros al denominador "el límit del quocient és el quocient dels límits".

  Demostració: és suficient demostrar que si $\{b_n\} \to b$ $(b, b_n \neq 0)$, llavors $\{1/b_n\} \to 1/b$, i fer servir el resultat anterior.
  Com que $\{b_n\}$ és convergent, $\exists n_1$ tal que

  $$d(b_n, b) < \frac{|b|}{2}\,,\ \forall n > n_1,$$

  i, per tant,

  $$|b_n| = |b - (b - b_n)| > |b| - \frac{|b|}{2} = \frac{|b|}{2}\,,\ \forall n > n_1.$$

D'altra banda, donat $\varepsilon > 0$, $\exists n_2$ tal que

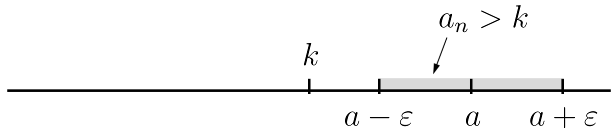
$$d(b_n, b) < \frac{\varepsilon |b|^2}{2}\,,\ \forall n > n_2.$$

Així doncs,

$$d\left(\frac{1}{b_n}, \frac{1}{b}\right) = \left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| = \frac{d(b_n, b)}{|b_n||b|}$$
$$< \frac{d(b_n, b)}{|b|^2/2} < \varepsilon,\ \forall n > \max\{n_1, n_2\}. \quad \diamondsuit$$

- $\{a_n\} \to a$ i a partir d'algun subíndex es compleix $a_n \leq k \ \Rightarrow\ a \leq k$.

DEMOSTRACIÓ: si no fos així, tindríem $a > k$, i prenent $\varepsilon < d(a, k)$, a partir d'algun subíndex els termes de la successió estarien dins l'interval d'extrems $a - \varepsilon$, $a + \varepsilon$ i complirien, per tant, $a_n > k$, en contradicció amb la hipòtesi.



Notem que si a partir d'algun subíndex es compleix $a_n < k$, tenim igualment $a \leq k$. Per exemple, si $a_n = 1 - (1/n)$, tenim $a_n < 1$, $\forall n$, mentre que $\lim\{a_n\} = 1$. $\diamondsuit$

Similarment, si $\{a_n\} \to a$, i a partir d'algun subíndex, $a_n \geq k$, aleshores $a \geq k$.

COROL·LARI: si $\{a_n\} \to a$ i $\{b_n\} \to b$, i a partir d'algun subíndex, $a_n \leq b_n$, aleshores $a \leq b$

DEMOSTRACIÓ: només cal aplicar el resultat anterior a la successió $\{b_n - a_n\}$. $\diamondsuit$

- Les successions convergents són de Cauchy.

DEMOSTRACIÓ: si $\{a_n\} \to a$, donat $\varepsilon > 0$, $\exists n_0$ tal que

$$d(a_n, a) < \frac{\varepsilon}{2}\,,\ \forall n > n_0,$$

i, per tant,

$$d(a_n, a_m) \leq d(a_n, a) + d(a, a_m) < \varepsilon,\ \forall m, n > n_0. \quad \diamondsuit$$

Propietats de les successions de Cauchy

- Les successions de Cauchy són fitades.
- $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ de Cauchy $\Rightarrow \{a_n + b_n\}$, $\{a_n \cdot b_n\}$ de Cauchy.
- $\boxed{\text{Les successions de Cauchy } \textit{no sempre són convergents.}}$

  Anomenem aquest fet el *problema de les successions de Cauchy.*

Les dues primeres propietats es poden demostrar de forma molt semblant al cas de les successions convergents. Pel que fa a la darrera afirmació, la podem il·lustrar amb un exemple. Considerem la successió

$$\{1{,}4,\ 1{,}41,\ 1{,}414,\ 1{,}4142,\ 1{,}41421,\ 1{,}414213,\ 1{,}4142135\ \ldots\}$$

construïda així: a_n és el nombre racional més gran, amb n *xifres decimals*, que compleix $a_n^2 \leq 2$.

Evidentment aquesta successió és de Cauchy, ja que si $m > n$ tenim $d(a_n, a_m) \leq 10^{-n}$ (notem que a_n i a_m tenen les primeres n xifres decimals idèntiques). Tanmateix, la successió no és convergent. Si ho fos, tindríem $\{a_n\} \to a$ i com que, d'altra banda, $\{a_n^2\} \to 2$, arribaríem a $a^2 = 2$, cosa que no compleix cap nombre racional, com ja hem vist.

2.2 Cos $\mathbb{R}$ dels nombres reals

Els tres problemes anteriors se solucionen amb una nova ampliació del conjunt dels nombres racionals que ens portarà al conjunt dels nombres *reals.* Primer introduirem alguns conceptes:

- **Cos ordenat:** recordem que és un cos $(K, +, \cdot)$ amb una relació d'ordre total $(\leq)$ que compleix:

  P1) $x \leq y \ \Rightarrow\ x + z \leq y + z, \forall z \in K,$

  P2) $x, y \geq 0 \ \Rightarrow\ x \cdot y \geq 0.$

  Per exemple, $\mathbb{Q}$ és un cos ordenat.

  De fet, qualsevol cos ordenat K conté $\mathbb{Q}$. Només cal identificar els racionals 0 i 1 amb els corresponents elements neutres $\tilde{0}$ i $\tilde{1}$ de K i, en general, el racional d'expressió *irreductible* p/q amb l'element de K

$$\pm(\overbrace{\tilde{1} + \ldots + \tilde{1}}^{|p|}) \cdot (\overbrace{\tilde{1} + \ldots + \tilde{1}}^{q})^{-1},$$

  on el signe depèn de si p és positiu o negatiu.

Es pot demostrar que aquesta identificació és compatible amb les operacions i les ordenacions d'ambdós cossos. Això vol dir que qualsevol cos ordenat K conté el cos ordenat $\mathbb{Q}$ com a *subcòs*. Podem dir, doncs, que $\mathbb{Q}$ és el cos ordenat "més petit". D'altra banda, és evident que si qualsevol cos ordenat conté $\mathbb{Q}$, també contindrà $\mathbb{Z}$ i $\mathbb{N}$.

Els elements del cos ordenat K diferents de 0 es poden classificar en *positius* ($x > 0$) i *negatius* ($x < 0$). Podem definir també els conceptes de *valor absolut* i de *distància* de forma similar a com ho hem fet a $\mathbb{Q}$, és a dir,

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0, \\ -x & \text{si } x < 0, \end{cases} \qquad d(x,y) = |x-y|.$$

Això ens permet també introduir els conceptes de *successió convergent* i de *successió de Cauchy* d'elements de K. Aquestes successions tindran també les propietats que hem vist en la secció anterior per a les successions de nombres racionals.

En un cos ordenat podem parlar, també, de fites superiors i inferiors, de conjunts fitats superiorment i inferiorment, d'extrem superior (o suprem) i inferior (o ínfim), de màxim i mínim, etc. de forma similar a com ho hem definit a $\mathbb{Q}$.

- **Cos ordenat amb la propietat de l'extrem:** és un cos ordenat en el qual tot conjunt fitat superiorment té suprem i tot conjunt fitat inferiorment té ínfim (recordem que el suprem o extrem superior és, si existeix, la menor de les fites superiors i que l'ínfim o extrem inferior és la major de les fites inferiors).

  Ja hem vist abans que $\mathbb{Q}$ no té la propietat de l'extrem (és el que hem anomenat "problema de l'extrem" de $\mathbb{Q}$).

  Una propietat interessant dels cossos ordenats que tenen la propietat de l'extrem és aquesta:

  TEOREMA: Si K és un cos ordenat amb la propietat de l'extrem i una successió $\{a_n\}$ d'elements de K és creixent ($a_{n+1} \geq a_n$) i fitada superiorment, aleshores $\{a_n\}$ convergeix cap el seu suprem.

  DEMOSTRACIÓ: com que la successió és fitada superiorment i K té la propietat de l'extrem, $\{a_n\}$, com a conjunt, ha de tenir suprem s. Això vol dir que hi ha termes de la successió tan a prop com es vulgui de s (si no, hi hauria fites superiors més petites). En altres paraules, $\forall \varepsilon > 0$ hi ha algun a_{n_0} tal que $d(a_{n_0}, s) < \varepsilon$, però com que la successió és creixent, a partir d'aquest terme tots compleixen $a_{n_0} \leq a_n \leq s$ i, per tant, $\forall n > n_0$, $d(a_n, s) < \varepsilon$, és a dir, $\{a_n\} \to s$. $\diamondsuit$

Similarment es demostra que si $\{a_n\}$ és decreixent i fitada inferiorment, aleshores convergeix cap al seu ínfim.

- **Cos ordenat arquimedià:** és un cos ordenat en el qual el subconjunt $\mathbb{N}$ no està fitat superiorment. En altres paraules, un cos ordenat K és arquimedià si
$$\forall x \in K\ (x > 0),\ \exists n \in \mathbb{N} \text{ tal que } n > x.$$
Per exemple, $\mathbb{Q}$ és un cos ordenat arquimedià.

  Si fem $x = 1/\varepsilon$, la propietat arquimediana anterior també es pot formular així
$$\forall \varepsilon \in K\ (\varepsilon > 0),\ \exists n \in \mathbb{N} \text{ tal que } \frac{1}{n} < \varepsilon.$$
Això permet afirmar que si K és un cos ordenat arquimedià i x és un element positiu de K, hi ha sempre un racional positiu menor que x.

  Aquesta propietat té una conseqüència important. Les successions convergents o de Cauchy de $\mathbb{Q}$ també són convergents o de Cauchy considerades com successions de K. En efecte, si $\{a_n\} \to a$ dins de $\mathbb{Q}$, tenim que
$$\forall \varepsilon > 0\ (\varepsilon \in \mathbb{Q}),\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tal que } d(a_n, a) < \varepsilon,\ \forall n > n_0.$$
Perquè sigui també convergent com a successió de K cal que es compleixi la condició anterior per a qualsevol ε' positiu de K, però això està garantit, ja que per a cada $\varepsilon' > 0$ de K es pot trobar sempre un $\varepsilon > 0$ de $\mathbb{Q}$ tal que $\varepsilon < \varepsilon'$. Igualment es pot argumentar amb les successions de Cauchy.

TEOREMA: Si K és un cos ordenat amb la propietat de l'extrem, aleshores K és arquimedià.

  DEMOSTRACIÓ: si no ho fos, $\mathbb{N}$ seria fitat superiorment i hauria de tenir suprem s. Llavors $s-1$ no seria fita superior de $\mathbb{N}$, ja que s és la menor d'elles. Això significa que algun $n \in \mathbb{N}$ hauria de complir que $n > s - 1$. Si sumem 1 a cada costat d'aquesta desigualtat tenim $n + 1 > s$, és a dir, hem trobat un nombre natural que supera s, en contradicció amb el fet que s és el suprem de $\mathbb{N}$. $\diamondsuit$

  El recíproc no és cert. Per exemple, $\mathbb{Q}$ és arquimedià malgrat no tenir la propietat de l'extrem.

- **Cos ordenat complet:** és un cos ordenat en el qual *totes* les successions de Cauchy són convergents.

  Com ja hem vist en la secció anterior, $\mathbb{Q}$ no és complet (és el que hem anomenat "problema de les successions de Cauchy" de $\mathbb{Q}$).

Teorema: Si K és un cos ordenat amb la propietat de l'extrem, aleshores K és complet.

Demostració: sigui $\{a_n\}$ una successió de Cauchy. Això vol dir que donat $\varepsilon > 0$ hi ha algun subíndex n_1 tal que

$$d(a_n, a_m) < \frac{\varepsilon}{3}, \; \forall n, m > n_1.$$

Aquesta successió és fitada superiorment i inferiorment (totes les successions de Cauchy ho són). Volem demostrar que $\{a_n\}$ és convergent. Per fer-ho construïm la successió de "suprems" $\{s_k\}$, on $s_k = \sup\{a_k, a_{k+1}, \ldots\}$, és a dir,

$$\begin{array}{rcl} s_1 & = & \sup\{a_1, a_2, \ldots\}, \\ s_2 & = & \sup\{a_2, a_3, \ldots\}, \\ s_3 & = & \sup\{a_3, a_4, \ldots\}, \\ & \vdots & \end{array}$$

Com que cada conjunt té un element menys, la successió de suprems $\{s_k\}$ és decreixent. D'altra banda, com que $\{a_n\}$ és fitada inferiorment, $\{s_k\}$ també ho és. Per tant, com acabem de veure, $\{s_k\}$ ha de ser convergent i si $\ell = \lim\{s_k\}$ hi haurà algun subíndex n_2 tal que

$$d(s_k, \ell) < \frac{\varepsilon}{3}, \; \forall k > n_2.$$

Així doncs, $\forall n, m, k > n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ es compliran ambdues desigualtats

$$d(a_n, a_m) < \frac{\varepsilon}{3}, \quad d(s_k, \ell) < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Ara escollim un a_m dins el conjunt $\{a_k, a_{k+1}, \ldots\}$ (del qual s_k n'és el suprem) de manera que $d(a_m, s_k) < \varepsilon/3$. Això sempre és possible perquè podem trobar elements del conjunt $\{a_k, a_{k+1}, \ldots\}$ tan a prop com vulguem del seu suprem s_k. Com que, evidentment, $m \geq k$, tenim

$$d(a_n, \ell) \leq d(a_n, a_m) + d(a_m, s_k) + d(s_k, \ell) < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon, \; \forall n > n_0,$$

és a dir, $\{a_n\}$ és convergent cap a ℓ. $\diamondsuit$

És clar, doncs, que un cos ordenat amb la propietat de l'extrem solucionaria almenys dos dels tres problemes de $\mathbb{Q}$ (el de l'extrem i el de les successions de Cauchy). Però n'hi ha algun? El teorema següent dona la resposta.

TEOREMA: Existeix un *únic* cos ordenat amb la propietat de l'extrem (i que, per tant, també és arquimedià i complet) que designem per $\mathbb{R}$ i anomenem cos dels nombres *reals*.

Ens limitarem a construir $\mathbb{R}$ com a conjunt i a definir les operacions i la relació d'ordre. Ometrem les demostracions de les propietats requerides així com de la seva unicitat.

Conjunt $\mathbb{R}$ dels nombres reals

Definim el conjunt $\mathbb{R}$ dels nombres reals com el conjunt dels *talls de la recta racional*,[2] on un *tall* és un conjunt A de nombres racionals amb les propietats següents:

1) Els elements del conjunt A són menors que els elements del seu complementari $\overline{A}$ $(= \mathbb{Q} - A)$.

2) El conjunt A no té màxim.

La primera propietat ens diu que un tall descompon la recta racional $\mathbb{Q}$ en dos subconjunts disjunts, A i $\overline{A}$, mútuament complementaris, el primer dels quals, A, és (sobre la recta racional) a l'esquerra de l'altre. És clar, per tant, que el subconjunt de l'esquerra, A, és fitat superiorment per qualsevol element de $\overline{A}$.

La segona propietat ens diu que en el cas que A tingui suprem (cosa que no sempre succeeix, ja que $\mathbb{Q}$ no té la propietat de l'extrem) aquest suprem no pertany a A sinó a $\overline{A}$ (i és, per tant, el mínim de $\overline{A}$).

Ens trobem, doncs, amb dos tipus de talls:

1) *Tall racional*: és un tall definit per un conjunt A que té suprem s. En aquest cas, tenim que $A = \{x|x < s\}$ mentre que $\overline{A} = \{x|x \geq s\}$. Identifiquem aquest "tall racional" amb el *nombre racional* s.

   Així, per exemple, el tall $A = \{x \,|\, x < 2/3\}$ s'identifica amb el nombre racional $2/3$ (en aquest cas, $\overline{A} = \{x \,|\, x \geq 2/3\}$).

   És obvi que tots els nombres racionals es poden identificar amb els talls d'aquest tipus. En altres paraules, el conjunt $\mathbb{R}$ dels talls (nombres reals) conté $\mathbb{Q}$.

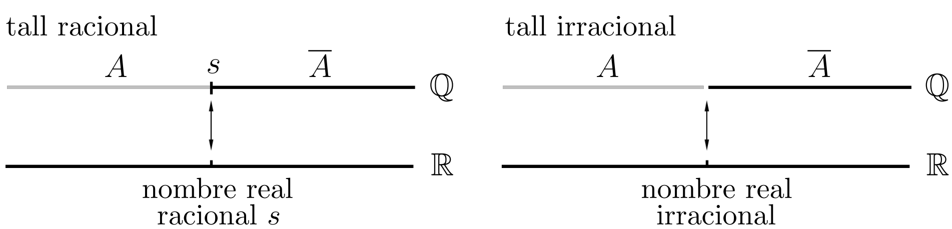
[2] La construcció que es presenta aquí (els nombres reals com a talls de la recta racional) és de Dedekind (1831-1916) (vegeu, per exemple, el capítol 1 del llibre de W. Rudin *Principios de análisis matemático*, McGraw-Hill, 1980). Hi ha una construcció alternativa equivalent de Cantor (1845-1918) que defineix els nombres reals com a classes d'equivalència de successions de Cauchy de nombres racionals (vegeu, per exemple, el capítol I del llibre de J. M. Ortega *Introducció a l'anàlisi matemàtica*, Manuals de la UAB, 2002).

2) *Tall irracional*: és un tall definit per un conjunt A que no té suprem.

   Aquests "talls irracionals" són els nous elements (no racionals) de $\mathbb{R}$ i els anomenem *nombres irracionals*. Com veurem, d'aquests talls n'hi ha molts més que dels altres.

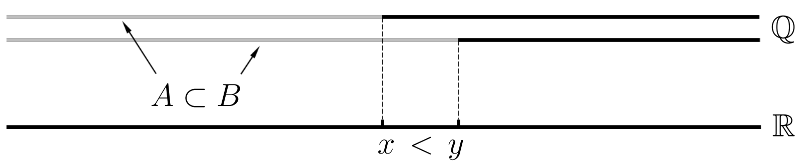
   Per exemple, el conjunt $A = \{x|x < 0, \text{ o } x \geq 0 \text{ però } x^2 \leq 2\}$, defineix un tall irracional, ja que no té suprem (el suprem seria $\sqrt{2}$, si fos racional). Aquest tall és, doncs, un nombre irracional.

Aquestes definicions s'il·lustren a la figura següent:



Ordenació dels nombres reals

Ara definim el significat de la frase "el nombre real x (definit pel tall A) és *menor* que el nombre real y (definit pel tall B)". Per definició, $x < y$ si $A \subset B$.



És evident que aquesta definició *ordena totalment* els nombres reals i conserva l'ordenació preexistent dels racionals. Aquesta ordenació ens permet, d'altra banda, parlar de nombres reals positius (> 0) i negatius (< 0).

Suma i producte de nombres reals

Donats els nombres reals x (definit pel tall A) i y (definit pel tall B), definim

$$x + y \overset{\text{def}}{=} \text{ tall definit pel conjunt } C = \{c \,|\, c = a + b,\ a \in A,\ b \in B\}.$$

Pel que fa al producte, considerem primer el cas $x, y \geq 0$. Si A_+ i B_+ són, respectivament, els conjunts dels racionals *positius* (incloent el 0) de A i de B, definim

$$x \cdot y \overset{\text{def}}{=} \text{ tall definit pel conjunt } C = \{c \,|\, c = a \cdot b,\ a \in A_+,\ b \in B_+\} \cup \mathbb{Q}_-\,,$$

on $\mathbb{Q}_-$ és el conjunt dels racionals negatius. En el cas que x o y siguin negatius, definim

$$x \cdot y \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} -\left(x \cdot (-y)\right) & \text{si } x \geq 0 \text{ i } y < 0, \\ (-x) \cdot (-y) & \text{si } x < 0 \text{ i } y < 0. \end{cases}$$

Es pot comprovar que:

- aquestes operacions, restringides al subconjunt $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, coincideixen amb les operacions suma i producte allà existents,
- la suma $(+)$, el producte $(\cdot)$ i l'ordenació $(\leq)$ donen a $\mathbb{R}$ l'estructura de *cos ordenat*.

Propietat de l'extrem
$\mathbb{R}$ té la propietat de l'extrem, ja que si C és un conjunt de nombres *reals* fitat superiorment, cadascun dels seus elements està definit per un tall A. La *unió* d'aquests conjunts (talls) A defineix també un tall que correspon a la menor fita superior (és a dir, el suprem) de C.

$\mathbb{R}$ és, doncs, un cos ordenat amb la propietat de l'extrem i, per tant, és també arquimedià i complet. El problema de l'extrem i el de les successions de Cauchy s'han resolt amb $\mathbb{R}$. Què passa amb l'altre problema (el de l'arrel)?

2.3 Arrel d'un nombre real

L'exemple anterior de tall irracional ja ens insinua que $\sqrt{2}$ existeix com a nombre irracional. Comprovem que, efectivament, és així. Ja hem vist abans que

$$\{1{,}4,\ 1{,}41,\ 1{,}414,\ 1{,}4142,\ 1{,}41421,\ 1{,}414213,\ 1{,}4142135\ \ldots\}$$

és un exemple de successió de Cauchy no convergent de nombres *racionals*, però considerada com una successió de nombres *reals* és convergent (és creixent i fitada superiorment). El seu límit, a, haurà de complir $a^2 = 2$, ja que la successió de quadrats convergeix cap a 2. Així doncs, existeix el nombre *real* a el quadrat del qual és 2, és a dir, $a = \sqrt{2}$.

Aquest resultat es pot generalitzar així:

TEOREMA: Tot nombre real *positiu* té arrel n-èsima.

DEMOSTRACIÓ: si a és un nombre real positiu i $n \in \mathbb{N}$, $\forall k$ definim a_k com el nombre racional més gran, *amb k xifres decimals*, que compleix $a_k^n \leq a$. La successió $\{a_k\}$ és creixent i fitada superiorment i, per tant, és convergent. Si $\{a_k\} \to r$, com que $\{a_k^n\} \to a$, tindrem que $r^n = a$, és a dir $r = a^{1/n}$. $\diamondsuit$

Hem resolt, doncs, el problema de l'arrel dels nombres reals *positius*. Pel que fa als *negatius*, el problema s'ha resolt només en part, ja que només existeix arrel n-èsima d'un nombre real negatiu quan n és *senar*. Queda, doncs, un problema de l'arrel residual: quan n és *parell* l'arrel n-èsima d'un nombre real *negatiu* no existeix. La solució d'aquest problema requereix una nova ampliació de $\mathbb{R}$ cap al conjunt $\mathbb{C}$ dels nombres *complexos* (vegeu l'apèndix A).

Potència d'exponent real

Siguin $a, b \in \mathbb{R}$, amb $a > 0$. Definim a^b de la manera següent:

Si b és el *racional* p/q, definim $a^b = a^{p/q} \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt[q]{a^p}$.

Si b és *irracional*, definim $a^b \stackrel{\text{def}}{=} \lim\{a^{b_n}\}$, on $\{b_n\}$ és qualsevol successió de nombres *racionals* convergent cap a b. Es pot veure fàcilment que aquest límit existeix i que no depèn de la successió $\{b_n\}$ escollida.

DEMOSTRACIÓ: en ser $\{b_n\}$ convergent, també és fitada i, per tant, $\{a^{b_n}\}$ també ho és. Així doncs, $\exists M$ tal que $|a^{b_n}| < M$, $\forall n$. Llavors

$$d(a^{b_n}, a^{b_m}) = |a^{b_n} - a^{b_m}| = |a^{b_m}||a^{b_n - b_m} - 1| < M|a^{b_n - b_m} - 1|.$$

Com que si prenem n i m suficientment grans $|b_n - b_m|$ es pot fer tant petit com vulguem, el mateix passa amb $|a^{b_n - b_m} - 1|$. Això demostra que la successió $\{a^{b_n}\}$ és de Cauchy i, per tant, convergent. D'altra banda, si $\{b'_n\} \to b$ tenim $|a^{b'_n} - a^{b_n}| < M|a^{b'_n - b_n} - 1|$ que també es pot fer tan petit com vulguem si prenem n suficientment gran. Això demostra que $\lim\{a^{b'_n}\} = \lim\{a^{b_n}\}$. $\diamondsuit$

Resum de les propietats dels nombres reals

- El conjunt $\mathbb{R}$ dels nombres reals amb les operacions suma $(+)$ i producte $(\cdot)$ és un *cos*, ja que:
  - $(\mathbb{R}, +)$ és un grup abelià:
    - La suma és associativa: $(x + y) + z = x + (y + z)$, $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$,
    - la suma és commutativa: $x + y = y + x$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$,
    - hi ha un element neutre, 0, tal que $0 + x = x + 0 = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$,
    - $\forall x \in \mathbb{R}$ hi ha un simètric, $-x$, tal que $x + (-x) = (-x) + x = 0$.
  - $(\mathbb{R} - \{0\}, \cdot)$ és un grup abelià:
    - El producte és associatiu: $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$, $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$,
    - el producte és commutatiu: $x \cdot y = y \cdot x$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$,
    - hi ha un element neutre, 1, tal que $1 \cdot x = x \cdot 1 = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$,
    - $\forall x \neq 0$ de $\mathbb{R}$ hi ha un simètric, x^{-1}, tal que $x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = 1$.
  - El producte és distributiu respecte de la suma:
  $$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z, \quad \forall x, y, z \in \mathbb{R}.$$
- El cos $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ amb la relació d'ordre $\leq$ és un *cos ordenat*, ja que:

  P1) $x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z$, $\forall z \in \mathbb{R}$,

  P2) $x, y \geq 0 \Rightarrow x \cdot y \geq 0$.

Els nombres reals diferents de 0 es classifiquen en positius ($x > 0$) i negatius ($x < 0$), i es compleixen les vuit propietats llistades a les pàgines 14 a 16.

- El cos ordenat $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$ té la *propietat de l'extrem*, és a dir, si $A \subset \mathbb{R}$ és fitat superiorment (o inferiorment), aleshores A té *extrem superior* (o *inferior*).
- El cos ordenat $\mathbb{R}$ és *complet*, és a dir, les successions de Cauchy de nombres reals són convergents.
- El cos ordenat $\mathbb{R}$ és *arquimedià*, és a dir, $\mathbb{N}$ no és fitat superiorment o, equivalentment, per a tot nombre real positiu x, $\exists n \in \mathbb{N}$ tal que $1/n < x$.
- Tot nombre real positiu té arrel n-èsima real. Si és negatiu, només té arrel n-èsima real si n és senar.

2.4 Successions de nombres reals. Teorema de Bolzano - Weierstrass

Les successions de nombres reals compleixen en general les mateixes propietats que les de nombres racionals, descrites a la secció 2.1.3. No obstant això, hi ha algunes propietats que no compleixen les successions de racionals però sí les de reals com a conseqüència del fet que $\mathbb{R}$ té la propietat de l'extrem i és, per tant, complet. Ja n'hem vist dues:

- les successions de Cauchy de nombres reals són sempre convergents,
- les successions creixents (decreixents) fitades superiorment (inferiorment) de nombres reals són sempre convergents.

El nombre e

La darrera propietat garanteix l'existència del nombre $e \stackrel{\text{def}}{=} \lim\{a_n\}$, on $a_n = (1 + 1/n)^n$, ja que aquesta successió és creixent i fitada superiorment.

Demostració: si fem servir el binomi de Newton tenim

$$\begin{aligned} a_n &= \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \\ &= \binom{n}{0} + \binom{n}{1}\frac{1}{n} + \binom{n}{2}\frac{1}{n^2} + \binom{n}{3}\frac{1}{n^3} + \cdots + \binom{n}{n}\frac{1}{n^n} \\ &= 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) + \cdots \\ &\qquad + \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right). \end{aligned}$$

Com que tots els sumands són positius, tenim que $a_{n+1} > a_n$, ja que, a part de contenir un sumand addicional, la resta de sumands de a_{n+1} són més grans que els corresponents sumands de a_n, atès que els termes de la forma $(1-r/n)$ creixen quan substituïm n per $n+1$. La successió $\{a_n\}$ és, doncs, creixent.

També és fitada, ja que

$$\begin{aligned} a_n &= 1+1+\frac{1}{2!}\Big(1-\frac{1}{n}\Big)+\frac{1}{3!}\Big(1-\frac{1}{n}\Big)\Big(1-\frac{2}{n}\Big)+\cdots \\ &\qquad +\frac{1}{n!}\Big(1-\frac{1}{n}\Big)\Big(1-\frac{2}{n}\Big)\cdots\Big(1-\frac{n-1}{n}\Big) \\ &< 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!} \\ &< 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}} < 3. \quad \diamondsuit \end{aligned}$$

Així doncs, $\{a_n\}$ és convergent i el seu límit és ≤ 3. D'altra banda, com que $a_1 = 2$ i la successió és creixent, el seu límit és > 2. Tenim, per tant, $2 < e \leq 3$. De fet, e és un nombre *irracional* (vegeu el capítol 8 i l'apèndix B). El seu valor aproximat és

$$e = 2{,}71828182845904523536028747135\ldots$$

Teorema de Bolzano - Weierstrass

Veurem ara una altra propietat de les successions de nombres reals que no compleixen, en general, les de nombres racionals. Abans, però, hem d'introduir el concepte de *successió parcial* d'una altra.

Definició: La successió $\{a_{n_1}, a_{n_2}, a_{n_3}, \ldots\}$ és una *successió parcial* de la successió $\{a_n\}$ si $\{n_1, n_2, n_3, \ldots\}$ és una successió *estrictament creixent* de nombres naturals (és a dir, $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$).

En altres paraules, una successió parcial de $\{a_n\}$ és una successió formada per *alguns* termes d'aquesta, *sense variar-ne l'ordre.*

Evidentment, si una successió $\{a_n\}$ és convergent, qualsevol successió parcial seva també ho és i té el mateix límit

Demostració: si $\{a_n\} \to a$, donat ε, a partir d'algun subíndex tenim $d(a_n, a) < \varepsilon$, llavors també $d(a_{n_k}, a) < \varepsilon$ a partir del mateix subíndex. $\diamondsuit$

No obstant això, una successió no convergent pot tenir successions parcials convergents. El teorema següent dona una condició suficient.

> TEOREMA DE BOLZANO - WEIERSTRASS: Tota successió *fitada* de nombres *reals* té alguna successió parcial convergent.

DEMOSTRACIÓ: si $\forall n,\ a \leq a_n \leq b$, anomenem I_0 el conjunt de punts (nombres reals) x que compleixen $a \leq x \leq b$. Dividim I_0 en dues meitats i n'escollim una que contingui *infinits* termes de la successió $\{a_n\}$ (almenys una de les dues meitats complirà aquest requisit). Anomenem I_1 la meitat escollida. Tornem a dividir I_1 en dues meitats i n'escollim una aplicant novament el criteri anterior. Anomenem I_2 la meitat escollida. Repetim el procés indefinidament.

D'aquesta manera tenim que tots els conjunts $I_0 \supset I_1 \supset I_2 \supset \dots$ contenen infinits termes de $\{a_n\}$ i cadascun d'ells té la meitat de llargada que l'anterior (la llargada de conjunt I_k és $L_k = (b-a)/2^k$). Això ens permet construir una successió $\{a_{n_k}\}$ amb $a_{n_k} \in I_k$ i $n_k < n_{k+1}$ (sempre es pot fer, ja que hi ha infinits termes de la successió $\{a_n\}$ a cada I_k). La successió $\{a_{n_k}\}$ és una successió parcial de $\{a_n\}$ i és de Cauchy (i, per tant, convergent), ja que, per construcció, si $n_k < n_\ell$, tenim $d(a_{n_k}, a_{n_\ell}) < L_k = (b-a)/2^k$, que és tan petit com vulguem per a k suficientment gran. $\diamondsuit$

2.5 Expressió decimal d'un nombre real

Tots els nombres racionals es poden expressar en forma *decimal* amb un nombre finit de xifres decimals (p. ex., $7/8 = 0{,}875$) o amb un nombre infinit amb estructura periòdica (p. ex., $96/55 = 1{,}7\underline{454545}\dots$). El recíproc també és cert, un nombre decimal amb un nombre finit de xifres decimals o amb un nombre infinit amb estructura periòdica, representen sempre un nombre racional.

EXEMPLE:

$$
\begin{aligned}
x &= 43{,}5974 \Rightarrow 10000x = 435974 \Rightarrow x = \frac{435974}{10000}\,, \\
x &= 2{,}3\underline{5252}\dots \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 1000x = 2352{,}5252\dots \\ 10x = 23{,}5252\dots \end{array} \right\} \\
&\qquad\qquad \Rightarrow 990x = 2329 \Rightarrow x = \frac{2329}{990}\,.
\end{aligned}
$$

Veurem ara que *qualsevol* nombre real és expressable en forma decimal amb un nombre infinit de xifres decimals. Abans, però, cal donar sentit a aquests nombres amb infinites xifres decimals. Ho fem amb un exemple:

Exemple: 3,1415926535897... és, per definició, el límit (i el suprem) de la successió creixent i fitada superiorment

$$\{3{,}1,\ 3{,}14,\ 3{,}141,\ 3{,}1415,\ 3{,}14159,\ 3{,}141592,\ 3{,}1415926\ldots\}$$

i és, per tant, un nombre real.

Qualsevol nombre real x és expressable d'aquesta forma. Només cal considerar la successió $\{a_n\}$, on a_n és el nombre *racional* més gran, amb n xifres decimals, que compleix $a_n \leq x$. Aquesta successió és creixent i fitada superiorment (el mateix x n'és una fita superior) i, per tant, convergeix cap al seu suprem que, òbviament, ha de ser $\leq x$. D'altra banda, la successió $\{a'_n\}$, on a'_n és a_n amb la darrera xifra decimal incrementada en una unitat (és a dir, $a'_n = a_n + 10^{-n}$) és decreixent i fitada inferiorment i, per tant, convergeix cap al seu ínfim que ha de ser $\geq x$, ja que, per construcció, $a'_n > x$, $\forall n$. Però com que $\{a'_n - a_n\} = \{10^{-n}\} \to 0$, ambdues successions convergeixen cap a x. Concloem, doncs, que

$$\boxed{\text{un nombre real és un nombre decimal amb infinites xifres decimals.}}$$

En el cas dels nombres racionals, a partir d'algun lloc, les infinites xifres decimals són 0 (en aquest cas també admeten una expressió amb infinits 9 a partir d'un lloc) o tenen estructura periòdica:

$$\frac{7}{8} = 0{,}875\underline{0000}\ldots = 0{,}874\underline{9999}\ldots, \qquad \frac{96}{55} = 1{,}7\underline{454545}\ldots$$

Per tant, si el nombre decimal no té estructura periòdica, correspon a un nombre irracional.

2.6 Altres propietats dels nombres reals

- Entre dos nombres reals sempre hi ha algun *racional.*

Demostració: ja hem vist que la propietat arquimediana de $\mathbb{R}$ garanteix que entre 0 i un real positiu sempre hi ha algun racional. Veurem ara que si $0 < x < y$, sempre hi un racional entre x i y (la generalització al cas en què x o y són negatius és trivial). Considerem el nombre real positiu $y - x$. D'acord amb la propietat arquimediana, $\exists n \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{1}{n} < y - x \Rightarrow \boxed{x + \tfrac{1}{n} < y},$$

i també $\exists m \in \mathbb{N}$ tal que

$$m-1 \leq nx < m \Rightarrow \begin{cases} \frac{m-1}{n} \leq x \Rightarrow \boxed{\frac{m}{n} \leq x + \frac{1}{n}}, \\ \boxed{x < \frac{m}{n}}. \end{cases}$$

Per tant,

$$x < \boxed{\frac{m}{n}} \leq x + \frac{1}{n} < y.$$

Hem trobat, doncs, el *racional* m/n entre x i y. $\diamondsuit$

- Entre dos nombres reals sempre hi ha algun *irracional*.

  DEMOSTRACIÓ: sigui $x, y \in \mathbb{R}$ amb $x < y$, i sigui s un irracional positiu, llavors entre els nombres reals x/s i y/s hi haurà algun racional r:

  $$\frac{x}{s} < r < \frac{y}{s} \quad \Rightarrow \quad x < \boxed{r \cdot s} < y.$$

  Per tant, entre x i y hem trobat l'*irracional* $r \cdot s$ (és irracional, ja que si fos racional, multiplicant-lo pel racional $1/r$ tindríem que s hauria de ser també racional). $\diamondsuit$

L'aplicació reiterada d'aquests resultats permet afirmar que

entre dos nombres reals hi ha sempre infinits racionals i infinits irracionals.

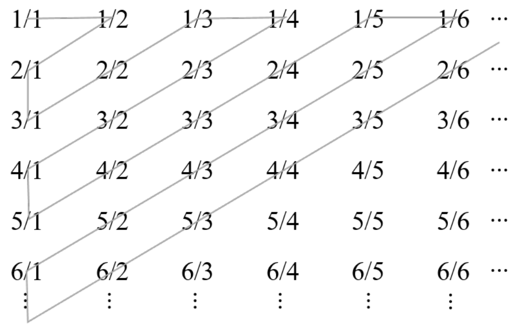
No obstant això, hi ha molts més irracionals que racionals. Per mostrar aquest fet més clarament, introduïm el concepte de conjunt *numerable*:

DEFINICIÓ: Un conjunt A amb un nombre infinit d'elements és *numerable* si es pot construir una aplicació bijectiva entre $\mathbb{N}$ i A o, equivalentment, si es pot construir una successió usant tots els elements de A sense repetir-ne cap.

El teorema següent posa en evidència que hi ha molts més nombres irracionals que racionals.

TEOREMA: $\mathbb{Q}$ és numerable mentre que $\mathbb{R}$ no ho és.

DEMOSTRACIÓ: els elements positius de $\mathbb{Q}$ es poden "numerar" seguint l'ordre indicat en la figura següent (saltant-se les fraccions reductibles):



La inclusió dels racionals negatius no ho espatlla, ja que podem renumerar-los tots seguint l'ordre anterior però numerant cada racional negatiu després del seu simètric positiu (de fet, la unió d'una infinitat numerable de conjunts numerables és també numerable).

D'altra banda, el conjunt $\mathbb{R}$ no és numerable, ja que si ho fos podríem construir una successió amb tots els nombres reals

$$\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, \ldots\}.$$

Però sempre hi hauria un nombre real no inclòs a la successió. Només caldria construir un nombre real amb la primera xifra decimal diferent de la primera xifra decimal de x_1, la segona xifra decimal diferent de la segona xifra decimal de x_2, la tercera xifra decimal diferent de la tercera xifra decimal de x_3, etc. (evitant sempre les xifres 0 i 9 per no tenir ambiguïtats del tipus $1{,}5000\ldots = 1{,}4999\ldots$). Aquest nombre real seria diferent de tots els x_n. $\diamondsuit$

2.7 Conceptes topològics a $\mathbb{R}$

En aquesta secció utilitzarem indistintament la terminologia *nombre real* i *punt de la recta real* per referir-nos als elements de $\mathbb{R}$.

Intervals

- *Interval obert* d'extrems a i b:

$$(a, b) = \{x \mid a < x < b\}.$$

- *Interval tancat* d'extrems a i b:

$$[a, b] = \{x \mid a \le x \le b\}.$$

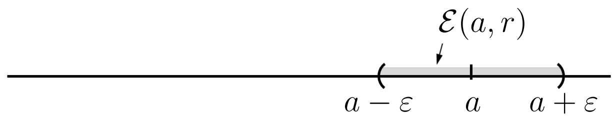
- Similarment es defineixen $[a, b)$ i $(a, b]$. Escriurem també

$$[a, +\infty) = \{x \mid a \le x\}, \quad (-\infty, b] = \{x \mid x \le b\}, \quad (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}.$$

Entorns

- *Entorn* de centre a i radi r ($r > 0$):

$$\mathcal{E}(a,r) = \{x \,|\, d(x,a) < r\} = (a-r, a+r).$$



- *Entorn perforat* de centre a i radi r:

$$\mathcal{E}^*(a,r) = \{x \,|\, 0 < d(x,a) < r\} = (a-r, a) \cup (a, a+r) = \mathcal{E}(a,r) - \{a\}.$$

- *Entorns de la dreta i de l'esquerra*:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}^+(a,r) &= \{x \,|\, d(x,a) < r, x > a\} = (a, a+r), \\ \mathcal{E}^-(a,r) &= \{x \,|\, d(x,a) < r, x < a\} = (a-r, a). \end{aligned}$$

Punts

Sigui $D \subset \mathbb{R}$ i $\overline{D}$ ($= \mathbb{R} - D$) el seu *complementari*,

- *Punt d'acumulació* de D: a és un punt d'acumulació de D si *tots* els entorns de centre a contenen punts de D *diferents* de a (en altres paraules, si tots els entorns perforats de centre a contenen punts de D).

  Una definició equivalent és aquesta: a és un punt d'acumulació de D si és límit d'alguna successió convergent d'elements de D *diferents* de a.

  Atenció! Un punt d'acumulació de D no necessàriament pertany a D.

- *Punt aïllat* de D: a és un punt aïllat de D si $a \in D$ i no és punt d'acumulació de D.

- *Punt interior* a D: a és un punt interior a D si $a \in D$ i existeix *algun* entorn $\mathcal{E}(a,r) \subset D$.

- *Punt exterior* a D: a és un punt exterior a D si és interior a $\overline{D}$, és a dir, si existeix *algun* entorn $\mathcal{E}(a,r) \subset \overline{D}$.

- *Punt frontera* de D: a és un punt frontera de D si no és ni interior ni exterior a D, és a dir, si *tots* els seus entorns contenen punts de D i punts de $\overline{D}$.

Alguns exemples ajudaran a aclarir aquests conceptes:

Exemple 1: considerem els conjunts $A = [0,1]$, $B = (0,1)$ i $C = [0,1)$. En tots tres casos els punts d'acumulació són tots els de l'interval $[0,1]$ i no tenen punts aïllats. Els punts interiors d'aquests tres conjunts són tots els de l'interval $(0,1)$, els exteriors són els del conjunt $(-\infty,0) \cup (1,+\infty)$ i els punts frontera són el 0 i l'1 en tots tres casos.

Exemple 2: sigui $D = (0,2) - \{1\}$, és a dir, l'interval $(0,2)$ sense el punt 1. Els punts d'acumulació de D són tots els de l'interval $[0,2]$. No té punts aïllats. Els punts interiors són els del conjunt $(0,1) \cup (1,2) = D$, els exteriors són els del conjunt $(-\infty,0) \cup (2,+\infty)$ i els punts frontera són el 0, l'1 i el 2.

Exemple 3: el conjunt $E = \{1/n \mid n \in \mathbb{N}\}$ només té un punt d'acumulació, el 0, que no pertany al conjunt. Tots els punts de E són aïllats. No té cap punt interior, els punts exteriors són els de $\mathbb{R} - E$ *diferents de* 0 i els punts frontera són tots els de $E \cup \{0\}$.

Exemple 4: considerem ara el conjunt $F = [0,1] \cap \mathbb{Q}$ dels nombres *racionals* de l'interval $[0,1]$. Tots els seus punts són d'acumulació, però també ho són els nombres irracionals de $[0,1]$. No té punts aïllats ni interiors. Els punts exteriors són els de $(-\infty,0) \cup (1,+\infty)$ i els punts frontera són tots els de l'interval $[0,1]$ (racionals i irracionals).

Conjunts oberts i tancats
Sigui $D \subset \mathbb{R}$,

- *Conjunt obert*: D és un conjunt obert si tots els seus punts són interiors.
- *Conjunt tancat*: D és un conjunt tancat si conté tots els seus punts d'acumulació.

  Una definició equivalent és aquesta: D és un conjunt tancat si conté els límits de totes les seves successions convergents.

Cal notar que els conjunts de nombres reals no es classifiquen en oberts i tancats. En general, no són ni una cosa ni l'altra. D'altra banda, $\mathbb{R}$ és alhora obert i tancat.

Exemple: Dels conjunts dels exemples anteriors únicament B i D són oberts i únicament A és tancat. La resta no són ni oberts ni tancats. El conjunt E no és tancat (ho seria si li afegíssim el 0).

El teorema següent relaciona els conjunts oberts amb els tancats:

TEOREMA: D és obert si i només si $\overline{D}$ és tancat.

DEMOSTRACIÓ: si D és obert, $\overline{D}$ ha de ser tancat, ja que si no ho fos, hi hauria un punt d'acumulació de $\overline{D}$ que no seria de $\overline{D}$ i, per tant, seria de D. Però com que tots els seus entorns contenen punts de $\overline{D}$, no podria ser interior a D. Llavors D no seria obert.

Recíprocament, si $\overline{D}$ és tancat, D ha de ser obert, ja que si no ho fos, hi hauria algun punt de D que no seria interior a D, és a dir, *tots* els seus entorns contindrien punts de $\overline{D}$. Per tant, seria un punt d'acumulació de $\overline{D}$ i hauria de pertànyer a $\overline{D}$, ja que és tancat. $\diamondsuit$

Com que $\mathbb{R}$ és alhora obert i tancat, el seu complementari, $\emptyset$, és també alhora obert i tancat.

Vegem ara alguns teoremes sobre conjunts oberts.

TEOREMA: La unió de conjunts oberts és un conjunt obert.

DEMOSTRACIÓ: si $x \in \bigcup D_i \Rightarrow x \in$ algun $D_i \Rightarrow x$ és interior a aquest D_i (obert) $\Rightarrow x$ és interior a $\bigcup D_i$. $\diamondsuit$

TEOREMA: La intersecció d'un nombre *finit* de conjunts oberts és un conjunt obert.

DEMOSTRACIÓ: si $x \in \bigcap_{i=1}^n D_i \Rightarrow x \in$ tots els $D_i \Rightarrow x$ és interior a tots els D_i (oberts) $\Rightarrow$ per a cada i hi ha algun entorn $\mathcal{E}(x, r_i)$ tal que $\mathcal{E}(x, r_i) \subset D_i \Rightarrow$ el menor d'aquests entorns, $\mathcal{E}(x, r)$ on $r = \min\{r_1, \ldots, r_n\}$, és dins de tots els altres $\Rightarrow \forall i : \mathcal{E}(x, r) \subset D_i \Rightarrow \mathcal{E}(x, r) \subset \bigcap_{i=1}^n D_i \Rightarrow x$ és interior a $\bigcap_{i=1}^n D_i \Rightarrow \bigcap_{i=1}^n D_i$ és obert. $\diamondsuit$

Notem que aquesta última demostració no val quan la intersecció és d'un nombre *infinit* d'oberts, ja que no sempre hi hauria un $r > 0$ menor o igual que tots els infinits r_i, és a dir, l'extrem inferior del conjunt dels r_i podria ser 0.

Hi ha també dos teoremes per a conjunts tancats:

TEOREMA: La intersecció de conjunts tancats és un conjunt tancat.

TEOREMA: La unió d'un nombre *finit* de conjunts tancats és un conjunt tancat.

DEMOSTRACIÓ: són conseqüència dels teoremes anteriors i de les conegudes relacions entre conjunts:

$$\overline{\bigcup D_i} = \bigcap \overline{D_i}\,, \qquad \overline{\bigcap D_i} = \bigcup \overline{D_i}\,. \quad \diamondsuit$$

Conjunts compactes

Sigui $D \subset \mathbb{R}$,

- *Conjunt compacte*: D és un conjunt compacte si tota successió d'elements de D té alguna successió parcial convergent amb límit a D.

El teorema següent ens dona una condició necessària i suficient perquè un conjunt de nombres reals sigui compacte.

TEOREMA: D és compacte si i només si és tancat i fitat.

DEMOSTRACIÓ: sigui D compacte i sigui $\{x_n\} \to \ell$, amb $x_n \in D$. Per demostrar que D és tancat només cal provar que $\ell \in D$. Com que D és compacte, la successió $\{x_n\}$ ha de tenir alguna successió parcial convergent dins D, però com que la pròpia successió $\{x_n\}$ és convergent, totes les seves parcials convergeixen cap al mateix límit ℓ. Per tant, $\ell \in D$, és a dir D és tancat.

D és també fitat, ja que si no ho fos, per a cada $n \in \mathbb{N}$ podríem trobar algun element $y_n \in D$ tal que $|y_n| > n$. Amb tots els y_n tindríem una successió $\{y_n\}$ que no tindria cap successió parcial fitada ni, per tant, convergent i això estaria en contradicció amb el fet que D és compacte.

Recíprocament, si D és tancat i fitat i $\{x_n\}$ és una successió d'elements de D, per demostrar que D és compacte només cal provar que aquesta successió té alguna successió parcial convergent dins D. En efecte, com que D és fitat, la successió $\{x_n\}$ també és fitada i, d'acord amb el teorema de Bolzano - Weierstrass, ha de tenir alguna successió parcial convergent $\{x_{n_i}\} \to \ell$. D'altra banda, en ser D tancat, tenim $\ell \in D$. $\diamondsuit$

EXEMPLE: Els conjunts $A = [1,2]$, $B = [1,2] \cup [4,10]$ o $C = \{1/n \,|\, n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$ són compactes perquè són tancats i fitats. Els conjunts $D = [1,2)$, $E = [1,2] \cup (4,10)$ o $F = \{1/n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ no són compactes perquè no són tancats i els conjunts $G = [3,+\infty)$ o $\{n^2 \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ tampoc ho són perquè no són fitats.

Topologia

Tot i que no hi aprofundirem, introduïm ara el concepte general de *topologia* per contextualitzar els conceptes presentats en aquesta secció.

Si A és un conjunt qualsevol i $\mathcal{C}$ és una col·lecció de subconjunts de A (no necessàriament tots) que compleix les condicions següents:

1) la unió d'elements de $\mathcal{C}$ també és de $\mathcal{C}$,
2) la intersecció d'un nombre finit d'elements de $\mathcal{C}$ també és de $\mathcal{C}$,
3) el conjunt A i el conjunt buit $\emptyset$ són elements de $\mathcal{C}$,

aleshores diem que $\mathcal{C}$ defineix una *topologia sobre* A.

EXEMPLE: el conjunt $\mathcal{C}$ de tots els conjunts oberts de $\mathbb{R}$ compleix les condicions anteriors i, per tant, defineix una topologia sobre $\mathbb{R}$ que anomenem *topologia de la recta real.*

2.8 Alguns teoremes útils per al càlcul de límits

Definim, primer, el concepte de successió que "tendeix a infinit".

Successió amb "límit infinit"

- Diem que $\lim\{a_n\} = +\infty$ si

$$\forall k > 0 \ , \ \exists\, n_0 \in \mathbb{N} \text{ tal que } a_n > k \ , \ \forall n > n_0.$$

- Similarment, $\lim\{a_n\} = -\infty$ si

$$\forall k < 0 \ , \ \exists\, n_0 \in \mathbb{N} \text{ tal que } a_n < k \ , \ \forall n > n_0.$$

Cal assenyalar que una successió amb límit infinit no és convergent. En aquest cas diem que és *divergent.*[3]

Vegem ara alguns resultats útils per al càlcul de límits de successions.

- **Criteri del "sandvitx"**

Si $\{a_n\} \to \ell$, $\{b_n\} \to \ell$, i a partir d'algun subíndex, $a_n \le c_n \le b_n$, aleshores $\lim\{c_n\} = \ell$.

DEMOSTRACIÓ: per a cada $\varepsilon > 0$, a partir d'algun subíndex es compleix $a_n, b_n \in (\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon)$. Per tant, c_n, que està entremig de a_n i b_n, també està dins d'aquest interval. $\diamondsuit$

[3] Sovint es fa servir el terme *divergent* com a sinònim de *no convergent.* Tanmateix, aquí només farem servir el terme *divergent* per a les successions no convergents amb límit $\pm\infty$.

- **Criteri de Stolz**

TEOREMA (CRITERI DE STOLZ): Si $\{b_n\}$ és creixent ($b_{n+1} > b_n$), $\lim\{b_n\} = +\infty$, i $\lim\left\{\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}\right\} = \ell$, aleshores $\lim\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\} = \ell$.

DEMOSTRACIÓ: considerem el cas ℓ finit (el cas $\ell = \pm\infty$ es demostra de manera semblant). Donat $\varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n > n_0$ es compleix

$$\ell - \varepsilon < \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} < \ell + \varepsilon,$$

és a dir,

$$(\ell - \varepsilon)(b_{n+1} - b_n) < a_{n+1} - a_n < (\ell + \varepsilon)(b_{n+1} - b_n).$$

Sigui $m > n_0$. Si sumem les desigualtats anteriors per $n = n_0, n_0{+}1, n_0{+}2, \ldots, m$ i tenim en compte que $\sum_{n=n_0}^{m}(b_{n+1}{-}b_n) = b_{m+1} - b_{n_0}$ i que $\sum_{n=n_0}^{m}(a_{n+1} - a_n) = a_{m+1} - a_{n_0}$, obtenim

$$(\ell - \varepsilon)(b_{m+1} - b_{n_0}) < a_{m+1} - a_{n_0} < (\ell + \varepsilon)(b_{m+1} - b_{n_0}).$$

Si dividim per b_{m+1} i després sumem a_{n_0}/b_{m+1} arribem a

$$(\ell{-}\varepsilon)\left(1 - \frac{b_{n_0}}{b_{m+1}}\right){+}\frac{a_{n_0}}{b_{m+1}} < \frac{a_{m+1}}{b_{m+1}} < (\ell{+}\varepsilon)\left(1 - \frac{b_{n_0}}{b_{m+1}}\right){+}\frac{a_{n_0}}{b_{m+1}}.$$

Com que $\{b_{m+1}\} \to +\infty$, $\exists m_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall m > m_0$ es compleix

$$-\varepsilon < \frac{b_{n_0}}{b_{m+1}} < \varepsilon, \qquad -\varepsilon < \frac{a_{n_0}}{b_{m+1}} < \varepsilon.$$

Llavors tenim

$$\begin{aligned}(\ell - \varepsilon)\Big(1 - \frac{b_{n_0}}{b_{m+1}}\Big) + \frac{a_{n_0}}{b_{m+1}} &> (\ell - \varepsilon)(1 - \varepsilon) - \varepsilon \\ &= \ell - \varepsilon(\ell + 2) + \varepsilon^2 > \ell - \varepsilon(\ell + 2) - \varepsilon^2,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\ell + \varepsilon)\Big(1 - \frac{b_{n_0}}{b_{m+1}}\Big) + \frac{a_{n_0}}{b_{m+1}} &< (\ell + \varepsilon)(1 + \varepsilon) + \varepsilon \\ &= \ell + \varepsilon(\ell + 2) + \varepsilon^2.\end{aligned}$$

Per tant,

$$\ell - \varepsilon(\ell + 2) - \varepsilon^2 < \frac{a_{m+1}}{b_{m+1}} < \ell + \varepsilon(\ell + 2) + \varepsilon^2, \quad \forall m > m_0,$$

és a dir,

$$\lim\left\{\frac{a_{m+1}}{b_{m+1}}\right\} = \ell. \qquad \diamondsuit$$

A partir del criteri de Stolz s'obté el resultat següent:

$$\boxed{\text{Si } c_n > 0,\ \forall n, \text{ i } \lim\{c_{n+1}/c_n\} = \ell, \text{ aleshores } \lim\{\sqrt[n]{c_n}\} = \ell.}$$

DEMOSTRACIÓ: considerem la successió $\left\{\ln \sqrt[n]{c_n}\right\}$. Si usem el criteri de Stolz amb $a_n = \ln c_n$ i $b_n = n$ tenim

$$\begin{aligned}\lim\left\{\ln \sqrt[n]{c_n}\right\} &= \lim\left\{\frac{\ln c_n}{n}\right\} \\ &= \lim\left\{\frac{\ln c_{n+1} - \ln c_n}{(n+1)-n}\right\} = \lim\left\{\ln \frac{c_{n+1}}{c_n}\right\} = \ln \ell,\end{aligned}$$

és a dir,

$$\lim\left\{\sqrt[n]{c_n}\right\} = \lim\left\{\frac{c_{n+1}}{c_n}\right\} = \ell. \quad \diamondsuit$$

Notem que l'existència del primer límit implica l'existència (i coincidència) del segon, però el recíproc no és cert, pot existir el segon i no el primer.

Les igualtats següents són dos casos particulars d'aquest resultat

$$\begin{aligned}\lim\left\{\sqrt[n]{n}\right\} &= \lim\left\{\frac{n+1}{n}\right\} = 1, \\ \lim\left\{\sqrt[n]{a}\right\} &= \lim\left\{\frac{a}{a}\right\} = 1 \qquad (\text{si } a > 0).\end{aligned}$$

- **Criteris de l'arrel i del quocient**

$$\boxed{\text{Si } \lim\{\sqrt[n]{|c_n|}\} < 1, \text{ o } \lim\{|c_{n+1}|/|c_n|\} < 1, \text{ aleshores } \lim\{c_n\} = 0.}$$

DEMOSTRACIÓ: és una conseqüència del fet que si $\lim\left\{\sqrt[n]{|c_n|}\right\}$ o $\lim\left\{|c_{n+1}|/|c_n|\right\}$ existeix i és < 1, la "suma infinita" (sèrie)

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = c_1 + c_2 + c_3 + \cdots$$

és *sumable* (és a dir, la suma total és finita) i, com a conseqüència, la successió de sumands $\{c_n\}$ ha de tenir límit 0 (ho veurem al capítol 7). $\diamondsuit$

2.9 Problemes

P2.1 Demostreu que si $n \in \mathbb{N}$ i no és quadrat perfecte, no existeix cap nombre racional r tal que $r^2 = n$. Suggeriment: vegeu la demostració del cas $n = 2$.

P2.2 Trobeu $\lim\{a_n\}$, on

(a) $a_n = \sum_{k=0}^{n} r^k = 1 + r + r^2 + \cdots + r^n$
Suggeriment: abans demostreu que $a_n = (1 - r^{n+1})/(1 - r)$.

(b) $a_n = (3^{n+1} - 5^{n+1})/(3^n + 5^n)$

(c) $a_n = \sqrt{n^2 + n + 1} - n$

P2.3 Considereu la successió $\{a_n\}$, on $a_n = \frac{n+1}{(-1)^n n}$. Trobeu una successió parcial convergent cap a 1 i una altra convergent cap a -1.

P2.4 Considereu la successió $\{a_n\}$, on $a_1 = 1, a_{n+1} = \sqrt{1 + a_n}$. Demostreu que és creixent i fitada superiorment, i trobeu el valor del seu límit.

P2.5 Per definició tenim $e \overset{\text{def}}{=} \lim\left\{(1 + \frac{1}{n})^n\right\}$. Demostreu que si $\{a_n\} \to +\infty$, aleshores

$$\lim\left\{\left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{a_n}\right\} = e.$$

Suggeriment: per a cada n hi ha un $m_n \in \mathbb{N}$ tal que $m_n \leq a_n < m_n + 1$.

P2.6 Feu servir el resultat anterior per trobar els límits següents:

(a) $\lim\left\{\left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^n\right\}$ Suggeriment: $1 - \dfrac{1}{n} = \left(1 + \dfrac{1}{n-1}\right)^{-1}$.

(b) $\lim\left\{\left(\dfrac{n^2+1}{n-1} - n\right)^n\right\}$

P2.7 Feu servir el criteri del "sandvitx" per trobar els límits següents:

(a) $\lim\left\{\dfrac{\sin(\ln n)}{n^2}\right\}$

(b) $\lim\left\{\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right\}$

P2.8 Feu servir el criteri de Stolz per trobar els límits següents:

(a) $\lim\left\{\dfrac{1 + 3 + 3^2 + \cdots + 3^{n-1}}{3^n}\right\}$

(b) $\lim \left\{ \dfrac{1 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3}{n^4} \right\}$

P2.9 Feu servir el criteri del quocient per trobar els límits següents:

(a) $\lim \left\{ \dfrac{2^n}{n!} \right\}$ (b) $\lim \left\{ \dfrac{n!}{n^n} \right\}$ (c) $\lim \left\{ \dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n} \right\}$

P2.10 Considereu el conjunt $A = (-1, 0] \cup \left\{ x \,\middle|\, x = \dfrac{(-1)^n}{n}, n = 1, 2, \ldots \right\}$.

(a) Trobeu els punts interiors, els punts frontera i els punts d'acumulació de A.

(b) Determineu si A és obert, tancat o compacte.

Solucions

S2.1 Suposem que hi ha un racional d'expressió irreductible p/q que compleix $(p/q)^2 = n \Rightarrow p^2 = nq^2 = \dot{n}$ (múltiple de n) $\Rightarrow p = \dot{n}$, ja que si no ho fos, p^2 tampoc ho seria (si $p \neq \dot{n} \Rightarrow p = \dot{n} + k$, on $k = 1, 2, \ldots (n-1)$ i, per tant, $p^2 = (\dot{n} + k)^2 = \dot{n} + k^2 \neq \dot{n}$, ja que k^2 no és divisible per n). Així doncs, $p^2 = (\dot{n})^2$. D'altra banda, $q^2 = p^2/n = (\dot{n})^2/n = \dot{n}$ i, per tant, també $q = \dot{n}$. Com que tant p com q són múltiples de n, p/q és reductible, en contradicció amb la hipòtesi. Així doncs, $\sqrt{n}$ no és racional.

S2.2 (a) $a_n = 1 + r + r^2 + \cdots + r^n \Rightarrow ra_n = r + r^2 + r^3 + \cdots + r^{n+1}$. Si $r \neq 1$, restem i obtenim $a_n(1-r) = 1-r^{n+1}$, és a dir, $a_n = (1-r^{n+1})/(1-r)$. Si $r = 1$ tenim $a_n = n + 1$. Per tant,

$$\lim\{a_n\} = \begin{cases} 1/(1-r) & \text{si } -1 < r < 1, \\ +\infty & \text{si } r \geq 1, \\ \text{no convergent} & \text{si } r \leq -1. \end{cases}$$

(b) $\lim\{a_n\} = \lim \left\{ \dfrac{3^{n+1} - 5^{n+1}}{3^n + 5^n} \right\} = \lim \left\{ \dfrac{5^{n+1}[(3/5)^{n+1} - 1]}{5^n[(3/5)^n + 1]} \right\} = -5$, ja que $(3/5)^n \to 0$.

(c) Si multipliquem i dividim a_n per $\sqrt{n^2 + n + 1} + n$ obtenim

$$\lim\{a_n\} = \lim \left\{ \frac{n+1}{\sqrt{n^2 + n + 1} + n} \right\} = \lim \left\{ \frac{1 + \frac{1}{n}}{\sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} + 1} \right\} = \frac{1}{2}.$$

S2.3 Notem que
$$\frac{n+1}{(-1)^n n} = (-1)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right).$$
Veiem, doncs, que els termes de la successió amb subíndex parell convergeixen cap a 1, mentre que els de subíndex senar ho fan cap a -1, és a dir,
$$\lim\{a_{2n}\} = 1, \quad \lim\{a_{2n-1}\} = -1.$$

S2.4 Demostrem per inducció que és creixent, és a dir, $a_{n+1} \geq a_n$. Com que $a_1 = 1$ i $a_2 = \sqrt{2}$, el cas $n = 1$ es compleix. Suposem que $a_n \geq a_{n-1}$, aleshores $a_{n+1} = \sqrt{1 + a_n} \geq \sqrt{1 + a_{n-1}} = a_n$. Per tant, $\{a_n\}$ és creixent.

Per veure que és fitada superiorment ens cal un "candidat" a fita superior. Per trobar-lo suposem que $\lim\{a_n\}$ existeix (això encara no ho sabem). Si $\lim\{a_n\} = \ell$ i fem el límit de l'expressió generadora $a_{n+1} = \sqrt{1 + a_n}$ arribem a $\ell = \sqrt{1 + \ell}$, d'on obtenim $\ell = (1 + \sqrt{5})/2$ (l'altra solució, $\ell = (1 - \sqrt{5})/2 < 0$, és descartable en aquest cas). Així doncs, si la successió és fitada (cosa que encara no hem demostrat), com que és creixent, també haurà de ser convergent i les fites superiors hauran de ser $\geq \ell$. Prenem, per exemple, 3 ($> \ell$) com a "candidat" a fita superior i demostrem (per inducció) que, efectivament, ho és. D'una banda, tenim $a_1 = 1 < 3$. Suposem que $a_n < 3$ i demostrem que $a_{n+1} < 3$. Això equival a demostrar que $a_{n+1}^2 < 9$, la qual cosa és evident, ja que $a_{n+1}^2 = 1 + a_n < 1 + 3 < 9$. La successió és, per tant, fitada superiorment.

En ser creixent i fitada superiorment, ja podem assegurar que és convergent i que el seu límit és ℓ. Així doncs, $\lim\{a_n\} = (1 + \sqrt{5})/2$.

S2.5 Per a cada a_n existeix $m_n \in \mathbb{N}$ tal que $m_n \leq a_n < m_n + 1 \Rightarrow \frac{1}{m_n+1} < \frac{1}{a_n} \leq \frac{1}{m_n} \Rightarrow 1 + \frac{1}{m_n+1} < 1 + \frac{1}{a_n} \leq 1 + \frac{1}{m_n}$, i, per tant,
$$\left(1 + \frac{1}{m_n + 1}\right)^{m_n} < \left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{a_n} < \left(1 + \frac{1}{m_n}\right)^{m_n+1}.$$
El límit del terme de l'esquerra és
$$\lim \left(1 + \frac{1}{m_n + 1}\right)^{m_n} = \lim \left(1 + \frac{1}{m_n + 1}\right)^{m_n+1} \left(1 + \frac{1}{m_n + 1}\right)^{-1} = e,$$
i el del terme de la dreta,
$$\lim \left(1 + \frac{1}{m_n}\right)^{m_n+1} = \lim \left(1 + \frac{1}{m_n}\right)^{m_n} \left(1 + \frac{1}{m_n}\right) = e.$$

Per tant,

$$\lim\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n}=e.$$

D'això deduïm que si $\{b_n\}\to 0$, amb $b_n>0$, aleshores $\lim(1+b_n)^{1/b_n}=e$, ja que si fem $a_n=1/b_n$ estem en el cas anterior.

S2.6 (a) $\lim\left\{\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^n\right\}=\lim\left\{\left(1+\dfrac{1}{n-1}\right)^{-n}\right\}=\dfrac{1}{\lim\left\{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1+1}\right\}}$

$$=\frac{1}{\lim\left\{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)\right\}}=\frac{1}{e\cdot 1}=e^{-1}.$$

(b) Si fem la divisió tenim $\dfrac{n^2+1}{n-1}=n+1+\dfrac{2}{n-1}$. Per tant,

$$\lim\left\{\left(\frac{n^2+1}{n-1}-n\right)^n\right\}=\lim\left\{\left(1+\frac{2}{n-1}\right)^{n\left[\frac{n-1}{2}\frac{2}{n-1}\right]}\right\}$$

$$=\lim\left\{\left[\left(1+\frac{2}{n-1}\right)^{\frac{n-1}{2}}\right]^{\frac{2n}{n-1}}\right\}=e^2.$$

S2.7 (a) Com que $-1\le\sin(\ln n)\le 1$, tenim $-1/n^2\le\sin(\ln n)/n^2\le 1/n^2$. D'altra banda, $\{\pm 1/n^2\}\to 0$. Per tant, $\lim\{\sin(\ln n)/n^2\}=0$.

(b) D'una banda, tenim

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}<\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}<\frac{n}{\sqrt{n^2+1}},$$

i de l'altra, tant $\{n/\sqrt{n^2+n}\}$ com $\{n/\sqrt{n^2+1}\}$ tenen límit 1. Per tant,

$$\lim\left\{\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right\}=1.$$

S2.8 (a) Si $a_n=1+3+3^2+\cdots+3^{n-1}$ i $b_n=3^n$ (que és creixent i amb límit $+\infty$), calculem

$$\lim\left\{\frac{a_n-a_{n-1}}{b_n-b_{n-1}}\right\}=\lim\left\{\frac{3^{n-1}}{3^n-3^{n-1}}\right\}=\frac{1}{3-1}=\frac{1}{2}.$$

Per tant,

$$\lim\left\{\frac{1+3+3^2+\cdots+3^{n-1}}{3^n}\right\}=\frac{1}{2}.$$

(b) Similarment, si $a_n = 1 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3$ i $b_n = n^4$ calculem

$$\begin{aligned}\lim\left\{\frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}}\right\} &= \lim\left\{\frac{n^3}{n^4 - (n-1)^4}\right\}\\ &= \lim\left\{\frac{n^3}{4n^3 - 6n^2 + 4n - 1}\right\} = \frac{1}{4}\,.\end{aligned}$$

Per tant,

$$\lim\left\{\frac{1 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3}{n^4}\right\} = \frac{1}{4}\,.$$

S2.9 (a) Tenim $a_n = 2^n/n!$ i, per tant,

$$\lim\left\{\frac{a_n}{a_{n-1}}\right\} = \lim\left\{\frac{2^n/n!}{2^{n-1}/(n-1)!}\right\} = \lim\left\{\frac{2}{n}\right\} = 0 < 1,$$

d'on deduïm que $\lim\{2^n/n!\} = 0$.

(b) Tenim $a_n = n!/n^n$ i, per tant,

$$\begin{aligned}\lim\left\{\frac{a_n}{a_{n-1}}\right\} &= \lim\left\{\frac{n!/n^n}{(n-1)!/(n-1)^{n-1}}\right\} = \lim\left\{\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n-1}\right\}\\ &= \lim\left\{\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n}\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-1}\right\} = 1/e < 1,\end{aligned}$$

d'on deduïm que $\lim\{n!/n^n\} = 0$.

(c) Notem que $\lim\left\{\sqrt[n]{n!}/n\right\} = \lim\left\{\sqrt[n]{a_n}\right\}$, on $a_n = n!/n^n$. D'altra banda, si $\lim\{a_n/a_{n-1}\}$ existeix, aleshores $\lim\left\{\sqrt[n]{a_n}\right\}$ també existeix i ambdós límits coicideixen. A l'apartat (b) hem trobat $\lim\{a_n/a_{n-1}\} = 1/e$, d'on deduïm que $\lim\left\{\sqrt[n]{n!}/n\right\} = 1/e$.

S2.10 Podem reexpressar A així: $A = [-1, 0] \cup \left\{x \,\middle|\, x = \dfrac{1}{2n}\,, n = 1, 2, \ldots\right\}$.

(a) Punts interiors: tots els de $(-1, 0)$, que inclou $(-1)^n/n$ amb n senar.
Punts frontera: $1, 0$ i $1/(2n)$, amb $n = 1, 2, 3, \ldots$
Punts d'acumulació: tots els de $[-1, 0]$.

(b) A no és obert perquè no tots els seus punts són interiors. És tancat perquè conté tots els seus punts d'acumulació i és compacte perquè és tancat i fitat.

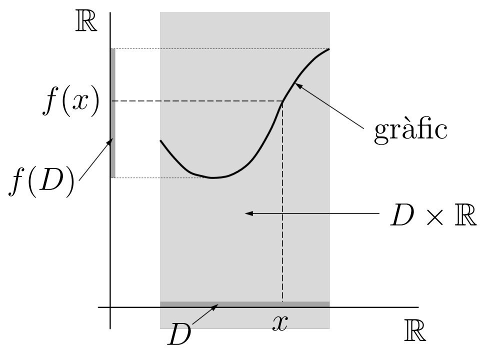
3 FUNCIONS D'UNA VARIABLE REAL

3.1 Funcions d'una variable real

Una funció real d'una variable real és una aplicació d'un conjunt D de nombres reals, sobre $\mathbb{R}$:

$$\begin{array}{ccll} D & \xrightarrow{f} & \mathbb{R} & \\ x & \longrightarrow & f(x) & = \text{imatge de } x \text{ per } f \text{ (o valor de } f \text{ a } x). \end{array}$$

S'anomena *domini de la funció* f al conjunt D on està definida. El conjunt de valors de f (imatges de tots els elements de D) s'anomena *imatge de* f i es representa per $f(D)$. El conjunt $\{(x, f(x)) \mid x \in D\}$ és el *gràfic* de la funció i és, òbviament, un subconjunt de $D \times \mathbb{R}$.

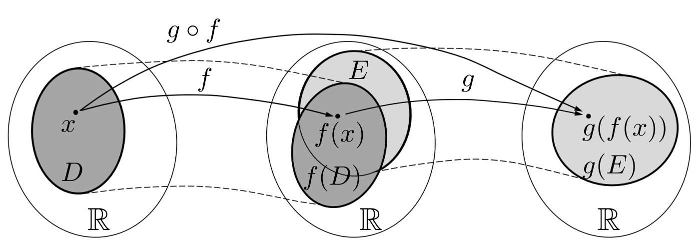


Suma i producte de funcions: Siguin f i g dues funcions definides als dominis D i E, respectivament. Definim

$$\begin{aligned} (f+g)(x) &\stackrel{\text{def}}{=} f(x)+g(x), \quad \forall x \in D \cap E, \\ (f \cdot g)(x) &\stackrel{\text{def}}{=} f(x) \cdot g(x), \quad \forall x \in D \cap E. \end{aligned}$$

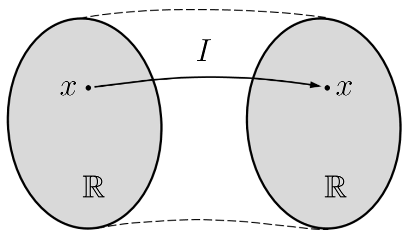
Composició de funcions: Siguin f i g dues funcions definides als dominis D i E, respectivament. Definim

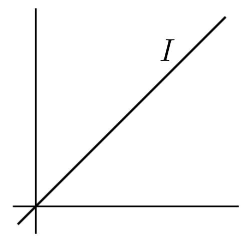
$$(g \circ f)(x) \stackrel{\text{def}}{=} g\big(f(x)\big), \quad \forall x \text{ tal que } f(x) \in E.$$



Funció identitat: Definim la funció *identitat*, I, com

$$I(x) \stackrel{\text{def}}{=} x, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

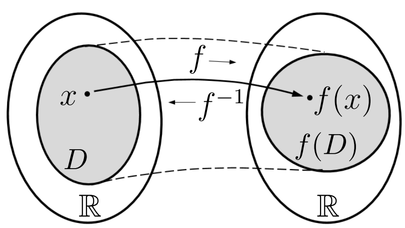


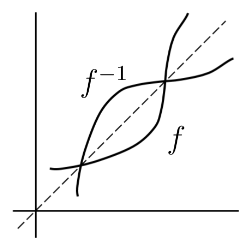


Funció inversa d'una altra: Definim la *funció inversa de la funció f* com la funció f^{-1} que compleix $f^{-1} \circ f = f \circ f^{-1} = I$, és a dir,[1]

$$f^{-1}\big(f(x)\big) = f\big(f^{-1}(x)\big) = x.$$

L'existència de f^{-1} està garantida si i només si f és *injectiva*, ja que si no ho fos, f^{-1} no seria aplicació. Si el domini de f és D, el de f^{-1}, si existeix, és $f(D)$ i tant f com f^{-1} són aplicacions *bijectives* entre D i $f(D)$.





EXEMPLE: La funció $f(x) = x^3$ és injectiva a tot $\mathbb{R}$ i és, per tant, invertible. La seva inversa és la funció $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$. En canvi, la funció $g(x) = x^2$ no és injectiva ni invertible a tot $\mathbb{R}$. Sí que és injectiva (i invertible) a $[0, +\infty)$, on la seva inversa és $g^{-1}(x) = +\sqrt{x}$ i també ho és a $(-\infty, 0]$, on la seva inversa és $g^{-1}(x) = -\sqrt{x}$.

Una funció és, per definició, univaluada. Quan parlem de la "funció" $\sqrt{x}$, que pren dos valors $\pm\sqrt{x}$ al punt x, estem parlant de *dues* funcions, les inverses de x^2 en els diferents dominis d'injectivitat.

[1] Cal no confondre f^{-1} amb $1/f$. Per exemple, si $f(x) = \ln(x)$, la inversa és $f^{-1}(x) = e^x$ (ja que $e^{\ln x} = \ln(e^x) = x$), mentre que $1/f(x) = 1/\ln x$.

Funcions elementals

Fem una breu descripció de les funcions elementals:[2]

- *Polinomis i funcions racionals*: els polinomis són les funcions del tipus $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$, on $a_k \in \mathbb{R}$. S'anomenen funcions racionals les funcions de la forma $f(x) = P(x)/Q(x)$, on $P(x)$ i $Q(x)$ són polinomis.

- *Potències*: són de la forma $f(x) = x^a$, on $a \in \mathbb{R}$ (vegeu pàgina 36). En general, només estan definides per a $x > 0$. També estan definides per a $x < 0$ si $a \in \mathbb{Z}$ o si a és un nombre racional d'expressió irreductible p/q amb q senar. Es compleix la propietat $(x \cdot y)^a = x^a \cdot y^a$. Si $\mathbb{R}^+$ és el conjunt dels nombres reals *positius*, aquesta propietat expressa el fet que f és un homomorfisme[3] dins del grup multiplicatiu $(\mathbb{R}^+, \cdot\,)$

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{R}^+, \cdot\,) & \xrightarrow{f} & (\mathbb{R}^+, \cdot\,) \\ x & \longrightarrow & x^a \\ y & \longrightarrow & y^a \\ x \cdot y & \longrightarrow & (x \cdot y)^a = x^a \cdot y^a. \end{array}$$

- *Exponencials i logaritmes*: la funció *exponencial* de base a és $f(x) = a^x$ on $a > 0$. Es compleix $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$ i és, per tant, un homomorfisme del grup additiu $(\mathbb{R}, +)$ al grup multiplicatiu $(\mathbb{R}^+, \cdot\,)$

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{R}, +) & \xrightarrow{f} & (\mathbb{R}^+, \cdot\,) \\ x & \longrightarrow & a^x \\ y & \longrightarrow & a^y \\ x + y & \longrightarrow & a^{x+y} = a^x \cdot a^y. \end{array}$$

  En el cas particular $a = e$ la funció s'anomena simplement *exponencial* i s'expressa $f(x) = e^x = \exp(x)$.

  Si $a \neq 1$ la funció exponencial és injectiva ($x \neq y \Rightarrow a^x \neq a^y$) i, per tant, invertible. La funció *logaritme* de base a, $f(x) = \log_a x$, és la funció inversa de l'exponencial de base a, és a dir, $y = \log_a x$ si $x = a^y$. És, per tant, un homomorfisme del grup multiplicatiu $(\mathbb{R}^+, \cdot\,)$ al grup additiu $(\mathbb{R}, +)$

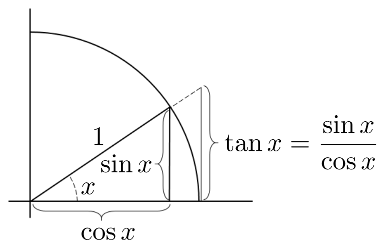
$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{R}^+, \cdot\,) & \xrightarrow{f} & (\mathbb{R}, +) \\ x & \longrightarrow & \log_a x \\ y & \longrightarrow & \log_a y \\ x \cdot y & \longrightarrow & \log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y. \end{array}$$

[2] Per a més detalls, vegeu el capítol III de J. M. Ortega, *Introducció a l'anàlisi matemàtica, op. cit.*

[3] Una aplicació f entre dues estructures $(A, *)$ i $(B, \diamond)$ és un *homomorfisme* (o *morfisme*) si $f(x * y) = f(x) \diamond f(y)$, és a dir, si "operar i transformar" equival a "transformar i operar".

Quan $a = e$ la funció s'anomena logaritme *natural* (o *neperià*) i s'expressa $f(x) = \log x = \ln x$.

- *Funcions trigonomètriques*: la figura següent mostra la definició geomètrica[4] d'aquestes funcions:



Tenim també: $\sec(x) = 1/\cos x$, $\csc(x) = 1/\sin x$, $\cot(x) = 1/\tan x$.

Totes les funcions trigonomètriques són periòdiques de període 2π, és a dir, compleixen $f(x) = f(x + 2\pi)$ i, per tant, no són injectives. Sí que ho són si les restringim a intervals d'injectivitat: $[(n - \frac{1}{2})\pi, (n + \frac{1}{2})\pi]$ en el cas de $\sin x$ i de $\tan x$, i $[n\pi, (n + 1)\pi]$ en el cas de $\cos x$ $(n \in \mathbb{Z})$. En aquests intervals d'injectivitat les funcions $\sin x$, $\cos x$ i $\tan x$ tenen, respectivament, les inverses $\arcsin x$, $\arccos x$ i $\arctan x$.

- *Funcions hiperbòliques*: per definició tenim

$$\sinh x \stackrel{\text{def}}{=} \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh x \stackrel{\text{def}}{=} \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \tanh x \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

Les seves inverses es poden calcular. Per exemple, si $y = \sinh^{-1} x \Rightarrow x = \sinh y = (e^y - e^{-y})/2 \Rightarrow e^y - 2x - e^{-y} = 0 \Rightarrow (e^y)^2 - 2x(e^y) - 1 = 0 \Rightarrow e^y = x \pm \sqrt{x^2 + 1}$, d'on deduïm

$$y = \sinh^{-1} x = \ln\left(x \pm \sqrt{x^2 + 1}\right).$$

De manera similar trobem

$$\cosh^{-1} x = \ln\left(x \pm \sqrt{x^2 - 1}\right), \quad \tanh^{-1} x = \ln\left(\frac{1 + x}{1 - x}\right).$$

Si fem servir nombres complexos (vegeu l'apèndix A) les funcions trigonomètriques i les hiperbòliques estan relacionades:

$$\begin{aligned} \cos x &= \cosh(ix), & \cosh x &= \cos(ix), \\ i \sin x &= \sinh(ix), & i \sinh x &= \sin(ix), \\ i \tan x &= \tanh(ix), & i \tanh x &= \tan(ix). \end{aligned}$$

[4]Al capítol 8 veurem una definició analítica d'aquestes funcions, en forma de "sumes infinites": $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots$, $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots$

3.2 Límit d'una funció

Sigui f definida a D i sigui a un punt d'acumulació de D (no cal que $a \in D$):

DEFINICIÓ 1: Diem que $\lim_{x\to a} f(x) = \ell$ si per a *qualsevol* successió $\{x_n\} \to a$, amb $x_n \in D$ i $x_n \neq a$, es compleix que $\{f(x_n)\} \to \ell$.

DEFINICIÓ 2: Diem que $\lim_{x\to a} f(x) = \ell$ si $\forall \varepsilon > 0$, $\exists\, \delta > 0$, tal que

$$\text{si } 0 < d(x, a) < \delta, \text{ aleshores } d(f(x), \ell) < \varepsilon$$

o, equivalentment,

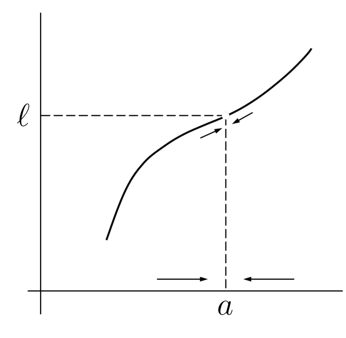
$$\text{si } x \in \mathcal{E}^*(a, \delta) \cap D, \text{ aleshores } f(x) \in \mathcal{E}(\ell, \varepsilon).$$

Les dues definicions són equivalents.

DEMOSTRACIÓ: si es compleix la definició 1 també s'ha de complir la definició 2, ja que, en cas contrari, hi hauria algun ε per al qual no existiria cap δ que complís la condició de la definició 2. Això permetria, per a cada $n \in \mathbb{N}$, trobar algun punt x_n tal que $d(x_n, a) < 1/n$ però $d(f(x_n), \ell) \geq \varepsilon$ i ens trobaríem, per tant, que $\{x_n\} \to a$ però $\{f(x_n)\} \not\to \ell$, en contradicció amb la definició 1.

Recíprocament, si es compleix la definició 2 i $\{x_n\} \to a$, a partir d'algun subíndex tindrem $d(x_n, a) < \delta$ i, per tant, a partir d'aquest mateix subíndex tindrem $d(f(x_n), \ell) < \varepsilon$, és a dir, $\{f(x_n)\} \to \ell$, complint-se la definició 1. $\diamondsuit$

Notem que no s'ha fet esment de $f(a)$. De fet, ni tan sols cal que f estigui definida al punt a. Sí que cal, però, que a sigui un punt d'acumulació de D per poder parlar de successions (d'elements de D) *convergents* cap al punt a. L'existència o no de $\lim_{x\to a} f(x)$ i el seu valor (si existeix) no depenen del comportament de la funció f en el punt a, sinó *al voltant* del punt a.



Propietats dels límits de funcions:

- El límit d'una funció és *únic*.

  Demostració: és una conseqüència de la definició 1 i de la propietat anàloga de les successions convergents. $\diamondsuit$

- Si existeix $\lim_{x\to a} f(x) \Rightarrow f$ és *fitada* en *algun* entorn de a.

  Demostració: donat $\varepsilon > 0$, $\exists\,\delta$ tal que si $x \in \mathcal{E}^*(a,\delta) \cap D$, aleshores $d(f(x),\ell) < \varepsilon$ i per tant,

  $$\ell - \varepsilon < f(x) < \ell + \varepsilon,\ \forall x \in \mathcal{E}^*(a,\delta) \cap D. \quad \diamondsuit$$

- Si $\lim_{x\to a} f_1(x) = \ell_1$ i $\lim_{x\to a} f_2(x) = \ell_2$, aleshores

  1) $\lim_{x\to a} \big(f_1(x) \pm f_2(x)\big) = \ell_1 \pm \ell_2$.
  2) $\lim_{x\to a} \big(f_1(x) \cdot f_2(x)\big) = \ell_1 \cdot \ell_2$.
  3) $\lim_{x\to a} \big(f_1(x)/f_2(x)\big) = \ell_1/\ell_2$, sempre que $f_2(x)$ i ℓ_2 no s'anul·lin en algun entorn de a.
  4) Si $f_1(x) \le f_2(x)$ en algun entorn de $a \Rightarrow \ell_1 \le \ell_2$.

  Demostració: aquestes propietats són conseqüència de la definició 1 i de les propietats anàlogues de les successions convergents. $\diamondsuit$

Condició de Cauchy per a l'existència de límit d'una funció
Hem vist que una successió de nombres reals té límit si i només si és de Cauchy. El següent teorema estableix una condició similar per a l'existència de límit d'una funció.

Teorema: $\lim_{x\to a} f(x)$ existeix si i només si $\forall\varepsilon > 0, \exists\,\delta > 0$, tal que $\lvert f(x) - f(x')\rvert < \varepsilon$, si $x, x' \in \mathcal{E}^*(a,\delta)$.

Demostració: donat $\varepsilon > 0$, d'acord amb la definició 2, hi ha algun δ per al qual si $x \in \mathcal{E}^*(a,\delta)$, aleshores $f(x) \in \mathcal{E}(\ell, \varepsilon/2)$. Per tant, donats dos punts $x, x' \in \mathcal{E}^*(a,\delta)$, els corresponents valors de la funció, $f(x)$ i $f(x')$, seran dins l'entorn $\mathcal{E}(\ell,\varepsilon/2)$ i la distància entre ells serà $< \varepsilon$, és a dir, $\lvert f(x) - f(x')\rvert < \varepsilon$.

Recíprocament, suposem que es compleix la darrera condició. Si $\{a_n\} \to a$, a partir d'algun terme aquesta successió estarà dins de $\mathcal{E}^*(a,\delta)$ i els corresponents valors de f compliran $\lvert f(a_m) - f(a_n)\rvert < \varepsilon$, és a dir, la successió $\{f(a_n)\}$ és de Cauchy i, per tant, convergent.

Tenim, doncs, que per a totes les successions convergents cap a a, les corresponents successions de valors de f són també totes convergents. Només cal veure que totes tenen el mateix límit. En efecte, si $\{a_n\} \to a$ i $\{a'_n\} \to a$ tindrem també que $\{a_1, a'_1, a_2, a'_2, \ldots\} \to a$ i, per tant, $\{f(a_1), f(a'_1), f(a_2), f(a'_2), \ldots\}$ és convergent. Llavors $\{f(a_n)\}$ i $\{f(a'_n)\}$ han de tenir el mateix límit, ja que són successions parcials de l'anterior, que és convergent. $\diamondsuit$

3.3 Límit infinit i límit quan $x \to \pm\infty$

Podem donar sentit a les expressions

$$\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty, \qquad \lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \ell,$$

si fem servir la definició 1 i recordem el significat (vegeu pàgina 47) de les expressions $\{f(x_n)\} \to \pm\infty$ i $\{x_n\} \to \pm\infty$.

També ho podem fer amb la definició 2 si abans definim els entorns de $\pm\infty$.

Entorn de $+\infty$ *associat a* k: $\mathcal{E}(+\infty, k) \stackrel{\text{def}}{=} \{x \,|\, x > k\} = (k, +\infty)$.

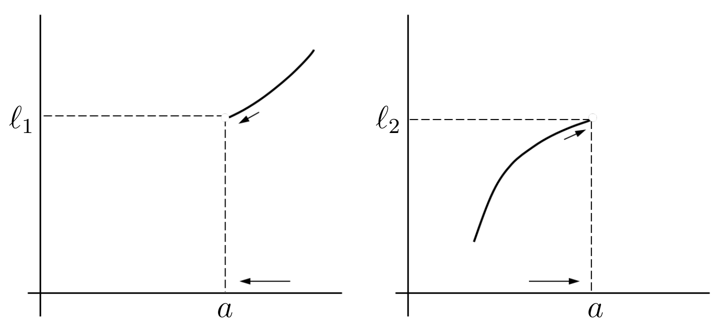
Entorn de $-\infty$ *associat a* k: $\mathcal{E}(-\infty, k) \stackrel{\text{def}}{=} \{x \,|\, x < k\} = (-\infty, k)$.

3.4 Límits per la dreta i per l'esquerra

Els límits *per la dreta* i *per l'esquerra* de la funció f quan $x \to a$ es defineixen com abans, però restringint les successions $\{x_n\} \to a$ amb la condició $x_n > a$ $(\forall n)$ i $x_n < a$ $(\forall n)$, respectivament. Si anomenem aquests límits ℓ_1 i ℓ_2, ho expressem:

$$\ell_1 = \lim_{x\to a^+} f(x), \quad \ell_2 = \lim_{x\to a^-} f(x).$$

També podem fer servir la definició 2 si substituïm l'entorn perforat $\mathcal{E}^*(a, \delta)$ pels entorns de la dreta $\mathcal{E}^+(a, \delta)$ i de l'esquerra $\mathcal{E}^-(a, \delta)$, respectivament (vegeu pàgina 43).



Una funció pot no tenir cap d'aquests dos límits o només tenir-ne un, i si els té tots dos, poden coincidir o no. El teorema següent relaciona l'existència del límit d'una funció amb la dels límits per la dreta i per l'esquerra.

TEOREMA: $\lim_{x\to a} f(x) = \ell$ si i només si $\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = \ell$.

DEMOSTRACIÓ: en efecte, si $\lim_{x\to a} f(x) = \ell$ tindrem $\{f(x_n)\} \to \ell$ sempre que $\{x_n\} \to a$. En particular, això succeirà quan $x_n > a$ $(\forall n)$ i també quan $x_n < a$ $(\forall n)$.

Recíprocament, si $\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = \ell$, tindrem que $\forall\varepsilon > 0$ hi haurà un δ_1 i un δ_2 tals que

$$\begin{aligned} f(x) &\in \mathcal{E}(\ell,\varepsilon) \quad \text{si} \quad x \in \mathcal{E}^+(a,\delta_1) \cap D, \\ f(x) &\in \mathcal{E}(\ell,\varepsilon) \quad \text{si} \quad x \in \mathcal{E}^-(a,\delta_2) \cap D. \end{aligned}$$

Per tant, es complirà la definició 2 si prenem $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, ja que $\mathcal{E}^*(a,\delta) \subset \mathcal{E}^+(a,\delta_1) \cup \mathcal{E}^-(a,\delta_2)$. $\diamondsuit$

3.5 Funcions contínues

Si f està definida en el punt a (és a dir, $a \in D$) la comparació del seu valor en aquest punt, $f(a)$, amb $\lim_{x\to a} f(x)$ ens porta al concepte de *continuïtat*.

DEFINICIÓ: si $a \in D$ i a és un punt d'acumulació[5] de D, diem que la funció f és *contínua* al punt a si $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

La definició anterior també es pot formular en termes de successions,

DEFINICIÓ: f és contínua al punt $a \in D$ si sempre que $\{x_n\} \to a$, amb $x_n \in D$, tenim $\{f(x_n)\} \to f(a)$,

i, també, en termes d'entorns,

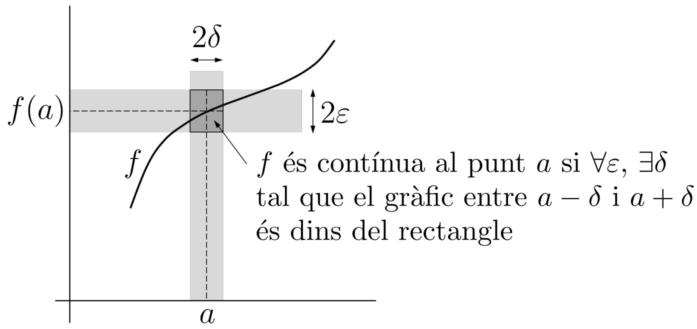
DEFINICIÓ: f és contínua al punt $a \in D$ si $\forall\varepsilon > 0$, $\exists\,\delta > 0$, tal que

$$d(f(x), f(a)) < \varepsilon \;\text{ si } d(x,a) < \delta,$$

o, equivalentment,

$$f(x) \in \mathcal{E}\left(f(a),\varepsilon\right) \;\text{ si } x \in \mathcal{E}(a,\delta).$$

[5] Si a no és punt d'acumulació de D diem sempre, per definició, que f és contínua en aquest punt.



Notem que ara no cal demanar que $x_n \neq a$ ni cal utilitzar l'entorn *perforat* de centre a, ja que f està definida en aquest punt. La continuïtat de f en el punt a també es pot expressar

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(\lim_{x\to a} x).$$

Les funcions contínues són, doncs, les que "commuten" amb el "pas al límit", és a dir, les que compleixen que "el límit de la funció és la funció del límit". Això justifica que, per definició, f sigui contínua en els punts aïllats de D.

Si $A \subset D$, diem que f és contínua a A si ho és en tots els seus punts.

Propietats de les funcions contínues:

- Si f és contínua al punt a, aleshores f és fitada en algun entorn de a.
- Si f_1 i f_2 són contínues al punt a llavors:
  1) $f_1 \pm f_2$ és contínua al punt a.
  2) $f_1 \cdot f_2$ és contínua al punt a.
  3) f_1/f_2 és contínua al punt a (si $f_2(a) \neq 0$).
- Si f és contínua al punt a i g és contínua al punt $f(a)$, aleshores $g \circ f$ és contínua al punt a.

Exemples:

1) Polinomis i funcions racionals: com que les funcions $f(x) = K$ (constant) i $f(x) = x$ són trivialment contínues, les propietats anteriors ens asseguren que $kx, x^n, 1/x^n$, els polinomis i les funcions racionals (en els punts on el denominador no s'anul·la) també són funcions contínues.

2) Funcions exponencials i funcions hiperbòliques: $f(x) = a^x$ és, per definició, contínua, ja que $a^x \stackrel{\text{def}}{=} \lim\{a^{x_n}\}$ on $\{x_n\}$ és qualsevol successió convergent cap a x (és a dir, $a^{x_n} \to a^x$ quan $x_n \to x$). En particular, e^x i e^{-x} són contínues a tot $\mathbb{R}$ i, per tant, també ho són les funcions hiperbòliques.
3) Funcions trigonomètriques: $f(x) = \sin x$ és contínua a tot $\mathbb{R}$, ja que

$$|\sin x - \sin x_0| = \left| 2\cos\left(\frac{x+x_0}{2}\right)\sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right)\right| \leq |x - x_0|,$$

i, per tant, $\sin x$ s'acosta a $\sin x_0$ quan x s'acosta a x_0, $\forall x_0 \in \mathbb{R}$. De manera semblant es demostra la continuïtat de $f(x) = \cos x$.

Discontinuïtats

Els punts on f no és contínua s'anomenen *punts de discontinuïtat* o simplement *discontinuïtats* de la funció f. Això passa quan $\lim_{x\to a} f(x)$ existeix però no coincideix amb $f(a)$ o quan el límit no existeix o és infinit. Així doncs, classificarem les discontinuïtats en:

- *Evitables*: quan existeix $\lim_{x\to a} f(x)$ finit, però no coincideix amb $f(a)$ o f no està definida al punt a. La discontinuïtat és aleshores eliminable si es modifica f assignant-li el valor del límit en el punt $x = a$.
- *No evitables*: quan $\lim_{x\to a} f(x)$ no existeix o és infinit.

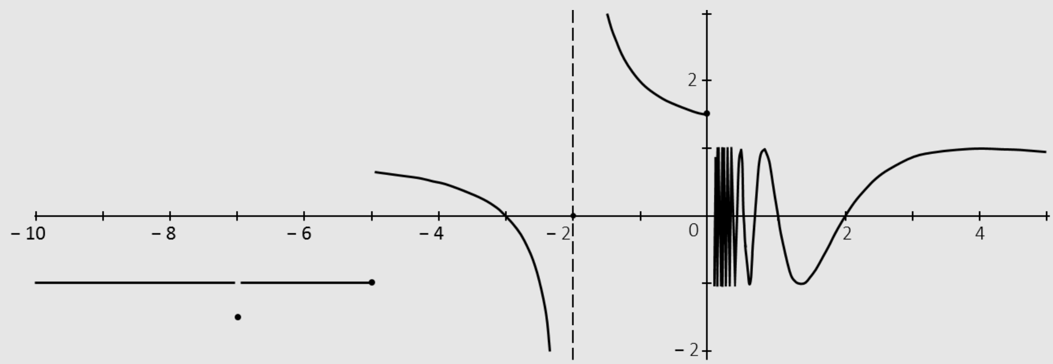
  Distingim diferents situacions:

  – Discontinuïtat *de salt*: quan els dos límits laterals existeixen i són finits, però són diferents.
  – Discontinuïtat *oscil·lant*: quan algun dels límits laterals no existeix, però f és fitada en algun entorn de a.
  – Discontinuïtat *infinita*: quan f no és fitada en cap entorn de a.

Exemple: La funció

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x \leq -5,\ x \neq -7, \\ -3/2 & \text{si } x = -7, \\ (x+3)/(x+2) & \text{si } -5 < x \leq 0,\ x \neq -2, \\ 0 & \text{si } x = -2, \\ \sin(2\pi/x) & \text{si } x > 0, \end{cases}$$

té una discontinuïtat *evitable* al punt $x = -7$, una discontinuïtat *de salt* al punt $x = -5$, una discontinuïtat *infinita* al punt $x = -2$, i una discontinuïtat *oscil·lant* al punt $x = 0$ (vegeu la figura).



3.6 Teoremes sobre funcions contínues

Teorema dels compactes

TEOREMA: Si f és contínua en un *compacte* K, aleshores $f(K)$ és compacte.

DEMOSTRACIÓ: sigui $\{y_n\}$ una successió d'elements de $f(K)$, hem de demostrar que té alguna successió parcial convergent dins $f(K)$. Els y_n són imatges de punts x_n de K, és a dir, $y_n = f(x_n)$ i com que K és compacte, la successió $\{x_n\}$ tindrà alguna successió parcial convergent $\{x_{n_i}\} \to \ell \in K$. D'altra banda, com que f és contínua, $\{y_{n_i}\} = \{f(x_{n_i})\} \to f(\ell) \in f(K)$. Així doncs, $\{y_n\}$ té una successió parcial convergent i, per tant, $f(K)$ és compacte. $\diamondsuit$

Teorema del màxim i del mínim

TEOREMA: Si f és contínua en un *compacte* K, aleshores $f(K)$ té màxim i mínim.

DEMOSTRACIÓ: hem vist que $f(K)$ és compacte, és a dir, tancat i fitat. Per tant, tindrà suprem (M) i ínfim (m) i només cal demostrar que ambdós pertayen a $f(K)$. Podem construir successions d'elements de $f(K)$, convergents cap a M, ja que podem trobar elements de $f(K)$ tan a prop de M com vulguem (en cas contrari, hi hauria fites superiors de $f(K)$ més petites que M). Així doncs, M és límit d'alguna successió d'elements de $f(K)$ i, per tant, $M \in f(K)$, ja que $f(K)$ és tancat. M és, doncs, el *màxim* de $f(K)$.

Similarment es demostra que m és el *mínim* de $f(K)$. $\diamondsuit$

Aquest teorema ens diu, doncs, que M i m són valors que la funció f assoleix en algun punt de K.

Teorema de Bolzano

TEOREMA: Si f és contínua en un *interval tancat* $[a, b]$, amb $f(a)$ i $f(b)$ no nuls i de signe oposat, aleshores $\exists\, c \in (a, b)$ on $f(c) = 0$.

DEMOSTRACIÓ: si c_0 és el punt central de l'interval $I_0 = [a, b]$ i $f(c_0) = 0$, haurem acabat. Si no, dels dos subintervals en què I_0 queda dividit per c_0 en triem un en els extrems del qual f prengui valors de signe oposat (sempre n'hi haurà un) i l'anomenem I_1.

Si c_1 és el punt central de I_1 i f s'anul·la en aquest punt, haurem acabat. Si no, escollim novament un subinterval I_2 aplicant el criteri anterior. Seguim el procés indefinidament. Si en algun punt central c_i la funció f s'anul·la, haurem acabat. Si no, tindrem una col·lecció d'infinits intervals $I_0 \supset I_1 \supset I_2 \supset \ldots$, en els extrems dels quals f pren valors de *signe oposat* i, d'altra banda, la llargada de cada interval serà la meitat de llargada de l'anterior (la llargada de I_n és $L_n = (b - a)/2^n$).

Construïm ara una successió $\{x_n\}$, amb $x_n \in I_n$. Aquesta successió és de Cauchy (i, per tant, convergent), ja que si $m, n > n_0$, tindrem que $d(x_m, x_n) < (b-a)/2^{n_0}$. Llavors, si $c = \lim\{x_n\}$, la funció f s'ha d'anul·lar en aquest punt, ja que tant si $f(c) > 0$ com si $f(c) < 0$ arribaríem a una contradicció. En efecte, si $f(c) > 0$, per continuïtat $f(x) > 0$ en algun entorn $\mathcal{E}(c, \delta)$, de c. Però a partir d'algun subíndex, $I_n \subset \mathcal{E}(c, \delta)$ i f hauria de prendre valors de signe oposat en els extrems de I_n. Queda exclòs, per tant, que $f(c) > 0$ i similarment s'exclou la possibilitat $f(c) < 0$. $\diamondsuit$

Teorema del valor intermedi de Bolzano

TEOREMA: Si f és contínua a l'interval tancat $[a, b]$, amb $f(a) \neq f(b)$, i y_0 està entre $f(a)$ i $f(b)$, aleshores $\exists\, c \in (a, b)$ on $f(c) = y_0$.

DEMOSTRACIÓ: si y_0 està entre $f(a)$ i $f(b)$, llavors $f(a)-y_0$ i $f(b)-y_0$ tenen signes oposats. Podem, doncs, aplicar el teorema de Bolzano a la funció $F(x) \overset{\text{def}}{=} f(x) - y_0$ i hi haurà, per tant, un punt $c \in (a, b)$ on $F(c) = 0$, és a dir, $f(c) = y_0$. $\diamondsuit$

Així doncs, si f és contínua, tots els valors compresos entre $f(a)$ i $f(b)$ són assolits per f en algun punt de (a, b).

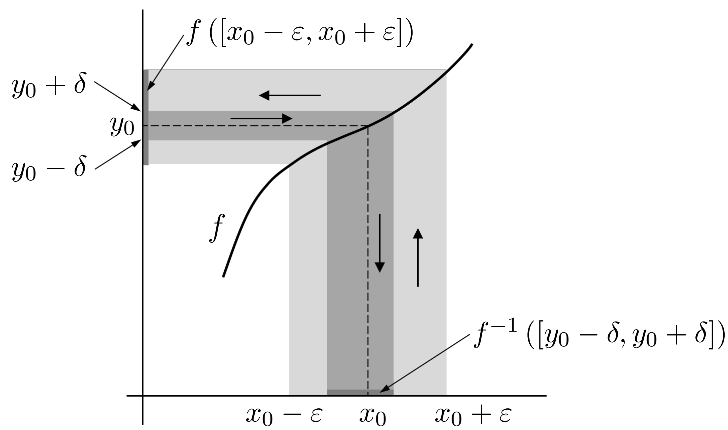
Teorema de la continuïtat de la funció inversa

TEOREMA: Si f és contínua i *invertible* en un *interval* $I \Rightarrow f$ és estrictament creixent o decreixent a I i f^{-1}és contínua a $f(I)$.

DEMOSTRACIÓ: ja hem vist abans que *invertible* equival a *injectiva*. Per tant, si $a, b \in I$ tindrem $f(a) \neq f(b)$. Si $f(a) < f(b)$, el valor de la funció en *qualsevol* punt $x \in (a, b)$ haurà d'estar entre $f(a)$ i $f(b)$, ja que si fos $f(x) < f(a) < f(b)$, d'acord amb el teorema del valor intermedi de Bolzano, el valor $f(a)$ s'hauria d'assolir també entre x i b, i f no seria injectiva. Similarment, si fos $f(a) < f(b) < f(x)$, el valor $f(b)$ s'hauria d'assolir també entre a i x, i f tampoc seria injectiva. Així doncs, tenim $f(a) < f(x) < f(b)$, $\forall x \in (a, b)$.

Si considerem ara un punt x' tal que $a < x < x' < b$ tindrem que $f(a) < f(x) < f(x') < f(b)$ (només cal repetir el raonament anterior a l'interval (x, b)). Tenim, doncs, que si $x < x'$ aleshores $f(x) < f(x')$, és a dir, f és *estrictament creixent* a I. De manera semblant es demostra que si $f(a) > f(b)$, f és *estrictament decreixent.*

Ens queda per demostrar que f^{-1} també és contínua. Notem que, en ser f contínua i estrictament creixent o decreixent, es compleix que $f\big([x_1, x_2]\big) = \big[f(x_1), f(x_2)\big]$ (si f és creixent) o $f\big([x_1, x_2]\big) = \big[f(x_2), f(x_1)\big]$ (si f és decreixent), és a dir, la imatge de l'interval d'extrems x_1 i x_2 és l'interval d'extrems $f(x_1)$ i $f(x_2)$ (vegeu la figura). Llavors, si $y_0 = f(x_0) \in f(I)$, la funció f^{-1} és *contínua* a y_0, ja que, donat $\varepsilon > 0$, si δ és tal que $\mathcal{E}(y_0, \delta) \subset f\big(\mathcal{E}(x_0, \varepsilon)\big)$, els punts de $\mathcal{E}(y_0, \delta)$ es transformen per f^{-1} en punts de $\mathcal{E}(x_0, \varepsilon)$. En altres paraules, es compleix que $\forall \varepsilon > 0$, $\exists\, \delta > 0$ tal que si $y \in \mathcal{E}(y_0, \delta)$ llavors $f^{-1}(y) \in \mathcal{E}(x_0, \varepsilon)$. $\diamondsuit$



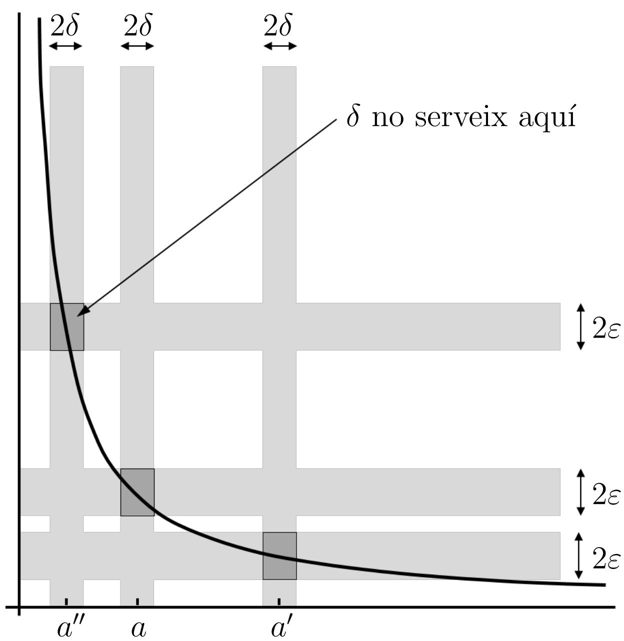
Això ens assegura la continuïtat de la funció logarítmica (inversa de l'exponencial), de la qual deduïm la continuïtat de la funció potència d'exponent real,

$f(x) = x^a$ on $a \in \mathbb{R}$, ja que $x^a = e^{a \ln x}$. També ens assegura que les inverses de les funcions trigonomètriques i hiperbòliques són contínues en els seus dominis de definició.

3.7 Continuïtat uniforme

Sigui f una funció contínua en un *conjunt* $A \subset \mathbb{R}$. Això significa que en cada punt $a \in A$ es compleix que $\forall \varepsilon > 0$, $\exists\, \delta > 0$, tal que si $d(x, a) < \delta$, aleshores $d(f(x), f(a)) < \varepsilon$. Evidentment aquest δ depèn de ε però també del punt a. Podem preguntar-nos si per a cada ε es pot trobar un δ que ens serveixi per a *tots* els punts de A. En general, la resposta és negativa. L'exemple següent ho evidencia.

Considerem la funció $f(x) = 1/x$ que és contínua a $A = (0, +\infty)$. Donat un ε, hi ha algun δ tal que es compleix la condició de continuïtat en el punt a. Aquest δ ens serveix també a qualsevol punt a' a la dreta de a, però no ens serveix, per exemple, al punt a'' (vegeu la figura). Podríem escollir, en el punt a, un δ més petit que pogués ser utilitzat també en el punt a'' (també ens valdria a la dreta del punt a). Però és clar que si movem el punt a'' cap a l'esquerra (en direcció a l'origen) hi haurà un moment en què el nou δ tampoc serà vàlid. No hi ha, doncs, un δ que ens serveixi a tot el conjunt A.



Quan per a una funció f sigui possible trobar, per a cada ε, un δ vàlid en tot el conjunt A, diem que f és *uniformement contínua* en aquest conjunt.

DEFINICIÓ: f és *uniformement contínua* al *conjunt* $A \subset \mathbb{R}$ si $\forall \varepsilon > 0$, $\exists\, \delta > 0$, tal que $d(f(x), f(x')) < \varepsilon$ si $d(x, x') < \delta$.

Notem que el concepte de continuïtat uniforme fa sempre referència a un *conjunt*. El fet que una funció sigui o no uniformement contínua en un conjunt depèn de la funció i del conjunt. Per exemple, la funció $f(x) = 1/x$ no és uniformement contínua a $(0, +\infty)$, però sí que ho és a $[1, 2]$.

Evidentment, una funció uniformement contínua a A és també contínua a A, però el recíproc no és cert tal com hem vist en l'exemple anterior. El teorema següent ens dona una condició suficient perquè una funció contínua sigui uniformement contínua.

TEOREMA: Si f és contínua en un *compacte* A, aleshores f és uniformement contínua a A.

DEMOSTRACIÓ: si f no fos uniformement contínua a A, hi hauria algun ε per al qual no existiria cap δ que complís la condició de continuïtat uniforme. Això ens permetria, per a cada $n \in \mathbb{N}$, trobar dos punts $x_n, x'_n \in A$ tals que $d(x_n, x'_n) < 1/n$, però $d(f(x_n), f(x'_n)) \geq \varepsilon$. Llavors tindríem dues successions, $\{x_n\}$ i $\{x'_n\}$, i com que A és compacte, la successió $\{x_n\}$ tindria alguna successió parcial convergent $\{x_{n_i}\} \to \ell \in A$. La corresponent successió parcial $\{x'_{n_i}\}$ també convergiria cap a ℓ, ja que, per construcció, $\{|x_{n_i} - x'_{n_i}|\} \leq \{1/n_i\} \to 0$. D'altra banda, com que f és contínua a ℓ, tindríem $\{f(x_{n_i})\} \to f(\ell)$ i també $\{f(x'_{n_i})\} \to f(\ell)$, és a dir, $\{f(x_{n_i}) - f(x'_{n_i})\} \to 0$. Però això està en contradicció amb el fet que $d(f(x_n), f(x'_n)) \geq \varepsilon$. $\diamondsuit$

3.8 Infinitèsims

DEFINICIÓ: diem que $f(x)$ és un *infinitèsim quan $x \to a$* si $\lim_{x\to a} f(x) = 0$.

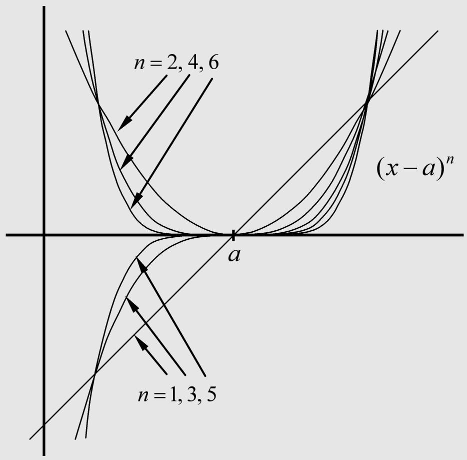
Si $f(x), g(x)$ són dos infinitèsims quan $x \to a$, i

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} 0, \\ k \ (\neq 0, \pm\infty), \\ \pm\infty, \\ \text{no existeix.} \end{cases}$$

diem, respectivament, que

$$\begin{cases} f(x) \text{ és un infinitèsim d'}\textit{ordre superior} \text{ a } g(x), \text{ quan } x \to a, \\ f(x) \text{ i } g(x) \text{ són infinitèsims del } \textit{mateix ordre}, \text{ quan } x \to a, \\ f(x) \text{ és un infinitèsim d'}\textit{ordre inferior} \text{ a } g(x), \text{ quan } x \to a, \\ \text{els infinitèsims } f(x) \text{ i } g(x) \text{ no són comparables.} \end{cases}$$

EXEMPLE: les funcions $(x-a)^n$, amb $n \in \mathbb{N}$, són infinitèsims quan $x \to a$ (vegeu la figura següent).



Si prenem $(x-a)^n$, amb $n \in \mathbb{N}$, com a infinitèsim de referència, diem que

$$f(x) \text{ és un infinitèsim d'ordre } \left\{ \begin{array}{c} \text{superior a } n \\ n \\ \text{inferior a } n \end{array} \right\}$$

$$\text{si } \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{(x-a)^n} = \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ k\ (\neq 0, \pm\infty) \\ \pm\infty \end{array} \right\}.$$

EXEMPLES:

1) $f(x) = x^3 - 3x + 2$ és un infinitèsim d'ordre 2 quan $x \to 1$ i és un infinitèsim d'ordre 1 quan $x \to -2$, ja que

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{(x-1)^2} = \lim_{x\to 1}(x+2) = 3,$$
$$\lim_{x\to -2} \frac{x^3 - 3x + 2}{x+2} = \lim_{x\to -2}(x-1)^2 = 9.$$

2) $f(x) = (x-a)^{3/2}$, amb $a > 0$, és un infinitèsim d'ordre superior a 1 i inferior a 2 quan $x \to a^+$, ja que $\lim_{x\to a^+}(x-a)^{3/2}/(x-a) = 0$, mentre que $\lim_{x\to a^+}(x-a)^{3/2}/(x-a)^2 = +\infty$.

L'ordre d'un infinitèsim és una mesura de la "rapidesa" amb què $f(x)$ tendeix a zero quan $x \to a$ o, també, de com la funció $f(x)$ "s'adapta" a la funció 0 en el punt a. Per expressar que $f(x)$ és un infinitèsim d'ordre *superior* a n, quan $x \to a$, escriurem

$$f(x) = \mathrm{o}\big[(x-a)^n\big],$$

mentre que si $f(x)$ és infinitèsim d'ordre *igual o superior* a n, quan $x \to a$, escriurem

$$f(x) = \mathrm{O}\big[(x-a)^n\big].$$

3.9 Problemes

P3.1 Calculeu els límits següents:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^3-1}{x^2-1}$

(b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}{x}$

(c) $\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{x^n-a^n}{x-a}$

(d) $\displaystyle\lim_{x\to 0} (1+x^2)^x$

(e) $\displaystyle\lim_{x\to 0} x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$

(f) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left(1+\frac{x}{4}\right)^{2/x}$

(g) $\displaystyle\lim_{x\to 1^\pm} \frac{1}{1-x}$

(h) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln(x^2+3)}{\ln(x^3-x+1)}$

P3.2 A partir de les desigualtats $|\sin x| \le |x| \le |\tan x|$ trobeu els límits

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x}$ (c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin(\tan x)}{x}$

P3.3 Trobeu les discontinuïtats de les funcions següents i indiqueu-ne el tipus:

(a) $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$

(b) $f(x) = \dfrac{x^3-1}{x^2-1}$

(c) $f(x) = \dfrac{2/x}{1-2/x}$

(d) $f(x) = \cos\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$

(e) $f(x) = x\cos\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$

(f) $f(x) = \dfrac{1}{x}\cos\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$

P3.4 Trobeu les discontinuïtats de les funcions següents i indiqueu-ne el tipus:

(a) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$

(b) $g(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$

(c) $h(x) = \begin{cases} 1/x & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$

P3.5 Feu servir el teorema de Bolzano per demostrar que:

(a) l'equació $e^{-x} = x + \ln x$ té almenys una solució real.

(b) les equacions de grau n tenen almenys una solució real si n és senar.

P3.6 Quan $x \to 0$ tenim les expressions següents que justificarem al capítol 4 (recordem que $\mathrm{O}(x^n)$ vol dir infinitèsim d'ordre igual o superior a n quan $x \to 0$):

$$\begin{array}{lll} \sin x = x + \mathrm{O}(x^3) & \cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \mathrm{O}(x^4) & \tan x = x + \mathrm{O}(x^3) \\ \sinh x = x + \mathrm{O}(x^3) & \cosh x = 1 + \frac{x^2}{2} + \mathrm{O}(x^4) & \tanh x = x + \mathrm{O}(x^3) \\ e^x = 1 + x + \mathrm{O}(x^2) & \frac{1}{1-x} = 1 + x + \mathrm{O}(x^2) & \ln(1-x) = -x + \mathrm{O}(x^2) \end{array}$$

Feu servir aquestes expressions per trobar els límits següents:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{(e^x - 1)\sin x}{1 - \cos x}$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin x \ln(1+x)}{\tan x}$

Solucions

S3.1 (a) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{3}{2}\,.$

(b) Si multipliquem i dividim per $\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1-x^2}$ tenim

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{2x^2}{x\big(\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1-x^2}\big)} = 0.$$

(c) Si fem $h \stackrel{\text{def}}{=} x - a$ ($\Leftrightarrow x = a + h$) tenim

$$\begin{aligned} \lim_{x\to a} \frac{x^n - a^n}{x - a} &= \lim_{h\to 0} \frac{(a+h)^n - a^n}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\binom{n}{1}a^{n-1}h + \binom{n}{2}a^{n-2}h^2 + \cdots}{h} = na^{n-1}. \end{aligned}$$

(d) $\displaystyle\lim_{x\to 0} (1+x^2)^x = \lim_{x\to 0} (1+x^2)^{x^3/x^2} = \lim_{x\to 0} \left[\left(1+x^2\right)^{\frac{1}{x^2}}\right]^{x^3} = e^0 = 1.$

(e) $\displaystyle\lim_{x\to 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$, ja que $x \to 0$ i $|\sin(1/x)| \le 1$.

(f) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left(1 + \frac{x}{4}\right)^{2/x} = \lim_{x\to 0} \left(1 + \frac{x}{4}\right)^{\frac{4}{2x}} = e^{1/2}.$

(g) $\displaystyle\lim_{x\to 1^+} \frac{1}{1-x} = -\infty, \ \lim_{x\to 1^-} \frac{1}{1-x} = +\infty.$

(h)
$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x^2+3)}{\ln(x^3-x+1)} &= \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln[x^2(1+3x^{-2})]}{\ln[x^3(1-x^{-2}+x^{-3})]}\\ &= \lim_{x\to+\infty}\frac{2\ln x+\ln(1+3x^{-2})}{3\ln x+\ln(1-x^{-2}+x^{-3})}\\ &= \lim_{x\to+\infty}\frac{2+\ln(1+3x^{-2})/\ln x}{3+\ln(1-x^{-2}+x^{-3})/\ln x}=\frac{2}{3}\,.\end{aligned}$$

S3.2 (a) Si dividim les desigualtats per $|\sin x|$ obtenim $1\le(\sin x)/x\le 1/|\cos x|$, i en el límit $x\to 0$, $1\le\lim_{x\to 0}(\sin x)/x\le 1$. Per tant,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

(b) Si les dividim per $|\tan x|$ obtenim $|\cos x|\le x/(\tan x)\le 1$, i en el límit $x\to 0$, $1\le\lim_{x\to 0}x/(\tan x)\le 1$. Per tant,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=1.$$

(c) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\tan x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\tan x)}{\tan x}\frac{\tan x}{x}=1.$

S3.3 (a) Hi ha una discontinuïtat infinita en el punt $x=1$, ja que $f(x)$ no és fitada en cap entorn d'aquest punt.

(b) Hi ha discontinuïtats en els punts $x=1$ i $x=-1$ en els quals el denominador s'anul·la. La del punt $x=1$ és evitable, ja que $\lim_{x\to 0}f(x)$ existeix (vegeu problema **P3.1**(a)). La del punt $x=-1$ és infinita.

(c) Hi ha discontinuïtats en els punts $x=0$ i $x=2$ on s'anul·len els denominadors. Com que

$$f(x)=\frac{2/x}{1-2/x}=\frac{2}{x-2}\,,$$

la primera és evitable i la segona és infinita.

(d) Hi ha una discontinuïtat en el punt $x=0$. La funció no té límit en aquest punt, ja que podem trobar successions $\{x_n\}\to 0$ amb $\{f(x_n)\}\to 1$ (per exemple, prenent $x_n=1/\sqrt{2n\pi}$) i d'altres $\{x_n'\}\to 0$ amb $\{f(x_n')\}\to -1$ (per exemple, prenent $x_n'=1/\sqrt{(2n-1)\pi}$). D'altra banda $f(x)$ és fitada, ja que $|\cos(1/x)|\le 1$. Per tant, $x=0$ és una discontinuïtat oscil·lant.

(e) En aquest cas $\lim_{x\to 0}f(x)=0$ i la discontinuïtat en el punt $x=0$ és evitable.

(f) Com que $f(x)$ no és fitada en cap entorn de $x = 0$, la discontinuïtat en aquest punt és infinita.

S3.4 (a) És discontínua a tot arreu perquè no té límit en cap punt x, ja que en qualsevol entorn de x hi ha racionals i irracionals, i podem construir successions de racionals $\{x_n\} \to x$ on tindrem $\{f(x_n)\} \to 1$ i successions d'irracionals $\{x'_n\} \to x$ on tindrem $\{f(x'_n)\} \to 0$. Com que $f(x)$ és fitada, en tots del punts tenim discontinuïtat oscil·lant.

(b) Té discontinuïtats oscil·lants en tots els punts, llevat de $x = 0$ on hi ha una discontinuïtat evitable, ja que $\lim_{x\to 0} g(x) = 0$.

(c) També té discontinuïtats oscil·lants en tots els punts, llevat de $x = 0$ on hi ha una discontinuïtat infinita, ja que $h(x)$ no és fitada en cap entorn d'aquest punt.

S3.5 (a) Considerem la funció $f(x) = e^{-x} - \ln x - x$. Tenim $\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty$ i $\lim_{x\to +\infty} f(x) = -\infty$. Per tant, podem trobar un punt a prop de l'origen on $f(x)$ pren un valor positiu i un punt allunyat de l'origen on pren un valor negatiu. Entre aquests dos punts n'hi ha d'haver almenys un on pren el valor 0, ja que $f(x)$ és contínua a $(0, +\infty)$.

(b) La mateixa argumentació que en el cas anterior, ja que quan $x \to \pm\infty$ el polinomi té límit $\pm\infty$ si el coeficient del terme de grau n és positiu o $\mp\infty$ si és negatiu.

S3.6 (a)
$$\lim_{x\to 0} \frac{(e^x - 1)\sin x}{1 - \cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{[x + \mathrm{O}(x^2)][x + \mathrm{O}(x^3)]}{\frac{x^2}{2} + \mathrm{O}(x^4)} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2[1 + \mathrm{O}(x)][1 + \mathrm{O}(x^2)]}{x^2[\frac{1}{2} + \mathrm{O}(x^2)]} = 2.$$

(b)
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x \ln(1 + x)}{\tan x} = \lim_{x\to 0} \frac{[x + \mathrm{O}(x^3)][x + \mathrm{O}(x^2)]}{x + \mathrm{O}(x^3)} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2[1 + \mathrm{O}(x^2)][1 + \mathrm{O}(x)]}{x[1 + \mathrm{O}(x^2)]} = 0.$$

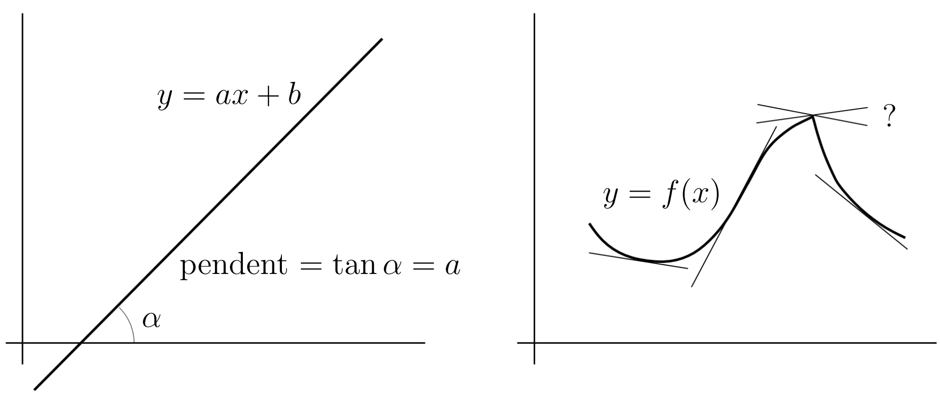
4 DERIVADA

4.1 Problema del pendent

La inclinació d'una recta respecte de l'horitzontal ve donada quantitativament pel seu *pendent*, que es defineix com la tangent trigonomètrica de l'angle que la recta forma amb l'horitzontal. Així, una recta horitzontal té pendent 0, una recta inclinada un angle $\pi/6$ té pendent $1/\sqrt{3}$, si la inclinació és $\pi/4$ el pendent és 1, i si la recta és vertical el pendent és ∞. Quan l'angle amb l'horitzontal, mesurat pel costat dret, està entre $\pi/2$ i π, el pendent de la recta és negatiu.

El gràfic d'una funció polinòmica de grau 1 (és a dir, de la forma $y = ax+b$) és una línia recta i podem, per tant, parlar també del seu pendent. De fet, el valor del pendent del gràfic de la funció $y = ax + b$ és a, ja que quan x augmenta en Δx, el valor de y augmenta en $a\Delta x$. El pendent és, doncs, l'indicador del *canvi* del valor de la funció quan variem x.

El problema que ens plantegem aquí és el de donar sentit al concepte de *pendent* per al gràfic d'una funció arbitrària, que seria també l'indicador del canvi del valor de la funció quan variem x. La intuïció ens diu que aquest pendent serà diferent en cada punt. L'estratègia serà buscar, en cada punt, la recta que millor s'ajusti al gràfic de la funció i considerar el pendent d'aquesta recta com a pendent de la funció en aquell punt. Però, quina és la recta que millor s'ajusta al gràfic de la funció en un punt donat? Novament, la intuïció ens diu que és la recta tangent. Tanmateix, veurem que no sempre es pot parlar de recta tangent.



El desenvolupament d'aquesta idea ens portarà als conceptes de *derivada* i de *funció derivable*. Només per a aquestes funcions es podrà parlar de pendent i de recta tangent.

D'altra banda, cal notar que aquest problema no és estrictament geomètric. Quan, per exemple, un objecte es mou amb velocitat constant v, la distància

d recorreguda en un temps t ve donada per la funció $d(t) = vt$. La velocitat (constant) v no és altra cosa que el pendent del gràfic (en aquest cas, una línia recta) d'aquesta funció. Quan d és una funció més complicada de t (moviment no uniforme) haurem de parlar de velocitat en cada instant (velocitat instantània), la qual ens vindrà donada pel pendent de la funció $d = f(t)$ en cada punt (instant) t. Podem dir, doncs, que la velocitat instantània és la velocitat del moviment uniforme que en cada instant s'ajusta millor al moviment considerat.

4.2 Derivada

Derivada d'una funció en un punt

DEFINICIÓ: Si f és una funció definida en algun entorn d'un punt a. Anomenem *derivada de f en el punt a* al límit (si existeix)

$$f'(a) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Si aquest límit existeix diem que la funció f és *derivable* en el punt a. Si f és derivable en tots els punts d'un conjunt $D \subset \mathbb{R}$ diem que f és derivable a D i en aquest cas la funció (definida a D) que assigna a cada punt $x \in D$ el valor de la derivada de f en aquest punt, s'anomena *funció derivada* de f i es representa per f'. La funció derivada f' pot ser o no derivable en el punt a. Si ho és, expressem la seva derivada com $f''(a)$ i l'anomenem *derivada segona* de f en el punt a. Com abans, el concepte és extensible a un conjunt de punts D i es pot parlar llavors de la funció derivada segona f''. De forma similar es pot parlar de derivada tercera, quarta, etc. Cal notar que per poder parlar de derivada n-èsima de f en un punt a, $f^{(n)}(a)$, és necessari (encara que no suficient) que $f^{(n-1)}(x)$ existeixi en algun entorn del punt a.

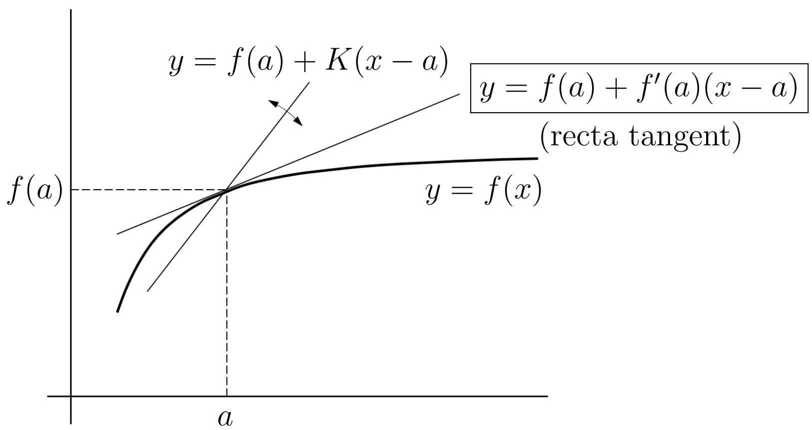
Derivada i pendent de la recta tangent

Quan f és derivable en el punt a, el valor de la derivada, $f'(a)$, és el pendent de la recta tangent al gràfic de f en el punt a. Per fer-ho més evident observem que l'anterior definició de derivada es pot escriure en la forma equivalent següent

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - [f(a) + f'(a)(x-a)]}{x - a} = 0.$$

Notem que si $f'(a)$ és substituït per qualsevol altra quantitat K el límit anterior ja no és 0 sinó $f'(a) - K$, ja que la substitució és equivalent a sumar $[f'(a) - K](x - a)$ al numerador. Això vol dir que si f és derivable en el punt a, la seva derivada en aquest punt, $f'(a)$, és l'únic valor del coeficient de $(x-a)$ que anul·la el límit anterior. En canvi, si no és derivable, no existeix cap valor d'aquest coeficient que anul·li el límit. Així doncs, si f és derivable al punt a, l'expressió $f(x)-[f(a)+f'(a)(x-a)]$ és un infinitèsim d'ordre *superior* a 1 (quan $x \to a$) mentre que substituint $f'(a)$ per qualsevol altra quantitat K, l'expressió $f(x)-[f(a)+K(x-a)]$ seria un infinitèsim d'ordre *igual* a 1 (quan $x \to a$).

Notem ara que la funció $y = f(a)+K(x-a)$, amb K arbitrari, té com a gràfic una recta de pendent K que passa pel punt $(a, f(a))$. Acabem de veure que la diferència entre aquesta funció i la funció $y = f(x)$ és un infinitèsim d'ordre igual a 1, excepte quan $K = f'(a)$ en què l'infinitèsim és d'ordre *superior* a 1. Això vol dir que, de totes les línies rectes que passen pel punt $(a, f(a))$, la que correspon a la funció $y = f(a) + f'(a)(x-a)$ és la que millor s'ajusta al gràfic de la funció f en aquest punt. Aquesta és precisament la que anomenem *recta tangent* al gràfic de f en el punt considerat.



Si la funció no té derivada en el punt a, la diferència entre les funcions $y = f(x)$ i $y = f(a) + K(x-a)$ no és mai (per a cap valor de K) un infinitèsim d'ordre superior a 1, la qual cosa significa que cap de les rectes que passen pel punt $(a, f(a))$ s'ajusta millor a la funció que les altres, és a dir, no existeix la recta tangent.

Així doncs, podem afirmar que

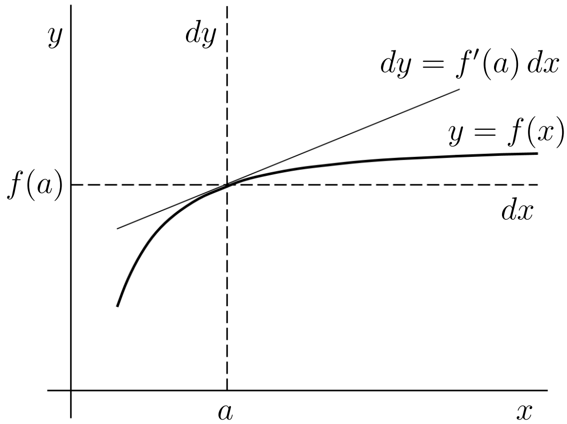
$$\boxed{\text{derivabilitat} \Leftrightarrow \text{existència de recta tangent}}$$

Diferencial

Si f és derivable en el punt a, podem reexpressar la recta tangent, $y = f(a) + f'(a)(x-a)$, en termes d'uns nous eixos de coordenades, (dx, dy), paral·lels a (x, y) amb l'origen traslladat al punt $(a, f(a))$. L'expressió és

$$dy = f'(a)\,dx.$$

Aquesta funció *lineal* (el seu gràfic és una recta de pendent $f'(a)$ que passa per l'origen) s'anomena *diferencial de la funció f en el punt a*.



La diferencial d'una funció no és, doncs, altra cosa que la recta tangent expressada en un sistema de coordenades *local*. En aquest sentit, es diu també que la diferencial de f en el punt a és l'*aproximació lineal local* de f en aquest punt.

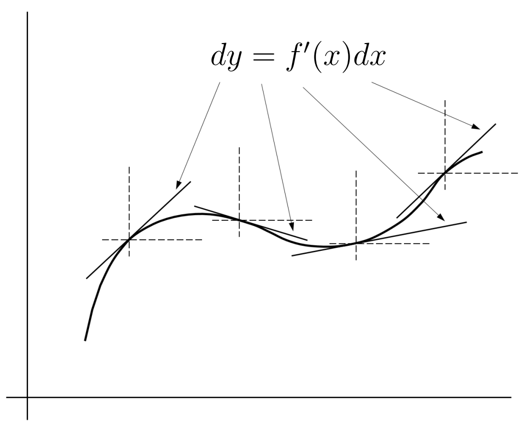
Quan una funció té diferencial en un punt a es diu que és *diferenciable* en aquest punt. Com que l'existència de diferencial està lligada a l'existència de recta tangent, la qual cosa està lligada a l'existència de derivada, tenim que els conceptes de *derivabilitat* i de *diferenciabilitat* de f en un punt són equivalents.

$$\boxed{f \text{ és derivable} \Leftrightarrow f \text{ és diferenciable}}$$

D'altra banda, si f és diferenciable (derivable) en tots els punts d'un conjunt $D \subset \mathbb{R}$ escrivim

$$dy = f'(x)\,dx, \ \text{ o també } df(x) = f'(x)\,dx,$$

on, evidentment, (dx, dy) fa referència a diferents sistemes de coordenades locals amb origen a cada punt x.



La diferencial ens proporciona una notació alternativa per a la funció derivada,

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}f(x),$$

i també per a la derivada de f en un punt,

$$f'(a) = \left(\frac{dy}{dx}\right)_a = \left(\frac{df}{dx}\right)_a = \left(\frac{d}{dx}f(x)\right)_a.$$

Aquesta notació, anomenada de Leibnitz, s'utilitza molt freqüentment, ja que permet manipular $\frac{dy}{dx}$ com una fracció, respectant les propietats de les derivades.

Pel que fa a derivades d'ordre superior, escrivim

$$f''(x) = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2f}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{df}{dx}\right), \text{ etc.}$$

Derivabilitat i continuïtat

TEOREMA: Si f és derivable en el punt a, aleshores f és contínua a a.

DEMOSTRACIÓ: d'acord amb la definició de derivada, si f és derivable en el punt a, la funció $f(x) - f(a)$ ha de ser un infinitèsim (d'ordre igual o superior a 1) quan $x \to a$.

Tenim, doncs, $\lim_{x\to a}[f(x) - f(a)] = 0$, és a dir, $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$. Per tant, f és contínua en el punt a. $\diamondsuit$

El recíproc no és cert. Una funció pot ser contínua i no ser derivable en un punt. Ho podem expressar també així: si existeix la recta tangent en un punt, la funció és necessàriament contínua en aquell punt, però la continuïtat no és suficient per garantir l'existència de la recta tangent.

4.3 Propietats de la derivada

Els teoremes següents relacionen la derivació amb les operacions habituals entre funcions i són molt útils per obtenir derivades.

Linealitat

TEOREMA: Si f i g són derivables en el punt a, aleshores $f + g$ també ho és i es compleix

$$(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a).$$

Demostració:

$$\begin{aligned}(f+g)'(a) &= \lim_{x\to a}\frac{[f(x)+g(x)]-[f(a)+g(a)]}{x-a}\\ &= \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}+\lim_{x\to a}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}\\ &= f'(a)+g'(a). \quad \diamondsuit\end{aligned}$$

Teorema: Si $k\in\mathbb{R}$ i f és derivable en el punt a, aleshores kf també ho és i es compleix

$$(kf)'(a)=kf'(a).$$

Demostració:

$$\begin{aligned}(kf)'(a) &= \lim_{x\to a}\frac{kf(x)-kf(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}k\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\\ &= k\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=kf'(a). \quad \diamondsuit\end{aligned}$$

Derivada del producte

Teorema: Si f i g són derivables en el punt a, aleshores fg també ho és i es compleix

$$(fg)'(a)=f'(a)g(a)+f(a)g'(a).$$

Demostració:

$$\begin{aligned}(fg)'(a) &= \lim_{x\to a}\frac{f(x)g(x)-f(a)g(a)}{x-a}\\ &= \lim_{x\to a}\frac{f(x)g(x)-f(a)g(x)+f(a)g(x)-f(a)g(a)}{x-a}\\ &= \lim_{x\to a}\left[\frac{f(x)-f(a)}{x-a}g(x)\right]+\lim_{x\to a}\left[f(a)\frac{g(x)-g(a)}{x-a}\right]\\ &= f'(a)g(a)+f(a)g'(a),\end{aligned}$$

on, a part de la definició de derivada, hem usat la continuïtat de g (ja que és derivable) en el punt a, és a dir, $\lim_{x\to a} g(x)=g(a)$. $\diamondsuit$

Derivada del quocient

Teorema: Si g és derivable en el punt a, i $g(a)\neq 0$, aleshores $1/g$ també és derivable en aquest punt i es compleix

$$(1/g)'(a)=-g'(a)/[g(a)]^2.$$

DEMOSTRACIÓ:

$$(1/g)'(a) = \lim_{x\to a} \frac{1/g(x) - 1/g(a)}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{g(a)-g(x)}{(x-a)g(x)g(a)} = \frac{-g'(a)}{[g(a)]^2}. \quad \diamondsuit$$

COROL·LARI: Si f i g són derivables en el punt a, i $g(a) \neq 0$, aleshores f/g també és derivable en aquest punt i es compleix

$$(f/g)'(a) = [f'(a)g(a) - f(a)g'(a)]/[g(a)]^2.$$

DEMOSTRACIÓ: només cal aplicar els resultats anteriors al producte $f(1/g)$. $\diamondsuit$

Derivada d'una funció composta ("regla de la cadena")

TEOREMA: Siguin f i g dues funcions definides als intervals oberts I i J respectivament, amb $f(I) \subset J$ (això garanteix que la funció composta $g[f(x)]$ estigui definida a I). Si f és derivable al punt $a \in I$, i g és derivable al punt $f(a) \in J$, aleshores la funció composta $(g \circ f)(x) = g[f(x)]$ també és derivable al punt a i es compleix

$$(g \circ f)'(a) = g'[f(a)]\, f'(a).$$

DEMOSTRACIÓ: si la funció $f(x)$ no és constant en cap entorn de a

$$\begin{aligned}
(g \circ f)'(a) &= \lim_{x\to a} \frac{g[f(x)] - g[f(a)]}{x-a} \\
&= \lim_{x\to a} \left[\frac{g[f(x)] - g[f(a)]}{x-a} \cdot \frac{f(x)-f(a)}{f(x)-f(a)}\right] \\
&= \lim_{f(x)\to f(a)} \frac{g[f(x)] - g[f(a)]}{f(x)-f(a)} \cdot \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \\
&= g'[f(a)]\, f'(a),
\end{aligned}$$

on hem fet servir la continuïtat de la funció f en el punt a, és a dir, que $f(x) \to f(a)$ quan $x \to a$.

D'altra banda, si $f(x)$ és constant en algun entorn de a, tant $f'(a)$ com $(g \circ f)'(a)$ són 0 i el teorema es compleix trivialment. $\diamondsuit$

Si expressem la funció composta $y = g[f(x)]$ en termes de les funcions g i f escrivint $y = g(u)$ i $u = f(x)$, podem expressar el resultat anterior fent servir la notació de Leibnitz,

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_a = \left(\frac{dy}{du}\right)_{f(a)} \left(\frac{du}{dx}\right)_a.$$

Derivada de la funció inversa

TEOREMA: Si f és *contínua* i *invertible* a l'interval obert I, i és derivable a $x_0 \in I$, amb $f'(x_0) \neq 0$, aleshores la funció inversa f^{-1} és derivable a $y_0 = f(x_0)$ i es compleix

$$\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} .$$

DEMOSTRACIÓ: com que f és contínua i invertible a I, f^{-1} també ho és a $f(I)$. Per tant, $y \to y_0$ si i només si $x \to x_0$. Tenim doncs,

$$\begin{aligned}\left(f^{-1}\right)'(y_0) &= \lim_{y\to y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} \\ &= \lim_{x\to x_0} \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \frac{1}{f'(x_0)} . \quad \diamondsuit\end{aligned}$$

Si escrivim $y = f(x)$ i $x = f^{-1}(y)$, podem expressar el resultat anterior fent servir la notació de Leibnitz

$$\left(\frac{dx}{dy}\right)_{y_0} = 1 \Big/ \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x_0} .$$

4.4 Derivades de les funcions elementals

Els teoremes anteriors també són vàlids per a les *funcions derivades*. Així, tenim

$$\begin{aligned}(f(x) + g(x))' &= f'(x) + g'(x), \\ (f(x)g(x))' &= f'(x)g(x) + f(x)g'(x), \\ (f(x)/g(x))' &= \left[f'(x)g(x) - f(x)g'(x)\right]/[g(x)]^2, \\ (g\left[f(x)\right])' &= g'\left[f(x)\right]f'(x), \\ \left(f^{-1}(x)\right)' &= 1/f'(y), \quad \text{on } y = f^{-1}(x) \text{ i } x = f(y).\end{aligned}$$

A partir de la definició de derivada i fent servir les propietats anteriors es poden obtenir les derivades de les funcions elementals:

- Derivades de les funcions k (constant) i x:

$$\begin{array}{lll} f(x) = k \text{ (constant)}, & f'(x) = 0, & \forall x \in \mathbb{R}, \\ f(x) = x, & f'(x) = 1, & \forall x \in \mathbb{R}. \end{array}$$

DEMOSTRACIÓ: evident a partir de la definició de derivada. $\diamondsuit$

- Derivades de les funcions $\ln x$ i $e^x = \exp(x)$:

$$
\boxed{\begin{array}{lll} f(x) = \ln x, & f'(x) = 1/x, & \forall x \in (0, +\infty), \\ f(x) = e^x, & f'(x) = e^x, & \forall x \in \mathbb{R}. \end{array}}
$$

DEMOSTRACIÓ: la derivada de $f(x) = \ln x$ s'obté directament a partir de la definició

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\ln(x + \Delta x) - \ln x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\ln\left[(x + \Delta x)/x\right]}{\Delta x} \\
&= \frac{1}{x} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x \ln(1 + \Delta x/x)}{\Delta x} = \frac{1}{x} \lim_{\frac{\Delta x}{x} \to 0} \left[\ln\left(1 + \Delta x/x\right)^{x/\Delta x}\right] \\
&= \frac{1}{x} \ln\left[\lim_{\frac{\Delta x}{x} \to 0} (1 + \Delta x/x)^{x/\Delta x}\right] = \frac{1}{x} \ln e = \frac{1}{x},
\end{aligned}
$$

on hem fet servir la igualtat $e = \lim_{u \to 0}(1+u)^{1/u}$ i la continuïtat de la funció $\ln x$.

D'altra banda, la segona funció és la inversa de la primera i si $y = e^x$, tenim $x = \ln y$. Per tant,

$$
\frac{dy}{dx} = 1\bigg/\left(\frac{dx}{dy}\right) = 1\bigg/\left(\frac{1}{y}\right) = y = e^x, \ \forall x \in \mathbb{R}. \quad \diamondsuit
$$

Si f és derivable, podem fer servir la regla de la cadena per obtenir les derivades de les funcions $\ln f(x)$ i $e^{f(x)}$

$$
\boxed{\begin{array}{lll} F(x) = \ln f(x), & F'(x) = f'(x)/f(x), & (\text{si } f(x) > 0), \\ F(x) = e^{f(x)}, & F'(x) = e^{f(x)} f'(x). & \end{array}}
$$

- Derivades de les funcions $f(x)^{g(x)}$, x^a, a^x, $\log_a x$, $\ldots$ $(a \in \mathbb{R})$:

  Si f i g són derivables i $f(x) > 0$, tenim

$$
\boxed{F(x) = f(x)^{g(x)}, \quad F'(x) = f(x)^{g(x)} \left[g'(x) \ln f(x) + g(x) \frac{f'(x)}{f(x)}\right].}
$$

DEMOSTRACIÓ: com que $f(x)^{g(x)} = e^{g(x) \ln f(x)}$, podem fer servir el darrer resultat. $\diamondsuit$

Alguns casos particulars d'aquesta expressió són

$$\boxed{\begin{array}{lll} F(x) = x^a, & F'(x) = a x^{a-1}, & \text{si } x > 0,\ \forall a \in \mathbb{R}, \\ F(x) = a^x, & F'(x) = a^x \ln a, & \text{si } a > 0,\ a \in \mathbb{R}. \end{array}}$$

Per a aquells valors de a per als quals $(-1)^a$ estigui definit (això passa quan a és un enter o un racional de denominador senar), la primera de les expressions anteriors també és vàlida quan $x < 0$. En efecte, notem que $F(x) = x^a = (-1)^a(-x)^a = (-1)^a u^a = (-1)^a F(u)$, on $u = -x$. Per tant,

$$F'(x) = F'(u)\, u'(x) = (-1)^a a u^{a-1}(-1) = (-1)^{a-1} a(-x)^{a-1} = a x^{a-1}.$$

D'altra banda, a partir de la segona expressió anterior es pot trobar la derivada de la funció inversa corresponent

$$\boxed{\begin{array}{lll} F(x) = \log_a x, & F'(x) = \dfrac{1}{x \ln a}\,, & \text{si } x > 0, \\ F(x) = \log_a f(x), & F'(x) = \dfrac{f'(x)}{f(x) \ln a}, & \text{si } f(x) > 0. \end{array}}$$

- Derivades de les funcions trigonomètriques i les seves inverses:

$$\boxed{\begin{array}{lll} f(x) = \sin x, & f'(x) = \cos x, & \forall x \in \mathbb{R}, \\ f(x) = \cos x, & f'(x) = -\sin x, & \forall x \in \mathbb{R}, \\ f(x) = \tan x, & f'(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x, & \text{si } \cos x \neq 0. \end{array}}$$

Demostració: la primera es troba aplicant directament la definició de derivada:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos[x + (\Delta x/2)] \sin(\Delta x/2)}{\Delta x/2} = \cos x, \end{aligned}$$

on hem utilitzat les relacions

$$\sin a - \sin b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2}\,, \quad \lim_{u \to 0} \frac{\sin u}{u} = 1.$$

Si derivem la igualtat $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ tenim

$$2\sin x \cos x + 2\cos x(\cos x)' = 0,$$

d'on s'obté $(\cos x)' = -\sin x$. Finalment, si derivem el quocient $\tan x = \sin x/\cos x$, obtenim $(\tan x)' = 1/\cos^2 x$. $\diamondsuit$

Pel que fa a les funcions trigonomètriques inverses, tenim:

$$\boxed{\begin{aligned} f(x) &= \arcsin x, \qquad & f'(x) &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,, \\ f(x) &= \arccos x, \qquad & f'(x) &= -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,, \\ f(x) &= \arctan x, \qquad & f'(x) &= \frac{1}{1+x^2}\,. \end{aligned}}$$

Demostració: si $y = \arcsin x$, tenim $x = \sin y$ i $\frac{dx}{dy} = \cos y$. Per tant,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,.$$

Les altres es demostren de manera semblant. $\diamondsuit$

- Derivades de les funcions hiperbòliques i les seves inverses:

$$\boxed{\begin{aligned} f(x) &= \sinh x, \qquad & f'(x) &= \cosh x, & \forall x \in \mathbb{R}, \\ f(x) &= \cosh x, \qquad & f'(x) &= \sinh x, & \forall x \in \mathbb{R}, \\ f(x) &= \tanh x, \qquad & f'(x) &= \frac{1}{\cosh^2 x} = 1 - \tanh^2 x, & \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned}}$$

Demostració: aquestes derivades s'obtenen fàcilment a partir de les definicions de les funcions hiperbòliques:

$$\sinh x \stackrel{\text{def}}{=} \frac{e^x - e^{-x}}{2}\,,\ \cosh x \stackrel{\text{def}}{=} \frac{e^x + e^{-x}}{2}\,,\ \tanh x \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\sinh x}{\cosh x}\,. \quad \diamondsuit$$

Pel que fa a les funcions hiperbòliques inverses, si procedim com en el cas de les trigonomètriques arribem a:

$$f(x) = \sinh^{-1} x, \qquad f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,,$$
$$f(x) = \cosh^{-1} x, \qquad f'(x) = \frac{1}{\sqrt{-1+x^2}}\,,$$
$$f(x) = \tanh^{-1} x, \qquad f'(x) = \frac{1}{1-x^2}\,.$$

4.5 Creixement, decreixement i extrems relatius

Creixement i decreixement en un punt

DEFINICIÓ: Una funció f és *creixent* en el punt a si en algun entorn d'aquest punt es compleix
$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \geq 0,$$
la qual cosa significa que en aquest entorn es compleix $f(x) \geq f(a)$ quan $x > a$ i $f(x) \leq f(a)$ quan $x < a$.

DEFINICIÓ: Similarment, una funció f és *decreixent* en el punt a si en algun entorn d'aquest punt es compleix
$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leq 0,$$
la qual cosa significa que en aquest entorn es compleix $f(x) \leq f(a)$ quan $x > a$ i $f(x) \geq f(a)$ quan $x < a$.

Quan les desigualtats anteriors són estrictes diem que f és *estrictament* creixent o decreixent en el punt a.

Si la funció f és derivable en el punt a, aquestes propietats de creixement o decreixement estan relacionades amb el valor de la derivada en aquest punt, com afirmen els teoremes següents.

TEOREMA: Si $f'(a) > 0$, aleshores f és *estrictament creixent* en el punt a.

> DEMOSTRACIÓ: si f és derivable en el punt a, també és contínua en aquest punt. Llavors, la funció $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ també és contínua en el punt a. Com que el seu valor en aquest punt, $f'(a)$, és estrictament positiu, per continuïtat també ho és en algun entorn. $\diamondsuit$

Cal notar que el recíproc no és cert, una funció pot ser estrictament creixent en un punt sense que la derivada en aquest punt sigui estrictament positiva.

Només podem afirmar que la derivada no és negativa, però això també ho podem afirmar si la funció és només creixent en el punt a. El teorema següent ho explicita.

TEOREMA: Si f és *creixent* i *derivable* en el punt a, aleshores $f'(a) \geq 0$.

> DEMOSTRACIÓ: ara es compleix que $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \geq 0$ en algun entorn de a i, per tant, el límit quan $x \to a$ de l'expressió anterior, $f'(a)$, també compleix la desigualtat. $\diamondsuit$

El recíproc tampoc és cert, que el valor de la derivada en un punt sigui no negatiu no és suficient per garantir el creixement de la funció.

Similarment tenim:

TEOREMA: Si $f'(a) < 0$, aleshores f és *estrictament decreixent* en el punt a.

TEOREMA: Si f és *decreixent* i *derivable* en el punt a, aleshores $f'(a) \leq 0$.

Màxims i mínims relatius

DEFINICIÓ: f té un *màxim relatiu* en el punt a si en algun entorn d'aquest punt es compleix $f(x) \leq f(a)$.

DEFINICIÓ: Similarment, f té un *mínim relatiu* en el punt a si en algun entorn d'aquest punt es compleix $f(x) \geq f(a)$.

Si, a més, la funció és derivable en aquest punt, es pot afirmar el següent:

TEOREMA: Si f té un màxim o un mínim relatiu en el punt a i f és derivable en aquest punt, aleshores $f'(a) = 0$.

> DEMOSTRACIÓ: si f té un màxim o un mínim relatiu en el punt a, no pot ser ni estrictament creixent ni estrictament decreixent en aquest punt. Llavors, $f'(a)$ no pot ser estrictament positiu ni estrictament negatiu i, per tant, ha de ser zero. $\diamondsuit$

Novament, el recíproc no és cert. La derivada pot ser zero en un punt i, no obstant això, la funció ser creixent o decreixent (fins i tot, estrictament) en aquest punt i no haver-hi, per tant, ni màxim ni mínim relatius.

4.6 Teoremes del valor mitjà

Teorema del valor mitjà de Rolle

TEOREMA: Si f és contínua a l'interval $[a,b]$ i derivable al seu interior, i es compleix $f(a)=f(b)$, aleshores $\exists c \in (a,b)$ on $f'(c)=0$.

DEMOSTRACIÓ: com que f és contínua a $[a,b]$ i aquest interval és compacte, $f\left([a,b]\right)$ també és compacte i ha de tenir màxim i mínim. Hi ha dues possibilitats:

1) que el màxim i mínim coincideixin amb $f(a)=f(b)$. Llavors f és constant i $f'(x)=0$, $\forall x \in (a,b)$.
2) en cas contrari hi ha d'haver un màxim o un mínim relatiu a l'interior de $[a,b]$. En aquest punt f' s'ha d'anul·lar. $\diamondsuit$

Teorema del valor mitjà de Cauchy

TEOREMA: Si f i g són contínues a l'interval $[a,b]$ i derivables en el seu interior, es compleix $g(a)\neq g(b)$ i $f'(x)$ i $g'(x)$ no s'anul·len simultàniament en cap punt de l'interior de $[a,b]$, aleshores $\exists c \in (a,b)$ on es compleix

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}\,.$$

DEMOSTRACIÓ: amb $f(x)$ i $g(x)$ construïm la funció

$$F(x) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{vmatrix} f(x) & g(x) & 1 \\ f(a) & g(a) & 1 \\ f(b) & g(b) & 1 \end{vmatrix}$$

$$= [f(b)-f(a)]\,g(x) - [g(b)-g(a)]\,f(x) + [f(a)g(b)-f(b)g(a)],$$

que és contínua a l'interval $[a,b]$ i derivable al seu interior. A més, compleix $F(a)=F(b)$ i, d'acord amb el teorema de Rolle, $\exists c \in (a,b)$ on $F'(c)=0$, és a dir,

$$\big[f(b)-f(a)\big]g'(c) - \big[g(b)-g(a)\big]f'(c) = 0.$$

Com que per hipòtesi $g(b)-g(a)\neq 0$, també tenim $g'(c)\neq 0$, ja que en cas contrari, d'acord amb aquesta igualtat, $f'(c)$ també hauria de ser zero (en contradicció amb la hipòtesi que $f'(x)$ i $g'(x)$ no s'anul·len simultàniament). Això ens permet reescriure la igualtat en la forma

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}\,. \quad \diamondsuit$$

Teorema del valor mitjà de Lagrange

TEOREMA: Si f és contínua a l'interval $[a, b]$ i derivable al seu interior, aleshores $\exists c \in (a, b)$ on es compleix

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$

DEMOSTRACIÓ: és un cas particular del teorema anterior. Només cal prendre $g(x) = x$. $\diamondsuit$

Teorema del valor intermedi de la derivada

TEOREMA: Si f és derivable a l'interval (a, b), x_1 i x_2 són dos punts de (a, b) en els quals $f'(x)$ pren valors *diferents*, i λ està entre $f'(x_1)$ i $f'(x_2)$, aleshores $\exists c$ entre x_1 i x_2 on es compleix $f'(c) = \lambda$.

DEMOSTRACIÓ: suposem que $x_1 < x_2$ i que $f'(x_1) < f'(x_2)$ (el raonament en el cas que $f'(x_1) > f'(x_2)$ és molt semblant). Considerem la funció $g(x) \stackrel{\text{def}}{=} f(x) - \lambda x$, la derivada de la qual és $g'(x) = f'(x) - \lambda$. Com que, per hipòtesi, $f'(x_1) < \lambda < f'(x_2)$, tenim $g'(x_1) < 0 < g'(x_2)$, és a dir, g és estrictament decreixent a x_1 i estrictament creixent a x_2. Per tant, g ha de tenir un mínim relatiu en algun punt $c \in (x_1, x_2)$. En aquest punt tindrem $g'(c) = 0$, és a dir, $f'(c) = \lambda$. $\diamondsuit$

Aquest resultat ens diu que tots els valors compresos entre $f'(x_1)$ i $f'(x_2)$ són assolits per la derivada f' en algun punt entre x_1 i x_2, i això té una conseqüència interessant:

COROL·LARI: Les funcions derivada no poden tenir discontinuïtats *de salt*.

4.7 Conseqüències dels teoremes del valor mitjà

Els teoremes anteriors garanteixen l'existència de punts a l'interior de l'interval $[a, b]$ on es compleixen les igualtats indicades, però no especifiquen quins són aquests punts. Tanmateix, d'aquests teoremes se n'extreuen conseqüències interessants.

1) Creixement i decreixement en un interval

TEOREMA: Si f és derivable a l'interval (a,b), aleshores

f és *creixent* a (a,b) si i només si $f'(x) \geq 0$, $\forall x \in (a,b)$.

f és *decreixent* a (a,b) si i només si $f'(x) \leq 0$, $\forall x \in (a,b)$.

DEMOSTRACIÓ: ja hem vist que si una funció és creixent en un punt, la seva derivada en aquest punt no pot ser negativa. Això val, doncs, per a tots els punts de l'interval.

El recíproc, en canvi, no es complia en un punt, però sí que es compleix en un interval. Només cal escollir dos punts x_1 i x_2 de l'interval (a,b) (amb $x_1 < x_2$). D'acord amb el teorema del valor mitjà de Lagrange, hi ha algun punt c entre x_1 i x_2 tal que

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1).$$

Com que $(x_2 - x_1) > 0$ i, per hipòtesi, $f'(c) \geq 0$, tenim que $f(x_2) - f(x_1) \geq 0$, és a dir, $f(x_2) \geq f(x_1)$. La funció és, doncs, creixent a (a,b), ja que els punts x_1 i x_2 han estat escollits arbitràriament. El cas d'una funció decreixent es raona de manera similar. $\diamondsuit$

Així doncs, per a les funcions derivables, "creixement" no és equivalent a "derivada no negativa" *en un punt*, però sí que ho és *en un interval.* El mateix passa amb el decreixement.

2) Derivada nul·la i funció constant

TEOREMA: Si f és derivable a l'interval (a,b), aleshores

f és *constant* a (a,b) si i només si $f'(x) = 0$, $\forall x \in (a,b)$.

DEMOSTRACIÓ: ja hem vist que la derivada d'una funció constant és zero. Ens cal, només, demostrar el recíproc. Novament, escollim dos punts x_1 i x_2 de l'interval (a,b) (suposem també que $x_1 < x_2$). D'acord amb el teorema del valor mitjà de Lagrange, hi ha algun punt c entre x_1 i x_2 tal que

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1).$$

Com que $(x_2 - x_1) > 0$ i, per hipòtesi, $f'(c) = 0$, tenim que $f(x_2) - f(x_1) = 0$, és a dir, $f(x_2) = f(x_1)$. La funció és, doncs, constant a (a,b), ja que els punts x_1 i x_2 han estat escollits arbitràriament. $\diamondsuit$

3) Regles de L'Hôpital

Amb aquest nom s'apleguen diversos teoremes que són de gran utilitat per al càlcul de límits de funcions. Recordem, abans, que si $\lim_{x\to a} f(x) = A$ i $\lim_{x\to a} g(x) = B$, amb $B \neq 0$, aleshores $\lim_{x\to a} [f(x)/g(x)] = A/B$.

La situació és més complicada quan $B = 0$. En aquest cas, si $A \neq 0$, el límit anterior és $\pm\infty$, però si també $A = 0$, llavors $\lim_{x\to a} [f(x)/g(x)]$ pot tenir qualsevol valor. Per exemple, si k és un nombre real qualsevol, $f(x) = kx$ i $g(x) = x$, els límits quan $x \to 0$ són $A = B = 0$, però $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = k$. D'altra banda, si $f(x) = x$ i $g(x) = x^3$, tenim també $A = B = 0$, però ara $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$. En canvi, si $f(x) = x$ i $g(x) = x^2$, tenim $\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$ mentre que $\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty$.

El cas $A = B = 0$ és un exemple del que s'anomena *indeterminació*. A part de les indeterminacions del tipus $0/0$, hi ha també les de tipus ∞/∞, $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, 0^0, ∞^0 i 1^∞. Les regles de L'Hôpital permeten resoldre moltes de les indeterminacions dels tipus $0/0$ i ∞/∞.

- **El cas** $0/0$

TEOREMA: Si f i g són contínues i derivables en un entorn del punt a, $f(a) = g(a) = 0$, g i g' no s'anul·len mai en aquest entorn (llevat de g en el punt a), i es compleix $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell$, aleshores

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell.$$

DEMOSTRACIÓ: com que $f(a) = g(a) = 0$, d'acord amb el teorema del valor mitjà de Cauchy, hi ha un punt ξ entre x i a on es compleix

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}\,.$$

Quan $x \to a$, també $\xi \to a$ i, per tant,

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{\xi\to a} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \ell. \quad \diamondsuit$$

Sobre aquest teorema cal fer les observacions següents:

- El teorema també és vàlid quan $\ell = \pm\infty$.
- Si les hipòtesis anteriors es compleixen en un entorn de la dreta (o de l'esquerra) del punt a i f és contínua en aquest punt, el teorema també és vàlid si substituïm $\lim_{x\to a}$ per $\lim_{x\to a^\pm}$.

- L'existència de $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ *no implica* l'existència de $\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$. Pot existir el primer i no el segon. El que el teorema afirma és que en una indeterminació del tipus $0/0$, si el segon límit existeix, aleshores el primer també existeix i tots dos coincideixen.

El teorema es pot generalitzar al cas en què $a=\pm\infty$:

TEOREMA: Si f i g són contínues i derivables en algun entorn de $+\infty$, $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} g(x)=0$, g i g' no s'anul·len mai en aquest entorn, i $\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\ell$, aleshores

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\ell.$$

DEMOSTRACIÓ: aquest cas es redueix a l'anterior fent $x=1/t$. Si definim $F(t)\overset{\text{def}}{=}f(1/t)$ i $G(t)\overset{\text{def}}{=}g(1/t)$, tenim

$$\lim_{t\to0^+}F(t)=\lim_{t\to0^+}G(t)=0,$$

i també

$$F'(t)=f'(1/t)(-1/t^2),\quad G'(t)=g'(1/t)(-1/t^2).$$

Per tant,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{t\to0^+}\frac{F(t)}{G(t)}&=\lim_{t\to0^+}\frac{F'(t)}{G'(t)}\\ &=\lim_{t\to0^+}\frac{f'(1/t)}{g'(1/t)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\ell.\quad\diamondsuit\end{aligned}$$

EXEMPLE: Si $f(x)=1-\cos x$ i $g(x)=(\sin x)^2$, el límit $\lim_{x\to0}f(x)/g(x)$ és una indeterminació del tipus $0/0$, però

$$\lim_{x\to0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{2\sin x\cos x}=\lim_{x\to0}\frac{1}{2\cos x}=\frac{1}{2}\,.$$

Per tant, $\lim_{x\to0}f(x)/g(x)=1/2$.

• El cas ∞/∞

TEOREMA: Si f i g són contínues i derivables en un interval obert (a,b), g i g' no s'anul·len en aquest interval, i es compleix que $\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^+} g(x) = \pm\infty$ i que $\lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell$, aleshores

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell.$$

DEMOSTRACIÓ: com que $\lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell$, donat $\varepsilon > 0$ hi haurà un $\delta > 0$ tal que

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} \in \mathcal{E}(\ell,\varepsilon),\ \forall x \in (a, a+\delta).$$

Escollim un punt $c \in (a, a+\delta)$ tal que $f(c) \neq 0$ (sempre el podrem trobar, ja que f tendeix cap a $\pm\infty$ quan $x \to a^+$). Considerem ara un interval $(a, a+\delta')$, a l'esquerra de c (és a dir, $a < a+\delta' < c < a+\delta$), en el qual $f(x) \neq f(c)$ i $g(x) \neq g(c)$ (també el podrem trobar, ja que f i g tendeixen cap a $\pm\infty$ quan $x \to a^+$). Fem servir ara la identitat

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)-f(c)}{g(x)-g(c)} \cdot \frac{1-g(c)/g(x)}{1-f(c)/f(x)},\ \forall x \in (a, a+\delta').$$

D'acord amb el teorema del valor mitjà de Cauchy, hi ha un punt ξ entre x i c tal que

$$\frac{f(x)-f(c)}{g(x)-g(c)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Per tant,

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \cdot \frac{1-g(c)/g(x)}{1-f(c)/f(x)},\ \forall x \in (a, a+\delta').$$

Si prenem el límit quan $x \to a^+$, mantenint c fixat, tenim que

- el terme $\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$ es manté dins de $\mathcal{E}(\ell,\varepsilon)$, ja que $\xi \in (x,c) \subset (a, a+\delta)$,
- el límit de $\frac{1-g(c)/g(x)}{1-f(c)/f(x)}$ és 1, ja que $f(x)$ i $g(x)$ tendeixen cap a $\pm\infty$.

Així doncs,

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} \in \mathcal{E}(\ell,\varepsilon),$$

i com que ε és arbitrari, tenim $\lim\limits_{x\to a^+} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \ell$. $\diamondsuit$

Exemple: Calculem $\lim_{x\to 0^+} f(x)/g(x)$, on $f(x) = \ln x$ i $g(x) = \ln(\ln x)$. Aquest límit és una indeterminació del tipus ∞/∞, però

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1/x}{(1/\ln x)(1/x)} = \lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty.$$

Per tant, $\lim_{x\to 0^+} f(x)/g(x) = -\infty$.

• **Els casos** $0\cdot\infty$, $\infty-\infty$, 0^0, ∞^0 **i** 1^∞

La resta d'indeterminacions, es poden reduir als casos $0/0$ o ∞/∞:

$0\cdot\infty$	$\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$	$\lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$	$\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x) = \lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{1/g(x)} = \frac{0}{0}$
$\infty-\infty$	$\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$	$\lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$	$\lim\limits_{x\to a} [f(x)-g(x)]$ $= \lim\limits_{x\to a} \frac{[1/g(x)]-[1/f(x)]}{[1/f(x)g(x)]} = \frac{0}{0}$
0^0	$\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$	$\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$	$\lim\limits_{x\to a} f(x)^{g(x)} = \lim\limits_{x\to a} e^{g(x)\ln f(x)}$ $= \exp\left[\lim\limits_{x\to a} g(x)\ln f(x)\right] = e^{0\cdot\infty}$
∞^0	$\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$	$\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$	$\lim\limits_{x\to a} f(x)^{g(x)} = \lim\limits_{x\to a} e^{g(x)\ln f(x)}$ $= \exp\left[\lim\limits_{x\to a} g(x)\ln f(x)\right] = e^{0\cdot\infty}$
1^∞	$\lim\limits_{x\to a} f(x) = 1$	$\lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$	$\lim\limits_{x\to a} f(x)^{g(x)} = \lim\limits_{x\to a} e^{g(x)\ln f(x)}$ $= \exp\left[\lim\limits_{x\to a} g(x)\ln f(x)\right] = e^{\infty\cdot 0}$

4.8 Fórmula de Taylor

Ja hem vist que quan una funció és derivable en un punt, existeix una única recta (la recta tangent) amb la propietat d'ajustar-se millor que les altres rectes al gràfic de la funció en aquest punt. El significat de la frase "ajustar-se millor" és que la diferència entre la funció i aquesta recta és un infinitèsim d'ordre *superior* a 1. D'altra banda, si la funció no és derivable en el punt, no hi ha cap recta amb aquesta propietat (no hi ha recta tangent).

Podem preguntar-nos si aquest "ajust" és millorable quan la funció té derivades d'ordre superior en el punt considerat. És evident que si únicament considerem rectes, és a dir, funcions polinòmiques de grau 1, no és possible millorar l'ajust aconseguit amb la recta tangent, ja que aquesta, quan existeix, és única. Però si considerem altres tipus de funcions, podrem trobar ajustos millors.

Contacte d'ordre superior a n

DEFINICIÓ: Diem que dues funcions f i g tenen un *contacte d'ordre superior* a n en el punt a si $f(x) - g(x)$ és un infinitèsim d'ordre superior a n quan $x \to a$, és a dir,

$$f(x) - g(x) = \mathrm{o}\,[(x-a)^n],$$

o, equivalentment,

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - g(x)}{(x-a)^n} = 0.$$

També diem, llavors, que g és una *aproximació d'ordre superior* a n de la funció f en el punt a.

D'acord amb aquesta definició, si f és derivable en el punt a, la recta tangent té un contacte d'ordre superior a 1 amb f en aquest punt (i és, per tant, una aproximació d'ordre superior a 1 de f en el punt a).

El següent teorema ens dona una condició necessària i suficient perquè dues funcions f i g, derivables n vegades en el punt a, tinguin un contacte d'ordre superior a n en aquest punt:

TEOREMA: Si les funcions f i g són derivables n vegades en el punt a, aleshores tenen contacte d'ordre superior a n en aquest punt si i només si

$$f^{(k)}(a) = g^{(k)}(a), \quad (k = 0, 1, 2, \ldots n),$$

on $f^{(k)}$ és la derivada k-èsima de f i $f^{(0)}$ és f sense derivar.

DEMOSTRACIÓ: primer de tot cal notar que l'existència de $f^{(n)}(a)$ significa que $f, f', f'', \ldots, f^{(n-1)}$ existeixen en algun entorn del punt a i són contínues en aquest punt. Llavors, si en el punt a, el contacte entre f i g és d'ordre superior a n, també serà superior a k, $\forall k \leq n$, és a dir,

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-g(x)}{(x-a)^k} = 0, \quad (k = 0, 1, 2, \ldots n).$$

Per a $k = 0$ això vol dir que $\boxed{f(a) = g(a).}$

Per a $k = 1$, usant la regla de L'Hôpital tenim

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{x\to a} \frac{f(x)-g(x)}{(x-a)} = \frac{0}{0} \\ &= \lim_{x\to a} \frac{f'(x)-g'(x)}{1} = f'(a) - g'(a) \Rightarrow \boxed{f'(a) = g'(a).} \end{aligned}$$

Per a $k = 2$, tenim

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{x\to a} \frac{f(x)-g(x)}{(x-a)^2} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)-g'(x)}{2(x-a)} = \frac{0}{0} \\ &= \lim_{x\to a} \frac{f''(x)-g''(x)}{2} = \frac{f''(a)-g''(a)}{2} \Rightarrow \boxed{f''(a) = g''(a).} \end{aligned}$$

Per a $k = 3, 4, \ldots (n-1)$ raonem de manera semblant i tenim

$$\boxed{f^{(3)}(a) = g^{(3)}(a), \quad f^{(4)}(a) = g^{(4)}(a), \ldots \quad f^{(n-1)}(a) = g^{(n-1)}(a).}$$

Finalment, per a $k = n$, tenim

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{x\to a} \frac{f(x)-g(x)}{(x-a)^n} = \frac{0}{0} = \ldots = \lim_{x\to a} \frac{f^{(n-1)}(x)-g^{(n-1)}(x)}{n!(x-a)} \\ &= \lim_{x\to a} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(a) - g^{(n-1)}(x) + g^{(n-1)}(a)}{n!(x-a)} \\ &= \frac{1}{n!}[f^{(n)}(a) - g^{(n)}(a)] \Rightarrow \boxed{f^{(n)}(a) = g^{(n)}(a).} \end{aligned}$$

Notem que en aquest darrer cas no hem pogut usar la regla de L'Hôpital al final de la primera línia, ja que, d'acord amb la hipòtesi, només tenim garantida la derivabilitat de $f^{(n-1)}$ en el punt a, però no en un entorn d'aquest punt. Hem demostrat, doncs, la necessitat de la condició enunciada.

Pel que fa a la suficiència, només cal notar que si es compleixen les igualtats $f^{(k)}(a) = g^{(k)}(a)$, $(k = 0, 1, 2, \ldots n)$, tenim

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-g(x)}{(x-a)^n} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)-g'(x)}{n(x-a)^{n-1}} = \frac{0}{0} = \cdots$$

$$\cdots = \lim_{x\to a} \frac{f^{(n-1)}(x)-g^{(n-1)}(x)}{n!(x-a)} = \frac{f^{(n)}(a)-g^{(n)}(a)}{n!} = 0,$$

és a dir, f i g tenen contacte d'ordre superior a n al punt a. $\diamondsuit$

Així doncs, dues funcions derivables n vegades tenen contacte d'ordre superior a n en un punt si i només si els valors de les funcions i els de les seves primeres n derivades coincideixen en aquell punt. Utilitzarem aquest resultat per obtenir aproximacions *polinòmiques* d'ordre superior a n de la funció f.

Polinomi de Taylor de grau n

Si f és n vegades derivable en el punt a, busquem el polinomi $P_n(x)$, de grau n, que millor s'ajusti a f en aquest punt. Com que el contacte ha de ser d'ordre superior a n s'haurà de complir $P_n^{(k)}(a) = f^{(k)}(a)$, per $k = 0, 1, 2, \ldots n$. Si escrivim $P_n(x)$ en la forma

$$P_n(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + c_3(x-a)^3 + \cdots + c_n(x-a)^n,$$

les igualtats anteriors s'expressen

$$c_0 = f(a), \quad c_1 = f'(a), \quad 2c_2 = f''(a), \quad 6c_3 = f'''(a), \quad \ldots \quad n!c_n = f^{(n)}(a),$$

és a dir,

$$c_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}, \quad (k = 0, 1, 2, \ldots n).$$

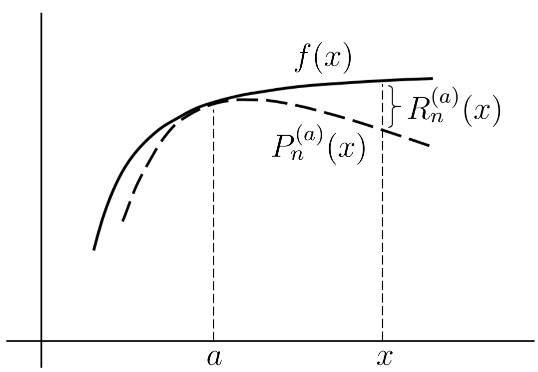
Així doncs, la condició de tenir un contacte d'ordre superior a n en el punt a ens ha determinat completament el polinomi $P_n(x)$

$$\boxed{P_n^{(a)}(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.}$$

Aquest polinomi s'anomena el *Polinomi de Taylor* de grau n associat a la funció f en el punt a. És el polinomi de grau n que millor s'ajusta, en el punt a, a una funció n vegades derivable en aquest punt. De fet, el grau de $P_n^{(a)}(x)$ és *menor o igual* a n perquè, malgrat que en principi és de grau n, no es pot excloure que el valor del seu coeficient c_n sigui, finalment, zero.

La diferència entre f i $P_n^{(a)}$ s'anomena *resta* o *terme complementari* i la representem per $R_n^{(a)}(x)$. Per definició, aquest terme complementari ha de ser un infinitèsim d'ordre *superior* a n quan $x \to a$, és a dir,

$$R_n^{(a)}(x) \overset{\text{def}}{=} f(x) - P_n^{(a)}(x) = \mathrm{o}\left[(x-a)^n\right].$$



Exemples: Els polinomis de Taylor de grau ≤ 7 de les funcions següents, al voltant del punt $a = 0$, són:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + R_7^{(0)}(x),$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + R_7^{(0)}(x),$$

$$\sinh x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + R_7^{(0)}(x),$$

$$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + R_7^{(0)}(x),$$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^7}{7!} + R_7^{(0)}(x),$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + x^6 - x^7 + R_7^{(0)}(x),$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} + \frac{x^7}{7} + R_7^{(0)}(x),$$

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + R_7^{(0)}(x),$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + R_7^{(0)}(x).$$

El teorema següent afirma que si f és derivable una vegada més en algun entorn del punt a, $R_n^{(a)}(x)$ és un infinitèsim d'ordre *igual o superior* a $(n+1)$.

Teorema de la Fórmula de Taylor

Teorema: Si f és $n+1$ vegades derivable en algun entorn del punt a, i x és un punt d'aquest entorn, aleshores $f(x) = P_n^{(a)}(x) + R_n^{(a)}(x)$, on $R_n^{(a)}(x)$ s'expressa:

- $\exists c$, entre a i x, tal que $R_n^{(a)}(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$ (resta de Lagrange),
- $\exists c'$, entre a i x, tal que $R_n^{(a)}(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(c')}{n!}(x-a)(x-c')^n$ (resta de Cauchy).

Demostració: fixem el punt x i definim la funció

$$F(t) \stackrel{\text{def}}{=} f(x)-f(t)-\frac{f'(t)}{1!}(x-t)-\frac{f''(t)}{2!}(x-t)^2-\ldots-\frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n.$$

Aquesta funció compleix

- el seu valor a $t=a$ és $F(a)=R_n^{(a)}(x)$,
- el seu valor a $t=x$ és $F(x)=0$,
- la seva derivada és

$$F'(t)=-\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n.$$

D'altra banda, si $g(t)$ és una funció arbitrària amb les propietats

- $g(x)\neq g(a)$,
- $g(t)$ és derivable entre a i x,
- $g'(t)$ no s'anul·la entre a i x,

podem utilitzar el teorema del valor mitjà de Cauchy, segons el qual $\exists c$, entre a i x, tal que

$$\frac{F(x)-F(a)}{g(x)-g(a)}=\frac{F'(c)}{g'(c)}\,.$$

Si aïllem $F(a)$ i fem servir les propietats anteriors de F i de g tenim

$$R_n^{(a)}(x)=F(a)=\frac{g(x)-g(a)}{g'(c)}\,\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}\,(x-c)^n.$$

Per a cada elecció de la funció $g(t)$, la igualtat anterior ens dona una expressió del terme complementari $R_n^{(a)}(x)$. En particular,

- Si $g(t)=(x-t)^{n+1}$, obtenim la resta de Lagrange.
- Si $g(t)=(x-t)$, obtenim la resta de Cauchy. $\diamondsuit$

Cal notar que no coneixem el valor exacte de les restes anteriors, ja que depenen d'un punt del qual només sabem que està entre a i x. No obstant això, podem afirmar que $R_n^{(a)}(x)$ és un infinitèsim d'ordre *igual o superior* a $(n+1)$ (només cal observar la forma de la resta de Lagrange). Així doncs, si f és $n+1$ vegades derivable en algun entorn del punt a, la igualtat $R_n^{(a)}(x)=\mathrm{o}\left[(x-a)^n\right]$ de la secció precedent es pot escriure

$$R_n^{(a)}(x)=\mathrm{O}\left[(x-a)^{n+1}\right].$$

La resta permet estimar l'error que es comet quan una funció és aproximada pel polinomi de Taylor.

Exemple: La fórmula de Taylor de grau n de la funció $f(x) = e^x$ en el punt $a = 0$ és $e^x = P_n^{(0)}(x) + R_n^{(0)}(x)$. Els coeficients del polinomi $P_n^{(0)}(x)$ són $f^{(k)}(0)/k! = 1/k!$, on $k = 0, 1, 2, \dots n$, ja que les derivades successives de $f(x)$ són $f^{(k)}(x) = e^x$, $\forall k$. D'altra banda, la resta de Lagrange és $R_n^{(0)}(x) = e^c x^{n+1}/(n+1)!$, on c està entre 0 i x, i el podem expressar $c = \lambda x$, on $0 < \lambda < 1$. Per tant, tenim

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \frac{e^{\lambda x} x^{n+1}}{(n+1)!}, \quad (0 < \lambda < 1).$$

Podem fer servir aquesta igualtat per trobar un valor aproximat del nombre e. Si fem $x = 1$ tenim

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{e^\lambda}{(n+1)!}, \quad (0 < \lambda < 1).$$

Per exemple, si prenem $n = 6$,

$$e = \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!}\right) + \frac{e^\lambda}{7!} = 2{,}71805\ldots + \frac{e^\lambda}{7!}.$$

Com que $e^\lambda \le e < 3$, l'error que cometem si prenem $e = 2{,}71805\ldots$ és menor que $3/7! = 0{,}00023\ldots$ Si volguéssim, per exemple, que l'error fos $< 10^{-6}$, hauríem de fer servir n tal que $3/(n+1)! < 10^{-6}$, és a dir, $(n+1)! > 3 \times 10^6$. Això s'aconsegueix prenent $n \ge 9$. Si prenem $n = 9$, tenim $e = \sum_{k=0}^{9}(1/k!) = 2{,}72828152\ldots$ amb un error $< 3/10! = 8{,}267\ldots \times 10^{-7}$.

Si $f(x)$ és indefinidament derivable, la fórmula de Taylor és vàlida per a tot n. D'altra banda, l'exemple anterior sembla suggerir que l'aproximació de $f(x)$ pel polinomi $P_n^{(a)}(x)$ millora quan augmentem n, però no és necessàriament així. Això només passa per als valors de x per als quals $\lim_{n\to\infty} R_n^{(a)}(x) = 0$.

Exemple: A l'exemple anterior tenim $R_n^{(0)}(x) = e^{\lambda x} x^{n+1}/(n+1)!$, amb $\lambda \in [0, 1]$. Com que $e^{\lambda x} < e^x$ si $x > 0$, i $e^{\lambda x} \le 1$ si $x \le 0$, per a tot x tenim $|R_n^{0)}(x)| \le \max\{e^x, 1\}|x|^{n+1}/(n+1)! \xrightarrow{n\to\infty} 0$, i l'aproximació de e^x per $P_n^{(0)}(x)$ millora $\forall x$ si augmentem n. D'això es dedueix que $\lim \left\{ \sum_{k=0}^{n} 1/k! \right\} = e$.

4.9 Concavitat, convexitat i punts d'inflexió

DEFINICIÓ: Una funció f, derivable en el punt a, és *còncava* en aquest punt si en algun entorn seu es compleix

$$f(x) - [f(a) + f'(a)(x-a)] > 0,$$

la qual cosa significa que, en aquest entorn, la recta tangent en el punt a està *sota* del gràfic de $f(x)$.

DEFINICIÓ: Una funció f, derivable en el punt a, és *convexa* en aquest punt si en algun entorn seu es compleix

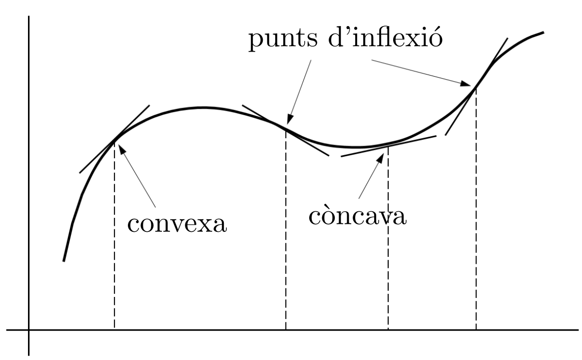
$$f(x) - [f(a) + f'(a)(x-a)] < 0,$$

la qual cosa significa que, en aquest entorn, la recta tangent en el punt a està *sobre* del gràfic de $f(x)$.

DEFINICIÓ: Si f és derivable en el punt a, diem que a és un *punt d'inflexió* de f si en algun entorn d'aquest punt es compleix

$$f(x) - [f(a) + f'(a)(x-a)] \begin{cases} > 0 & \text{si } x > a \\ < 0 & \text{si } x < a \end{cases} \qquad \text{(o viceversa)},$$

la qual cosa significa que, en aquest entorn, $f(x)$ és convexa a un costat del punt a i còncava a l'altre.



El teorema següent relaciona aquests conceptes amb les derivades successives de la funció f en el punt a.

Teorema: Sigui f una funció derivable n vegades en el punt a. Si es compleix

$$f''(a) = f'''(a) = \ldots = f^{(n-1)}(a) = 0, \quad \text{però } f^{(n)}(a) \neq 0,$$

aleshores,

- si n és *parell* i $f^{(n)}(a) > 0 \Rightarrow f$ és *còncava* al punt a (si, a més, $f'(a) = 0 \Rightarrow f$ té un *mínim relatiu* en aquest punt),
- si n és *parell* i $f^{(n)}(a) < 0 \Rightarrow f$ és *convexa* al punt a (si, a més, $f'(a) = 0 \Rightarrow f$ té un *màxim relatiu* en aquest punt),
- si n és *senar* $\Rightarrow a$ és un *punt d'inflexió* de f.

Demostració: si fem servir la fórmula de Taylor tenim

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n^{(a)}(x).$$

Com que $R_n^{(a)}(x) = \mathrm{o}\big[(x-a)^n\big]$ el podem expressar

$$R_n^{(a)}(x) = \alpha(x)(x-a)^n,$$

on $\alpha(x) \to 0$ quan $x \to a$. Per tant,

$$f(x) - [f(a) + f'(a)(x-a)] = \left[\frac{f^{(n)}(a)}{n!} + \alpha(x)\right](x-a)^n,$$

i com que $\lim_{x\to a} \alpha(x) = 0$, en algun entorn de a es compleix que

$$\frac{f^{(n)}(a)}{n!} + \alpha(x) \text{ té el mateix signe que } \frac{f^{(n)}(a)}{n!}.$$

D'altra banda, $(x-a)^n \geq 0$ quan n és parell, mentre que quan n és senar, $(x-a)^n$ és positiu si $x > a$ i negatiu si $x < a$. $\diamondsuit$

4.10 Problemes

P4.1 Calculeu les derivades de les funcions següents:

(a) $f_1(x) = (x^2 - 2)(x^3 + 1)$
(b) $f_2(x) = (x^2 + 2)/(x + 1)$
(c) $f_3(x) = xe^{-x}$
(d) $f_4(x) = (x^3 + 2)^5$
(e) $f_5(x) = x^2 e^{\sin x}$
(f) $f_6(x) = \sin(\sinh x)$

P4.2 Calculeu les derivades de les funcions següents:

(a) $f(x) = e^{-e^x}$
(b) $g(x) = x^{2^2} + 2^{x^2} + 2^{2^x}$, $(x > 0)$

[Nota: a^{b^c} vol dir $a^{(b^c)}$. Recordeu que $a^b = e^{b \ln a}$ $(a > 0)$.]

P4.3 Feu servir el teorema del valor mitjà de Rolle per demostrar que la funció $f(x) = x^4 - 4x + a$ no es pot anul·lar dues vegades a l'interval $[0, 1]$, per a cap valor de a.

P4.4 Feu servir el teorema del valor mitjà de Lagrange per demostrar

(a) $|\cos x - \cos y| \le |x - y|$
(b) $\tan x > x$, $\forall x \in (0, \pi/2)$

P4.5 Feu servir la regla de L'Hôpital per calcular els límits següents:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x - \sinh x}{1 - \cosh x}$
(b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} x \cot(2x)$
(c) $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{\ln(x/2)}{x - 2}$
(d) $\displaystyle\lim_{x\to \pi/2^-} \frac{\tan(3x)}{\tan x}$
(e) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} (\tan x)^{1/\ln x}$
(f) $\displaystyle\lim_{x\to 0} [\ln(1 - x)]^{-x}$

P4.6 Considereu les funcions $f(x) = \ln(1+x)$, $g(x) = ax^2+bx+c$. Determineu a, b i c perquè les funcions tinguin contacte d'ordre superior a 2 en el punt $x = 1$.

P4.7 Feu servir els polinomis de Taylor adients, al voltant de $x = 0$ (vegeu pàgina 98), per calcular

$$\lim_{x\to 0} \frac{(x - \sinh x)^2}{[\ln(1 + x) - x]^3}\,.$$

P4.8 Trobeu el polinomi de Taylor de grau 2, al voltant del punt $x = 16$, de la funció $f(x) = \sqrt[4]{x}$ i feu-lo servir per calcular aproximadament el valor de $\sqrt[4]{17}$. Amb el terme complementari feu una estimació de l'error comès.

P4.9 Considereu les funcions

(a) $f(x) = \sin x$ (b) $g(x) = \ln(1+x)$

Si fem servir els polinomis de Taylor, al voltant de $x = 0$, per avaluar aquestes funcions, determineu quants termes dels polinomis són necessaris per avaluar $\sin(1)$ i $\ln(1{,}9)$ amb un error inferior a 10^{-4}.

P4.10 Considereu la funció $f(x) = x/(x^2+2)$. Trobeu:

(a) Els màxims i mínims relatius, i els punts d'inflexió.

(b) Els intervals de creixement i decreixement.

(c) Els intervals de concavitat i convexitat.

(d) El màxim i mínim absoluts a l'interval $[1,3]$.

Solucions

S4.1 (a) $f_1'(x) = 5x^4 - 6x^2 + 2x$ (d) $f_4'(x) = 15x^2(x^3+2)^4$

(b) $f_2'(x) = (x^2+2x-2)/(x+1)^2$ (e) $f_5'(x) = x(2 + x\cos x)e^{\sin x}$

(c) $f_3'(x) = (1-x)e^{-x}$ (f) $f_6'(x) = [\cos(\sinh x)]\cosh x$

S4.2 (a) $f'(x) = -e^x e^{-e^x}$

(b) $g'(x) = 4x^3 + 2^{x^2}2x\ln 2 + 2^{2^x}2^x(\ln 2)^2$

S4.3 Si s'anul·lés a $x_1, x_2 \in [0,1]$ (suposem $x_1 < x_2$) hi hauria algun punt $c \in (x_1, x_2)$ en el qual $f'(c) = 0$, però això és impossible, ja que $f'(x) = 4x^3 - 4$ només s'anul·la a $x = 1$.

S4.4 (a) $\exists c$, entre x i y, tal que $\cos x - \cos y = (-\sin c)(x-y) \Rightarrow |\cos x - \cos y| = |\sin c||x-y| \leq |x-y|$.

(b) Apliquem el teorema a l'interval $[0,x]$: $\exists c \in (0,x)$ tal que $\tan x = \tan x - \tan 0 = \tan'(c)(x-0)$. Com que $\tan'(c) = 1 + \tan^2 c > 1$, tenim $\tan x > x$.

S4.5 (a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x - \sinh x}{1 - \cosh x} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cosh x}{-\sinh x} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to 0} \frac{\sinh x}{\cosh x} = 0.$

(b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} x\cot(2x) = \lim_{x\to 0} \frac{x}{\tan(2x)} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos^2(2x)}{2} = 1/2.$

(c) $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{\ln(x/2)}{x-2} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to 2} \frac{1}{x} = 1/2.$

(d) $$\lim_{x\to\pi/2^-} \frac{\tan(3x)}{\tan x} = \lim_{x\to\pi/2^-} \frac{\sin(3x)}{\cos(3x)}\frac{\cos x}{\sin x} = \frac{0}{0}$$

$$= \lim_{x\to\pi/2^-} \frac{3\cos(3x)\cos x - \sin(3x)\sin x}{-3\sin(3x)\sin x + \cos(3x)\cos x} = 1/3.$$

(e) $\lim_{x\to 0^+}(\tan x)^{1/\ln x} = \infty^0 = e^{\lim_{x\to 0^+}\ln(\tan x)/\ln x}$.
Busquem el límit de l'exponent

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(\tan x)}{\ln x} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x\to 0^+} \frac{[1+(\tan x)^2]/\tan x}{1/x}$$
$$= \lim_{x\to 0^+} \left(\frac{x}{\tan x} + x\tan x\right) = 1.$$

Per tant, el límit buscat és $e^1 = e$.

(f) $\lim_{x\to 0}[\ln(1-x)]^{-x} = 0^0 = e^{\lim_{x\to 0}(-x)\ln[\ln(1-x)]}$.
Busquem el límit de l'exponent

$$\lim_{x\to 0}(-x)\ln[\ln(1-x)] = \lim_{x\to 0} \frac{\ln[\ln(1-x)]}{-1/x} = \frac{\infty}{\infty}$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{-(1-x)[\ln(1-x)]} = \frac{0}{0}$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{2x}{1+\ln(1-x)} = 0.$$

Per tant, el límit buscat és $e^0 = 1$.

S4.6 Si igualem $f(1) = g(1)$, $f'(1) = g'(1)$ i $f''(1) = g''(1)$ obtenim $a = -1/8$, $b = 3/4$ i $c = \ln 2 - (5/8)$.

S4.7 $$\frac{(x-\sinh x)^2}{[\ln(1+x)-x]^3} = \frac{[x-(x+\frac{x^3}{3!}+\cdots)]^2}{[(x-\frac{x^2}{2}+\cdots)-x]^3} = \frac{x^6[-\frac{1}{3!}+\cdots]^2}{x^6[-\frac{1}{2}+\cdots]^3} \xrightarrow{x\to 0} -\frac{2}{9}.$$

S4.8 Tenim $f(x) = x^{1/4}$, $f'(x) = \frac{1}{4}x^{-3/4}$, $f''(x) = \frac{-3}{16}x^{-7/4}$, $f'''(x) = \frac{21}{64}x^{-11/4}$. Si fem $x = 16$ tenim $f(16) = 2$, $f'(16) = \frac{1}{32}$, $f''(16) = \frac{-3}{2048}$. Per tant,

$$\sqrt[4]{x} = 2 + \frac{1}{32}(x-16) - \frac{3}{4096}(x-16)^2 + R_2^{(16)}(x).$$

El valor del polinomi a $x = 17$ és

$$\sqrt[4]{17} = 2 + \frac{1}{32} - \frac{3}{4096} = 2{,}03051757\ldots$$

El terme complementari és $R_2^{(16)}(x) = \frac{21}{64}c^{-11/4}\frac{(x-16)^3}{3!}$, on $16 < c < 17$. Per estimar l'error calculem

$$|R_2^{(16)}(17)| = \frac{21}{64}c^{-11/4}\frac{1}{3!} \leq \frac{21}{64}16^{-11/4}\frac{1}{3!} = 2{,}7 \times 10^{-5}.$$

S4.9 (a) $\sin x = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{2k-1}}{(2k-1)!}\, x^{2k-1} + R_{2n}^{(0)}(x).$

El primer sumand és el polinomi de Taylor de grau $2n-1$ i conté n termes, però també és el de grau $\leq 2n$, ja que el coeficient de x^{2n} és nul. Per això, el terme complementari és $R_{2n}^{(0)}(x)$ en comptes de $R_{2n-1}^{(0)}(x)$.

$$R_{2n}^{(0)}(x) = \frac{f^{(2n+1)}(c)x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \frac{(-1)^{2n+1}(\cos c)x^{2n+1}}{(2n+1)!}\,,$$

on c està entre 0 i x. Com que $|\cos c| \leq 1$, tenim

$$|R_{2n}^{(0)}(x)| \leq \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!}\,.$$

Per avaluar $\sin(1)$ fem $x = 1$, i si volem que l'error sigui $< 10^{-4}$ s'ha de complir

$$|R_{2n}^{(0)}(1)| \leq \frac{1}{(2n+1)!} < 10^{-4},$$

és a dir, $(2n+1)! > 10^4$, i això es compleix si $n \geq 4$. Ens cal, doncs, que el polinomi tingui 4 o més termes.

(b) $\ln(1+x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}\, x^k + R_n^{(0)}(x).$

El primer sumand és el polinomi de Taylor de grau n i conté n termes. El terme complementari és

$$R_n^{(0)}(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)x^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{(-1)^{n+1}n!(1+c)^{-(n+1)}x^{n+1}}{(n+1)!}\,.$$

Per avaluar $\ln(1{,}9)$ fem $x = 0{,}9 = 9/10$. Com que c està entre 0 i $9/10$, tenim $(1+c)^{-(n+1)} < 1$, amb la qual cosa

$$|R_n^{(0)}(0{,}9)| \leq \frac{(9/10)^{n+1}}{n+1} < 10^{-4},$$

és a dir, $(n+1)(10/9)^{n+1} > 10^4$, i això es compleix si $n \geq 50$. Ens cal, doncs, que el polinomi tingui 50 o més termes.

S4.10 Les derivades successives de $f(x)$ són

$$f'(x) = \frac{2-x^2}{(x^2+2)^2}\,, \quad f''(x) = \frac{2x(x^2-6)}{(x^2+2)^3}\,, \quad f'''(x) = \frac{-6(x^4-12x^2+4)}{(x^2+2)^4}\,.$$

La derivada primera $f'(x)$ s'anul·la a $x = \pm\sqrt{2}$. És positiva a $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ i és negativa a $(-\infty, -\sqrt{2})$ i a $(\sqrt{2}, +\infty)$.

La derivada segona $f''(x)$ s'anul·la a $x = 0, \pm\sqrt{6}$ (i $f''' \neq 0$ en aquests tres punts). D'altra banda, $f''(x)$ és positiva als intervals $(-\sqrt{6}, 0)$ i $(\sqrt{6}, +\infty)$, i és negativa als intervals $(-\infty, -\sqrt{6})$ i $(0, \sqrt{6})$.

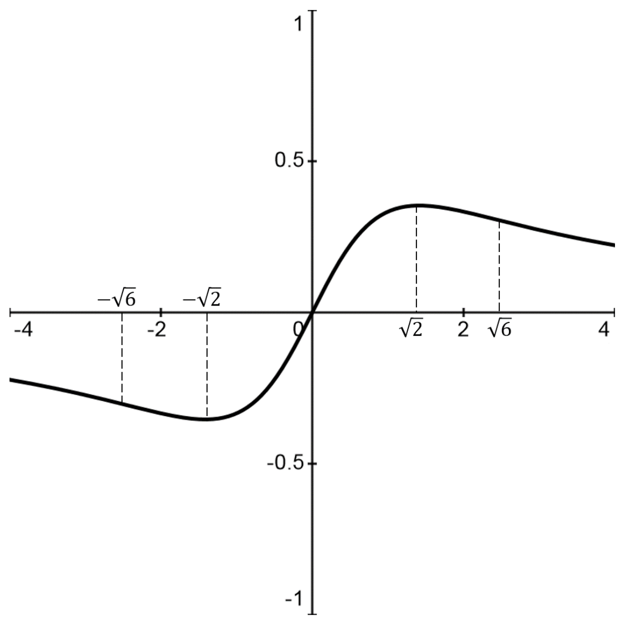
Per tant,

(a) Hi ha un mínim relatiu a $x = -\sqrt{2}$ i un màxim relatiu a $x = \sqrt{2}$. Hi ha punts d'inflexió a $x = 0, \pm\sqrt{6}$.

(b) Hi ha creixement a l'interval $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ i decreixement als intervals $(-\infty, -\sqrt{2})$ i $(\sqrt{2}, +\infty)$.

(c) Hi ha concavitat als intervals $(-\sqrt{6}, 0)$ i $(\sqrt{6}, +\infty)$, i convexitat als intervals $(-\infty, -\sqrt{6})$ i $(0, \sqrt{6})$.

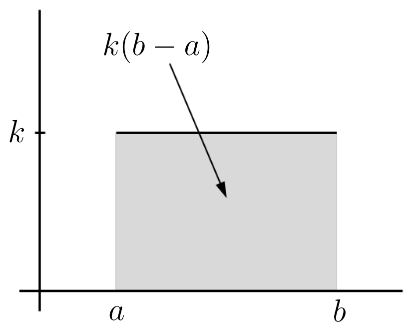
(d) A l'interval $[1, 3]$ no hi ha mínim relatiu i, per tant, hem d'avaluar la funció als punts extrems $f(1) = 1/3$ i $f(3) = 3/11$. El mínim absolut és, per tant, al punt $x = 3$ on la funció val $3/11$. D'altra banda, $f(x)$ té un màxim relatiu a l'interior de $[1, 3]$ on la funció val $f(\sqrt{2}) = \sqrt{2}/4$ que és més gran que els valors als punts extrems i és, per tant, el màxim absolut de $f(x)$ a $[1, 3]$.

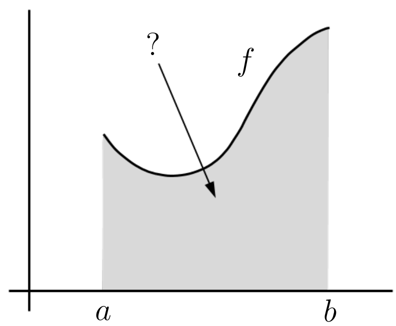


5 INTEGRAL DE RIEMANN

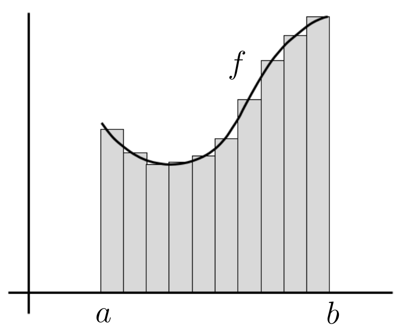
5.1 Problema de l'àrea

El problema geomètric que es planteja aquí és el del càlcul de l'àrea sota el gràfic d'una funció f, entre dos punts a i b. El problema té solució trivial quan la funció és constant, ja que llavors es redueix al càlcul de l'àrea d'un rectangle (= base $\times$ altura), però és més complicat en el cas general. D'altra banda, no és només un problema geomètric. El treball realitzat per una força constant F al llarg d'un recorregut d és Fd, però el problema es complica, també, quan la força F és variable al llarg del recorregut.





L'estratègia per resoldre aquest problema és considerar el cas general com la suma de petits casos trivials, és a dir, aproximar la funció per una col·lecció de funcions constants en petits intervals (o aproximar la força variable per una col·lecció de forces constants al llarg de petits recorreguts). La idea és que això ens proporciona una solució aproximada del problema i que aquesta aproximació millora si fem més petits (i, per tant, més nombrosos) els subintervals en què dividim l'interval original, dins dels quals prenem constant la funció. El desenvolupament rigorós d'aquesta idea ens porta a la teoria de la integral de Riemann.



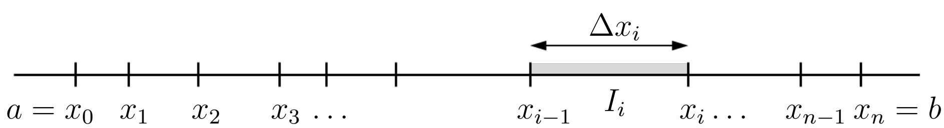
Considerem únicament funcions f definides i *fitades* en un interval tancat $[a, b]$. Per a aquestes funcions volem trobar l'àrea sota el gràfic de f entre els punts a i b. Però abans ens calen algunes definicions.

Particions

DEFINICIÓ: Una *partició* P de l'interval $[a, b]$ és un conjunt *finit* de punts $P = \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ que compleixen

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Així doncs, la partició P descompon l'interval $[a, b]$ en n intervals, I_i ($i = 1, 2, \ldots, n$), on $I_i = [x_{i-1}, x_i]$. Representem la llargada de l'interval I_i per Δx_i ($= x_i - x_{i-1}$). Evidentment, $\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = b - a$.



DEFINICIÓ: Una partició P' és *més fina* que P si P' s'obté afegint punts a P.

Ho expressem $P' > P$ (o també $P' \supset P$, ja que P' conté els punts de P).

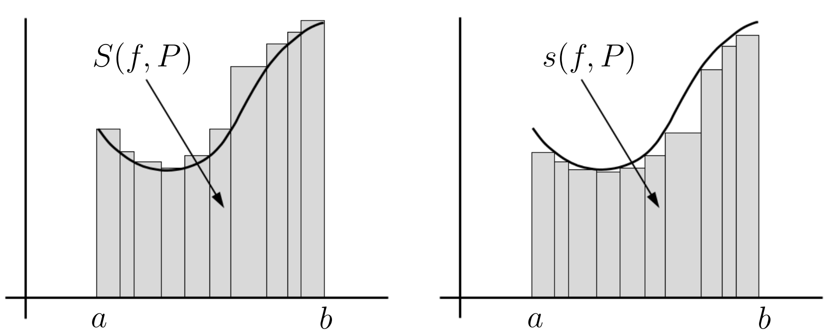
Sumes superiors i sumes inferiors

Com que f és fitada a $[a, b]$, també ho és en cadascun dels subintervals I_i. Per tant, hi haurà un suprem M_i i un ínfim m_i dels valors de $f(x)$ a cada I_i,

$$M_i = \sup\{f(x) | x \in I_i\}, \quad m_i = \inf\{f(x) | x \in I_i\}.$$

DEFINICIÓ: La *suma superior* i la *suma inferior* de f associades a la partició P són, respectivament, les quantitats

$$S(f, P) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i\,, \quad s(f, P) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i\,.$$



Com que $m_i \leq M_i$, sempre es compleix

$$s(f,P) \leq S(f,P), \quad \forall P.$$

Vegem ara què passa quan substituïm P per una altra partició més fina.

TEOREMA: Si P' és més fina que P, aleshores

$$S(f,P') \leq S(f,P), \quad s(f,P') \geq s(f,P).$$

DEMOSTRACIÓ: només cal veure què passa quan P' té un punt més que P. Suposem que afegim un punt x'_i entre x_{i-1} i x_i, llavors tindrem dos suprems $M_i^{(1)}$ i $M_i^{(2)}$

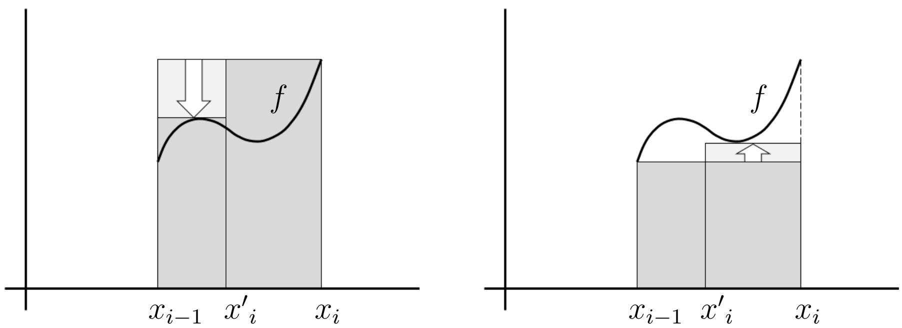
$$M_i^{(1)} = \sup\left\{f(x)|x \in [x_{i-1}, x'_i]\right\}, \quad M_i^{(2)} = \sup\left\{f(x)|x \in [x'_i, x_i]\right\}.$$

La suma superior $S(f,P')$ s'obté substituïnt

$$M_i \Delta x_i \quad \longrightarrow \quad M_i^{(1)}(x'_i - x_{i-1}) + M_i^{(2)}(x_i - x'_i),$$

a l'expressió de $S(f,P)$ i com que $M_i^{(1)}, M_i^{(2)} \leq M_i$, tenim

$$S(f,P') \leq S(f,P).$$



De manera semblant es demostra que $s(f,P') \geq s(f,P)$ (en aquest cas, $m_i^{(1)}, m_i^{(2)} \geq m_i$). $\diamondsuit$

Així doncs, veiem que

si refinem una partició, la suma superior decreix i la suma inferior creix,

i una conseqüència d'això és que si P_1 i P_2 són dues particions qualssevol, aleshores

$$s(f,P_1) \leq S(f,P_2), \quad \forall P_1, P_2,$$

ja que si considerem la partició P construïda amb els punts de P_1 i de P_2, la partició P és més fina que P_1 i que P_2 i, usant els resultats anteriors, tenim

$$s(f,P_1) \leq s(f,P) \leq S(f,P) \leq S(f,P_2).$$

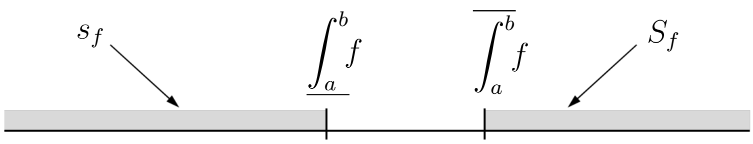
Per tant,

qualsevol suma inferior és menor o igual que qualsevol suma superior.

Integral superior i integral inferior
Si anomenem S_f i s_f, respectivament, el conjunt de totes les sumes superiors i el de totes les sumes inferiors (per a qualsevol partició) de f a $[a, b]$, tenim

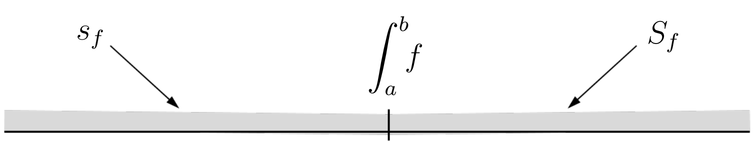
- S_f és fitat inferiorment (qualsevol suma inferior és fita inferior de S_f). L'ínfim d'aquest conjunt s'anomena *integral superior* de f entre a i b, i s'expressa
$$\overline{\int_a^b} f \overset{\text{def}}{=} \inf S_f.$$
La integral superior de f a $[a, b]$ és, doncs, el major fita inferior del conjunt de les sumes superiors de f a $[a, b]$.

- s_f és fitat superiorment (qualsevol suma superior és fita superior de s_f). El suprem d'aquest conjunt s'anomena *integral inferior* de f entre a i b, i s'expressa
$$\underline{\int_a^b} f \overset{\text{def}}{=} \sup s_f.$$
La integral inferior de f a $[a, b]$ és, doncs, la menor fita superior del conjunt de les sumes inferiors de f a $[a, b]$.



Evidentment, sempre es compleix $\underline{\int_a^b} f \leq \overline{\int_a^b} f$.

Integral de f entre a i b
Quan les integrals superior i inferior coincideixen, diem que f és *integrable* (en el sentit de Riemann) a l'interval $[a, b]$. A aquest valor comú l'anomenem *integral* (en el sentit de Riemann) de la funció f entre els punts a i b, i el representem per
$$\int_a^b f \quad \text{o, també,} \quad \int_a^b f(x)\, dx.$$
Per tant, la integral $\int_a^b f$ és el nombre real menor o igual que qualsevol suma superior i, alhora, major o igual que qualsevol suma inferior, quan és únic.



La integral $\int_a^b f$ ens dona la solució al problema de l'àrea plantejat al principi. S'ha resolt, doncs, per a les funcions fitades que siguin *integrables.*

No tota funció fitada és integrable. Per exemple, la funció

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \mathbb{Q}, \\ 1 & \text{si } x \notin \mathbb{Q}, \end{cases}$$

no és integrable entre a i b, ja que totes les sumes superiors (i, per tant, també la integral superior) valen $(b-a)$, mentre que totes les sumes inferiors (i, per tant, també la integral inferior) valen 0. En aquest cas no podem parlar d'àrea sota el gràfic de la funció f entre a i b.

És, doncs, important conèixer propietats de la funció f que garanteixen la seva integrabilitat.

5.2 Integrabilitat d'una funció

El teorema següent ens dona una condició necessària i suficient per a la integrabilitat d'una funció.

TEOREMA (PRIMER CRITERI D'INTEGRABILITAT): Sigui f una funció definida i fitada a $[a, b]$, aleshores f és integrable a $[a, b]$ si i només si $\forall \varepsilon > 0$ hi ha alguna partició P tal que

$$S(f, P) - s(f, P) < \varepsilon.$$

DEMOSTRACIÓ: si f és integrable a $[a, b]$, donat $\varepsilon > 0$ hi haurà alguna suma superior $S(f, P_1)$ i alguna suma inferior $s(f, P_2)$ tals que

$$S(f, P_1) - \int_a^b f < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad \int_a^b f - s(f, P_2) < \frac{\varepsilon}{2},$$

i, per tant, tindrem que $S(f, P_1) - s(f, P_2) < \varepsilon$. D'altra banda, si substituïm P_1 i P_2 per una partició P més fina que totes dues, les sumes superior i inferior s'acostaran entre elles i tindrem

$$S(f, P) - s(f, P) \leq S(f, P_1) - s(f, P_2) < \varepsilon.$$

Recíprocament, si per a cada ε hi ha alguna partició P que compleix $S(f, P) - s(f, P) < \varepsilon$, com que la integral superior és menor o igual que qualsevol suma superior i la integral inferior és major o igual que qualsevol suma inferior, tenim

$$\overline{\int_a^b} f - \underline{\int_a^b} f \leq S(f, P) - s(f, P) < \varepsilon, \quad \forall \varepsilon > 0,$$

Per tant, $\overline{\int_a^b} f = \underline{\int_a^b} f$, és a dir, f és integrable a $[a, b]$. $\diamondsuit$

Aquest criteri és poc pràctic per comprovar la integrabilitat d'una funció concreta, però d'ell se n'obtenen algunes condicions *suficients* per a la integrabilitat.

TEOREMA: Si f és *contínua* a $[a, b]$, aleshores f és integrable a $[a, b]$.

DEMOSTRACIÓ: com que $[a, b]$ és compacte, en ser f contínua a $[a, b]$ també és uniformement contínua en aquest interval. Per tant, donat $\varepsilon > 0$, hi ha algun $\delta > 0$ tal que si $d(x, x') < \delta$, llavors $d(f(x), f(x')) < \varepsilon/(b - a)$. Aleshores si P és una partició que compleixi $\Delta x_i < \delta$, a cada interval es complirà que $M_i - m_i \leq \varepsilon/(b - a)$, i per tant,

$$S(f, P) - s(f, P) = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)\Delta x_i \leq \frac{\varepsilon}{b - a} \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = \varepsilon,$$

és a dir, f compleix el criteri d'integrabilitat. $\diamondsuit$

TEOREMA: Si f és *monòtona* (creixent o decreixent) a $[a, b]$, aleshores f és integrable a $[a, b]$.

DEMOSTRACIÓ: suposem que f és creixent, llavors $f(b) \geq f(a)$. Si $f(b) = f(a)$, la funció és constant i és integrable, ja que és contínua. Si $f(b) > f(a)$, donat $\varepsilon > 0$, si P és una partició que compleixi $\Delta x_i < \varepsilon/[f(b) - f(a)]$, tenim

$$S(f, P) - s(f, P) = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)\Delta x_i < \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)} \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i).$$

En ser f creixent, a cada interval tenim $m_i = f(x_{i-1})$ i $M_i = f(x_i)$. Així doncs,

$$\sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i) = \sum_{i=1}^{n} \big(f(x_i) - f(x_{i-1})\big) = f(b) - f(a),$$

i, per tant, $S(f, P) - s(f, P) < \varepsilon$. La funció f és, doncs, integrable a $[a, b]$.

De manera similar es demostra la integrabilitat d'una funció decreixent. $\diamondsuit$

> TEOREMA: Si f és *integrable* a $[a, b]$, $f([a, b]) \subset [c, d]$, i g és *contínua* a $[c, d]$, aleshores la funció $g \circ f = g(f(x))$ és integrable a $[a, b]$.

DEMOSTRACIÓ: donat $\varepsilon > 0$, com que g és uniformement contínua a $[c, d]$ (és contínua i $[c, d]$ és compacte) hi haurà un $\delta > 0$ tal que si $d(x', x'') < \delta$ llavors

$$d(g(x'), g(x'')) < \frac{\varepsilon}{b - a + 2K}, \qquad (*)$$

on $K = \sup_{x \in [c,d]} |g(x)|$. Podem suposar que $\delta < \varepsilon/(b - a + 2K)$, ja que si fos més gran, el podríem reduir sense afectar la desigualtat anterior.

D'altra banda, com que f és integrable, hi ha una partició $P = \{x_0, \ldots, x_n\}$ de $[a, b]$ tal que

$$S(f, P) - s(f, P) < \delta^2. \qquad (**)$$

Si M_i i m_i són respectivament el suprem i l'ínfim de f en el subinterval I_i, i M_i' i m_i' són els de la funció $g(f(x))$ en el mateix subinterval, podem descompondre el conjunt de subíndexs $\{1, \ldots, n\}$ en dos subconjunts I (format pels i per als quals $M_i - m_i < \delta$) i J (format pels i per als quals $M_i - m_i \geq \delta$).

Si $i \in I$, com que $M_i - m_i < \delta$, utilitzant $(*)$ tenim

$$\sum_{i \in I} (M_i' - m_i')\Delta x_i < \frac{\varepsilon}{b - a + 2K}(b - a).$$

Si $i \in J$, com que $M_i - m_i \geq \delta$, utilitzant $(**)$ tenim $\delta \sum_{i \in J} \Delta x_i \leq \sum_{i \in J}(M_i - m_i)\Delta x_i < \delta^2$, és a dir,

$$\sum_{i \in J} \Delta x_i < \delta,$$

i com que $\delta < \varepsilon/(b - a + 2K)$, tenim finalment

$$\begin{aligned} S(g \circ f, P) - s(g \circ f, P) &= \sum_{i \in I} (M_i' - m_i')\Delta x_i + \sum_{i \in J} (M_i' - m_i')\Delta x_i \\ &\leq \frac{\varepsilon}{b - a + 2K}(b - a) + 2K \frac{\varepsilon}{b - a + 2K} = \varepsilon. \end{aligned}$$

i, per tant, $g \circ f$ és integrable a $[a, b]$. $\diamondsuit$

COROL·LARI: Si f és integrable a $[a, b]$, aleshores les funcions

$$|f|, \quad f^n, \quad 1/f \,(\text{si } f(x) \geq k > 0), \quad e^f, \quad \sin f \ \ldots$$

són també integrables a $[a, b]$.

DEMOSTRACIÓ: només cal compondre f amb les funcions contínues $g(t) = |t|$, t^n, $1/t$, e^t, $\sin t$ ... $\diamondsuit$

TEOREMA: Si f és integrable a $[a, b]$, aleshores també ho és en qualsevol subinterval $[c, d] \subset [a, b]$.

DEMOSTRACIÓ: donat un $\varepsilon > 0$, hi ha alguna partició P tal que

$$S(f, P) - s(f, P) = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)\Delta x_i < \varepsilon.$$

Podem suposar que P conté (si no, els afegim) els punts c $(= x_k)$ i d $(= x_\ell)$. Evidentment tenim

$$\sum_{i=k}^{\ell} (M_i - m_i)\Delta x_i \leq \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)\Delta x_i < \varepsilon.$$

Però $\sum_{i=k}^{\ell} (M_i - m_i)\Delta x_i$ és la diferència entre les sumes superior i inferior de f, associades a la partició P restringida al subinterval $[c, d]$. Per tant, f compleix el criteri d'integrabilitat a $[c, d]$. $\diamondsuit$

5.3 La integral com a límit de sumes de Riemann

Sigui f una funció definida i fitada a $[a, b]$, sigui P una partició de $[a, b]$ i sigui una col·lecció de punts z_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ tals que $z_i \in I_i$. Anomenem *suma de Riemann* de f, associada a la partició P i als punts $z_1 \ldots z_n$, a la quantitat

$$\sum_{i=1}^{n} f(z_i)\Delta x_i \,.$$

Com que $m_i \leq f(z_i) \leq M_i$, sigui quina sigui l'elecció dels punts z_i sempre es compleix

$$s(f, P) \leq \sum_{i=1}^{n} f(z_i)\Delta x_i \leq S(f, P).$$

DEFINICIÓ: Diem que A és el límit de les *sumes de Riemann* de f, i ho expressem

$$\lim_P \sum_{i=1}^{n} f(z_i)\Delta x_i = A,$$

si $\forall \varepsilon > 0$ hi ha una partició P_0 tal que $\forall P$ més fina que P_0, qualsevol suma de Riemann de f associada a P (és a dir, independentment de l'elecció dels punts z_i) compleix

$$\left| A - \sum_{i=1}^{n} f(z_i)\Delta x_i \right| < \varepsilon.$$

TEOREMA (SEGON CRITERI D'INTEGRABILITAT): Una funció f és integrable a $[a, b]$ si i només si existeix $\lim_P \sum_{i=1}^{n} f(z_i)\Delta x_i = A$. En aquest cas, $\int_a^b f = A$.

DEMOSTRACIÓ: si f és integrable a $[a, b]$, donat $\varepsilon > 0$, hi ha alguna partició P_0 tal que $S(f, P_0) - s(f, P_0) < \varepsilon$. Això també es complirà per a qualsevol altra partició P més fina que P_0, ja que la suma superior i la inferior s'acostarien entre elles. D'altra banda, tant les sumes de Riemann de f associades a P com la integral $\int_a^b f$ estan entre $s(f, P)$ i $S(f, P)$. Per tant, tindrem

$$\left| \int_a^b f - \sum_{i=1}^{n} f(z_i)\Delta x_i \right| < \varepsilon, \quad \forall z_i, \forall P \text{ més fina que } P_0\,.$$

La integral $\int_a^b f$ és, doncs, el límit de les sumes de Riemann de f.

Recíprocament, si $A = \lim_P \sum_{i=1}^{n} f(z_i)\Delta x_i$, donat $\varepsilon > 0$, hi ha alguna partició P_0 tal que $\forall P$ més fina que P_0 es compleix

$$\left| A - \sum_{i=1}^{n} f(z_i)\Delta x_i \right| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall z_i\,.$$

Podem escollir els punts z_i de manera que els $f(z_i)$ s'acostin suficientment als M_i per tal que

$$\left| S(f, \Pi) - \sum_{i=1}^{n} f(z_i)\Delta x_i \right| < \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

De les dues desigualtats anteriors deduïm

$$|S(f, \Pi) - A| < \varepsilon, \quad \forall P \text{ més fina que } P_0,$$

és a dir, podem trobar sumes superiors de f tan a prop com vulguem de A. De manera semblant es demostra que es poden trobar sumes inferiors de f tan a prop com vulguem de A. Això vol dir que $A = \int_a^b f$. $\diamondsuit$

Així doncs, quan f és integrable a $[a, b]$ podem escriure

$$\boxed{\int_a^b f = \lim_P \sum_{i=1}^{n} f(z_i)\Delta x_i.}$$

Per tant, una funció és integrable quan, en refinar la partició, les seves sumes de Riemann s'acosten cap a un únic valor, independentment dels punts z_i escollits en els intervals. Aquest fet permet obtenir fàcilment algunes propietats de la integral.

5.4 Propietats de la integral

Linealitat

TEOREMA: Si f i g són integrables a $[a, b]$, aleshores $f + g$ és integrable a $[a, b]$ i es compleix

$$\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g.$$

DEMOSTRACIÓ: les sumes de Riemann de $f + g$ són

$$\sum_{i=1}^{n} [f(z_i) + g(z_i)]\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} f(z_i)\Delta x_i + \sum_{i=1}^{n} g(z_i)\Delta x_i \,,$$

i com que les sumes de Riemann del costat dret tenen límit $\int_a^b f$ i $\int_a^b g$, respectivament, la del costat esquerre també en té i el seu valor és $\int_a^b f + \int_a^b g$. $\diamondsuit$

TEOREMA: Si f és integrable a $[a, b]$ i $k \in \mathbb{R}$, aleshores kf és integrable a $[a, b]$ i es compleix

$$\int_a^b (kf) = k \int_a^b f.$$

DEMOSTRACIÓ: les sumes de Riemann de kf són

$$\sum_{i=1}^{n} [kf(z_i)]\Delta x_i = k \sum_{i=1}^{n} f(z_i)\Delta x_i \,.$$

Com que la suma de Riemann del costat dret té límit $\int_a^b f$, la del costat esquerre també en té i el seu valor és $k\int_a^b f$. $\diamondsuit$

Integrabilitat del producte i del quocient

TEOREMA: Si f i g són integrables a $[a,b]$, aleshores

a) fg és integrable a $[a,b]$.

b) f/g és integrable a $[a,b]$, si $g(x) \geq k > 0$.

DEMOSTRACIÓ: només cal notar que $fg = \frac{1}{2}[(f+g)^2 - f^2 - g^2]$, i que $\frac{f}{g} = f\,\frac{1}{g}$. $\diamondsuit$

Àrea sota d'un punt

TEOREMA: Si $f(x) = 0$ a tot l'interval $[a,b]$, llevat d'un punt $c \in [a,b]$, aleshores $\int_a^b f = 0$. L'àrea "sota un punt" és nul·la.

DEMOSTRACIÓ: les sumes de Riemann són sempre 0 excepte quan un dels z_i sigui el punt c, però en aquest cas la suma de Riemann seria $f(c)\Delta x_i$ (o $f(c)(\Delta x_i + \Delta x_{i+1})$ si c és el punt que separa els intervals I_i i I_{i+1} i prenem $z_i = z_{i+1} = c$) que es pot fer tan petit com es vulgui prenent una partició suficientment fina. $\diamondsuit$

GENERALITZACIÓ: Si $f(x) = 0$ en tot l'interval $[a,b]$ llevat d'un nombre *finit* de punts, $c_1, \ldots c_n \in [a,b]$, aleshores $\int_a^b f = 0$.

DEMOSTRACIÓ: només cal considerar f com la suma de diverses funcions f_i, nul·les a $[a,b]$ excepte a c_i. $\diamondsuit$

COROL·LARI: Si f i g són integrables a $[a,b]$ i $f(x) = g(x)$ a tot l'interval $[a,b]$ llevat d'un nombre *finit* de punts, aleshores $\int_a^b f = \int_a^b g$.

DEMOSTRACIÓ: només cal aplicar el resultat anterior a la funció $f - g$. $\diamondsuit$

Aquesta propietat posa de manifest que si el valor d'una funció integrable es modifica en un nombre finit de punts, el valor de la integral no varia.

Additivitat dels intervals d'integració

TEOREMA: Si f és integrable a $[a,b]$ i a $[b,c]$, aleshores f és integrable a $[a,c]$ i es compleix

$$\int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f.$$

DEMOSTRACIÓ: només cal notar que $f = f_1 + f_2$, on

$$f_1(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in [a,b], \\ 0 & \text{si } x \in (b,c], \end{cases} \qquad f_2(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [a,b], \\ f(x) & \text{si } x \in (b,c], \end{cases}$$

i utilitzar la linealitat de la integral. $\diamondsuit$

COROL·LARI: Si f és contínua a $[a,b]$, llevat d'un nombre *finit* de discontinuïtats de *salt* (diem en aquest cas que f és *contínua a trossos*), aleshores f és integrable a $[a,b]$.

DEMOSTRACIÓ: si $c_1, c_2, \dots c_n$ són aquestes discontinuïtats (en ordre creixent), f és contínua (i, per tant, integrable) en els intervals $[a, c_1]$, $[c_1, c_2]$, etc. Llavors, si fem servir l'additivitat dels intervals d'integració tenim

$$\int_a^b f = \int_a^{c_1} f + \int_{c_1}^{c_2} f + \cdots + \int_{c_n}^b f. \quad \diamondsuit$$

Desigualtats

TEOREMA: Si f és integrable a $[a,b]$ i $f(x) \geq 0$, $\forall x \in [a,b]$, aleshores $\int_a^b f \geq 0$.

DEMOSTRACIÓ: totes les sumes de Riemann de f són ≥ 0 i, per tant, la integral no pot ser < 0. $\diamondsuit$

Similarment, si $f(x) \leq 0$, $\forall x \in [a,b]$, aleshores $\int_a^b f \leq 0$.

COROL·LARI 1: Si f i g són integrables a $[a,b]$ i $f(x) \geq g(x)$, $\forall x \in [a,b]$, aleshores $\int_a^b f \geq \int_a^b g$.

DEMOSTRACIÓ: tenim $f(x) - g(x) \geq 0$, $\forall x \in [a,b]$ i, per tant, $\int_a^b (f-g) \geq 0$, és a dir, $\int_a^b f \geq \int_a^b g$. $\diamondsuit$

COROL·LARI 2: Si f és integrable a $[a,b]$, aleshores $\left|\int_a^b f\right| \leq \int_a^b |f|$.
"El valor absolut de la integral és $\leq$ que la integral del valor absolut".

DEMOSTRACIÓ: com que f és integrable, $|f(x)|$ també ho és. Notem, d'altra banda, que $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$, $\forall x \in [a,b]$ i, per tant,

$$-\int_a^b |f(x)| \leq \int_a^b f(x) \leq \int_a^b |f(x)|. \quad \diamondsuit$$

Valor mitjà d'una funció integrable

DEFINICIÓ: Si f és integrable a l'interval $[a,b]$, el *valor mitjà* de f en aquest interval és
$$\langle f\rangle_{[a,b]} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{b-a}\int_a^b f.$$

El valor mitjà $\langle f\rangle_{[a,b]}$ és, doncs, el valor d'una funció constant sota el gràfic de la qual hi ha, entre a i b, la mateixa àrea que sota el gràfic de f.

Evidentment, si M i m són respectivament el suprem i l'ínfim de $f(x)$ a l'interval $[a,b]$, es compleix que $m \le \langle f\rangle_{[a,b]} \le M$, ja que només cal integrar entre a i b la desigualtat $m \le f(x) \le M$ i dividir per $(b-a)$. El teorema següent assegura que si f és contínua, el valor mitjà és assolit per f en algun punt de l'interior de $[a,b]$.

TEOREMA DEL VALOR MITJÀ: Si f és *contínua* a $[a,b]$, aleshores $\exists\, c \in (a,b)$ tal que $f(c) = \langle f\rangle_{[a,b]}$.

> DEMOSTRACIÓ: si f és contínua, $f\left([a,b]\right)$ és compacte i, per tant, m i M són respectivament el mínim i el màxim absoluts de $f(x)$ a $[a,b]$. El teorema del valor intermedi de Bolzano ens assegura que qualsevol valor comprès entre m i M, com $\langle f\rangle_{[a,b]}$, és assolit en algun punt de (a,b). $\diamondsuit$

Intercanvi dels límits de la integral

En el desenvolupament de la teoria de la integral de Riemann hem suposat implícitament que $a<b$. Es pot estendre el concepte d'integral al cas en què el límit inferior d'integració sigui més gran que el superior si definim

$$\boxed{\int_b^a f \stackrel{\text{def}}{=} -\int_a^b f.}$$

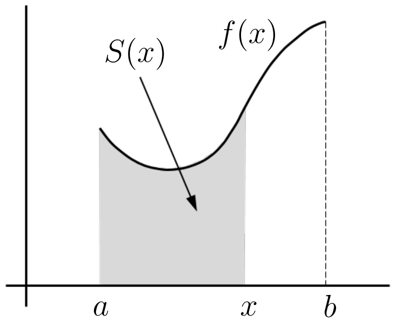
Les propietats anteriors també són vàlides quan el límit inferior és més gran que el superior, llevat les que hem agrupat amb el títol "Desigualtats". En particular, l'additivitat dels intervals d'integració també es compleix quan b és fora de l'interval $[a,c]$. Tanmateix, notem que si $f(x) \ge 0$ a $[a,b]$ tenim $\int_b^a f \le 0$. Notem també que $\left|\int_b^a f\right| \le \int_a^b |f|$.

5.5 Integració i derivació

En aquesta secció veurem la relació existent entre la integral i la derivada, cosa que ens permetrà trobar en molts casos el valor de la integral.

Suposem que f és integrable a $[a,b]$, llavors $\forall x \in [a,b]$ definim la funció "àrea" $S(x)$:

$$S(x) \stackrel{\text{def}}{=} \int_a^x f$$



Evidentment es compleix que $S(a) = \int_a^a f = 0$ i que $S(b) = \int_a^b f$. Vegem ara dues propietats de la funció $S(x)$.

TEOREMA: $S(x)$ és uniformement contínua a $[a,b]$.

DEMOSTRACIÓ: sigui $K = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|$. Donat $\varepsilon > 0$, si $d(x,x') < \varepsilon/K$ (suposem $x < x'$) tenim

$$|S(x') - S(x)| = \left| \int_a^{x'} f - \int_a^x f \right| = \left| \int_x^{x'} f \right|$$

$$\leq \int_x^{x'} |f| \leq \int_x^{x'} K = Kd(x,x') < \varepsilon. \quad \diamondsuit$$

TEOREMA: En els punts de $[a,b]$ on f és contínua, la funció S és derivable i la seva derivada és f.

DEMOSTRACIÓ: si f és contínua a $c \in [a,b]$, només cal provar que

$$\left| \frac{S(c+h) - S(c)}{h} - f(c) \right| \longrightarrow 0, \qquad \text{quan } h \to 0.$$

En ser f contínua a c, donat $\varepsilon > 0$ hi ha algun δ tal que si $d(x,c) < \delta$ llavors $|f(x) - f(c)| < \varepsilon$. Si d'entrada prenem $|h| < \delta$ tindrem

$$\begin{aligned} \left| \frac{S(c+h) - S(c)}{h} - f(c) \right| &= \left| \frac{\int_a^{c+h} f - \int_a^c f}{h} - \frac{f(c)h}{h} \right| \\ = \left| \frac{\int_c^{c+h} f(x) - \int_c^{c+h} f(c)}{h} \right| &= \frac{1}{|h|} \left| \int_c^{c+h} [f(x) - f(c)] \right| \\ &\leq \frac{1}{|h|} \varepsilon |h| = \varepsilon. \quad \diamondsuit \end{aligned}$$

COROL·LARI: Si $f(x)$ és contínua a tot $[a,b]$, aleshores $S(x) \stackrel{\text{def}}{=} \int_a^x f$ és una *primitiva* de f, és a dir, $S'(x) = f(x)$.

Una conseqüència important d'aquesta propietat és que les funcions contínues tenen necessàriament primitiva. En altres paraules, tota funció contínua és la derivada d'una altra funció.

El teorema següent ens dona el valor de $\int_a^b f$ quan f és contínua.

TEOREMA FONAMENTAL DEL CÀLCUL: Si f és *contínua* a $[a,b]$ i F és una primitiva de f, aleshores $\int_a^b f = F(b) - F(a)$.

DEMOSTRACIÓ: si F és primitiva de f, com que $S(x) \stackrel{\text{def}}{=} \int_a^x f$ també ho és, tindrem $S(x) - F(x) = k$(constant). El valor de k està determinat pel fet que $S(a) = 0$, és a dir, $k = -F(a)$. Per tant, $S(x) = F(x) - F(a)$ i, en particular, $\int_a^b f = S(b) = F(b) - F(a)$. $\diamondsuit$

El teorema següent generalitza aquest resultat per a les funcions f que tinguin primitiva (encara que no siguin contínues) en el supòsit que siguin integrables.

GENERALITZACIÓ DEL TEOREMA FONAMENTAL DEL CÀLCUL: Si f és *integrable* a $[a,b]$ i F és una primitiva de f, aleshores $\int_a^b f = F(b) - F(a)$.

DEMOSTRACIÓ: si f és integrable, donat $\varepsilon > 0$ hi ha alguna partició P tal que *qualsevol* suma de Riemann associada a P (o a qualsevol partició més fina que P) compleix

$$\left| \sum_{i=1}^{n} f(z_i)\Delta x_i - \int_a^b f \right| < \varepsilon.$$

D'altra banda, com que F és derivable a $[a,b]$ i $F'(x) = f(x)$, podem utilitzar el teorema del valor mitjà a cada interval I_i de P segons el qual $\exists\, t_i \in I_i$ tals que

$$F(x_i) - F(x_{i-1}) = F'(t_i)(x_i - x_{i-1}) = f(t_i)\Delta x_i\,.$$

Si sumem per a tots els valors de i tenim

$$\sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} [F(x_i) - F(x_{i-1})] = F(b) - F(a).$$

Veiem, doncs, que sempre hi ha una suma de Riemann associada a P que coincideix amb $F(b) - F(a)$. Tenim, per tant, que $\forall \varepsilon > 0$, $\left| F(b) - F(a) - \int_a^b f \right| < \varepsilon$, és a dir, $\int_a^b f = F(b) - F(a)$. $\diamondsuit$

Sovint, s'utilitza la notació abreviada $[F]_a^b \stackrel{\text{def}}{=} F(b) - F(a)$ i escrivim

$$\int_a^b f = [F]_a^b \,.$$

Veiem, doncs, que si trobem una primitiva de f tenim resolt el problema de calcular $\int_a^b f$. Si f és contínua, l'existència de primitiva està garantida, però no sempre és fàcil trobar-la. Fins i tot, pot no ser expressable en termes de funcions elementals. A la secció 5.7 veurem les tècniques més habituals per el càcul de primitives.

A partir del teorema fonamental del càlcul es poden obtenir dos resultats molt útils per al càlcul d'integrals, el teorema del canvi de variable i el de la integració per parts.

Canvi de variable

TEOREMA (CANVI DE VARIABLE): Si $f(x)$ és contínua a $[a, b]$, $g(t)$ té derivada contínua a $[c, d]$, i $g([c, d]) = [a, b]$, amb $g(c) = a$ i $g(d) = b$, aleshores

$$\int_a^b f = \int_c^d (f \circ g)\, g'.$$

DEMOSTRACIÓ: si $F(x)$ és una primitiva de $f(x)$, llavors $F[g(t)]$ ho és de $f[g(t)]\, g'(t)$ i, per tant,

$$\int_a^b f(x) = [F(x)]_a^b = \Big[F[g(t)]\Big]_c^d = \int_c^d f[g(t)]\, g'(t). \quad \diamondsuit$$

Veiem, doncs, que no n'hi ha prou amb fer el canvi de variable $x = g(t)$ a la funció f sinó que aquesta s'ha de multiplicar per $g'(t)$. Això fa que la notació $\int_a^b f(x)\, dx$ sigui més adequada que la que hem emprat fins ara, $\int_a^b f$, ja que llavors la regla del canvi de variable consisteix únicament en fer la substitució $x = g(t)$:

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_c^d f[g(t)]\, dg(t) = \int_c^d f[g(t)]\, g'(t)\, dt.$$

Aquest fet fa palès que, més que la funció f, l'objecte sobre el qual es defineix la integració és la *diferencial* $f(x)\, dx$. De fet, integració i diferenciació són, en cert sentit, operacions inverses, ja que si F és una primitiva de f, tenim

$$\begin{aligned} \boxed{\int_a^x d}\, F(x') &= \int_a^x f(x')\, dx' = F(x) - F(a), \\ \boxed{d \int_a^x} f(x')\, dx' &= d\,[F(x) - F(a)] = f(x)\, dx. \end{aligned}$$

Integració per parts

> TEOREMA (INTEGRACIÓ PER PARTS): Si f i g són integrables a $[a,b]$, F és una primitiva de f i G és una primitiva de g, aleshores
>
> $$\int_a^b Fg = [FG]_a^b - \int_a^b fG.$$

DEMOSTRACIÓ: com que FG és una primitiva de $Fg + fG$ tenim $\int_a^b (Fg + fG) = [FG]_a^b$. $\diamondsuit$

El teorema de la integració per parts es pot expressar també així

$$\int_a^b F\,dG = [FG]_a^b - \int_a^b G\,dF.$$

Tal com mostra el teorema següent, el mètode d'integració per parts ens proporciona, amb les hipòtesis adients, una demostració alternativa de la fórmula de Taylor, i s'obté una expressió de la resta de Taylor en forma d'integral.

Expressió integral de la resta de Taylor

> TEOREMA: Si $f(t)$ és $n+1$ vegades derivable entre a i x, i $f^{(n+1)}(t)$ és integrable en aquest interval, aleshores
>
> $$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + R_n^{(a)}(x), \quad \text{on} \quad R_n^{(a)}(x) = \frac{1}{n!}\int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt.$$

DEMOSTRACIÓ: si fem servir la regla d'integració per parts amb $F(t) = (x-t)^n$ i amb $dG(t) = f^{(n+1)}(t)\,dt$ (és a dir, $G(t) = f^{(n)}(t)$), tenim

$$\begin{aligned} \frac{1}{n!}\int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt &= -\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \\ &+ \frac{1}{(n-1)!}\int_a^x (x-t)^{n-1} f^{(n)}(t)\,dt. \end{aligned}$$

L'aplicació reiterada d'aquesta igualtat ens porta a

$$\begin{aligned} \frac{1}{n!}\int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt = &-\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n - \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} \\ &\cdots - \frac{f'(a)}{1!}(x-a) - f(a) + f(x). \quad \diamondsuit \end{aligned}$$

És interessant observar que en les expressions de Cauchy i de Lagrange de la resta de Taylor hi intervé el valor de $f^{(n+1)}$ en un punt situat entre a i x que a priori no coneixem, però l'existència del qual està garantida pel teorema del valor mitjà de Cauchy per a funcions derivables. En canvi, a l'expressió que acabem d'obtenir hi participen tots els valors de $f^{(n+1)}$ en tots els punts que hi ha entre a i x.

5.6 Altres aplicacions de la integral

A més a més de resoldre el problema de l'àrea sota el gràfic d'una funció, la integral de Riemann soluciona altres problemes geomètrics similars. En tots els casos se segueix el mateix procés:

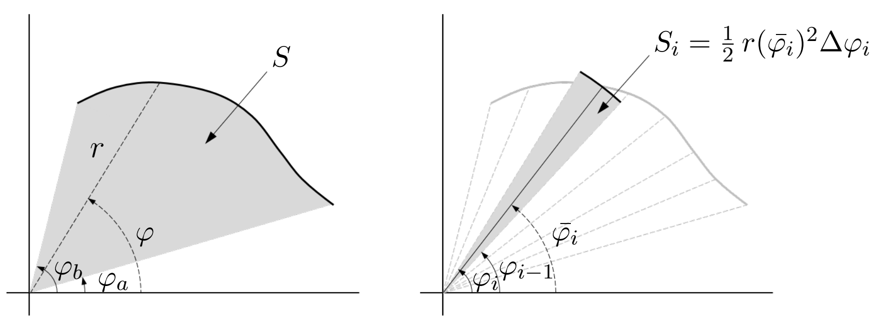
1) Fem una partició de l'interval on es mou la variable.
2) Aproximem per sumes de Riemann la quantitat buscada.
3) Refinem la partició. El problema té solució si les sumes de Riemann tenen límit.

Amb aquesta estratègia s'arriba als resultats següents:

1) Àrea en coordenades polars

Considerem la funció $r = r(\varphi)$, on r és la coordenada radial i φ l'azimutal. Si la funció $r(\varphi)$ és integrable a l'interval $[\varphi_a, \varphi_b]$, l'àrea compresa entre el gràfic de la funció i els radis definits pels valors φ_a i φ_b de la coordenada azimutal, és

$$\boxed{S = \frac{1}{2}\int_{\varphi_a}^{\varphi_b} r(\varphi)^2\, d\varphi.}$$

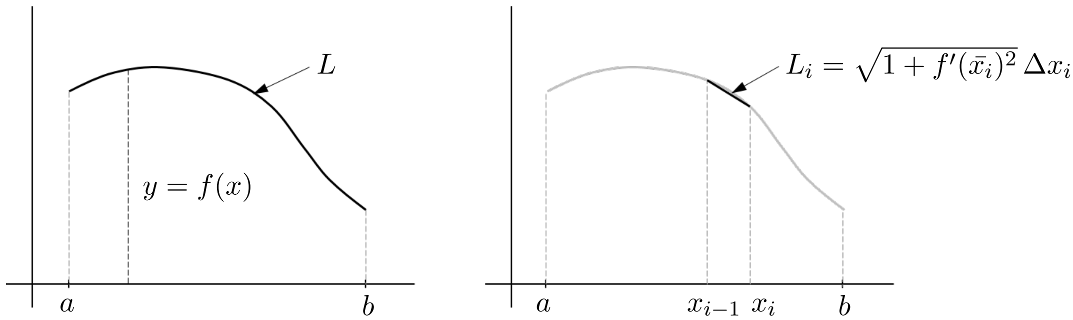


Demostració: triem una partició $\varphi_a = \varphi_0 < \varphi_1 < \ldots < \varphi_n = \varphi_b$ i escollim $\bar{\varphi}_i \in [\varphi_{i-1}, \varphi_i]$, $i = 1, 2, \ldots n$. A cada interval aproximem la funció $r(\varphi)$ pel valor constant $r(\bar{\varphi}_i)$. L'àrea del sector circular d'angle $\Delta\varphi_i = \varphi_i - \varphi_{i-1}$ és $S_i = \frac{1}{2}r(\bar{\varphi}_i)^2\Delta\varphi_i$, amb la qual cosa l'àrea que busquem és aproximada per $\sum_{i=1}^{n} S_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2}r(\bar{\varphi}_i)^2\Delta\varphi_i$. Aquesta suma és una suma de Riemann de la integral $\frac{1}{2}\int_{\varphi_a}^{\varphi_b} r(\varphi)^2\,d\varphi$. En ser $r(\varphi)$ integrable, aquesta integral existeix i, per tant, les sumes de Riemann tenen aquesta integral com a límit. $\diamondsuit$

2) Longitud d'un arc de corba

Si $f(x)$ és derivable a $[a,b]$ i la seva derivada, $f'(x)$, és integrable en aquest interval, la longitud L de la corba corresponent al gràfic de $f(x)$ entre a i b és

$$\boxed{L = \int_a^b \sqrt{1+f'(x)^2}\,dx.}$$



Demostració: triem una partició $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$. Aproximem la funció $f(x)$ amb una poligonal construïda a partir dels segments rectilinis que uneixen cada punt $(x_{i-1}, f(x_{i-1}))$ amb el punt $(x_i, f(x_i))$. La longitud L_i de cada segment és la hipotenusa d'un triangle rectangle de costats $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ i $f(x_i) - f(x_{i-1})$. D'acord amb el teorema del valor mitjà per a funcions derivables existeixen $\bar{x}_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \ldots n$, tals que $f(x_i) - f(x_{i-1}) = f'(\bar{x}_i)\Delta x_i$. Tenim, doncs, $L_i = \sqrt{\Delta x_i^2 + f'(\bar{x}_i)^2 \Delta x_i^2}$. La longitud L és aproximada per $\sum_{i=1}^n L_i = \sum_{i=1}^n \sqrt{1+f'(\bar{x}_i)^2}\,\Delta x_i$ que és una suma de Riemann de la integral $\int_a^b \sqrt{1+f'(x)^2}\,dx$. Per tant, quan refinem la partició la suma de Riemann té aquesta integral com a límit. $\diamondsuit$

Si la corba està descrita per equacions paramètriques $x = x(t)$, $y = y(t)$, definides a l'interval $[t_a, t_b]$, podem expressar L en termes d'aquestes funcions. Només cal fer el canvi de variable $x = x(t)$ a la integral anterior

$$\int_{t_a}^{t_b} \sqrt{1+f'[x(t)]^2}\,dx(t) = \int_{t_a}^{t_b} \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,x'(t)\,dt.$$

D'altra banda, si fem servir la "regla de la cadena" tenim

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\,\frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right)^{-1} = \frac{y'(t)}{x'(t)}\,,$$

i, per tant,

$$\boxed{L = \int_{t_a}^{t_b} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, dt.}$$

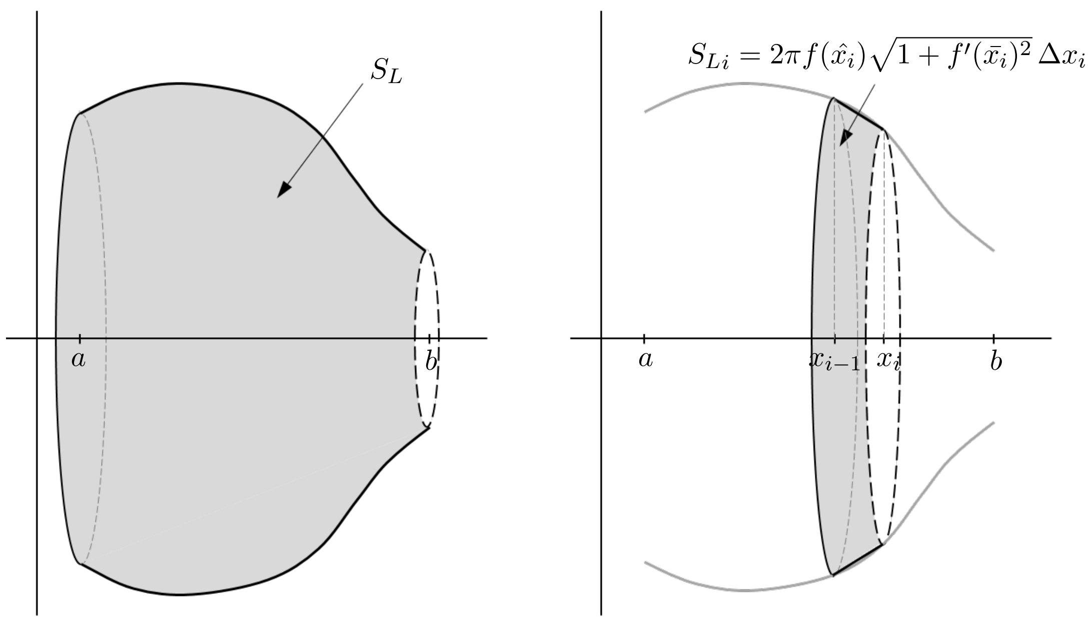
Finalment, si la corba s'expressa en coordenades polars $r = r(\varphi)$, podem fer servir el darrer resultat (ara el paràmetre és φ) tenint en compte que $x = r(\varphi)\cos\varphi$ i $y = r(\varphi)\sin\varphi$. Així, arribem a l'expressió

$$\boxed{L = \int_{\varphi_a}^{\varphi_b} \sqrt{r(\varphi)^2 + r'(\varphi)^2}\, d\varphi.}$$

3) Àrea lateral d'un cos de revolució

Si fem girar al voltant de l'eix x el gràfic de la funció $f(x)$ (derivable amb derivada integrable) es genera un cos de revolució. L'àrea *lateral*, entre a i b, de la figura generada és

$$\boxed{S_L = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx.}$$



Demostració: triem una partició de $[a, b]$ i aproximem $f(x)$ amb la poligonal del cas anterior. En girar al voltant del l'eix x cada segment (de longitud L_i) genera una superfíe troncocònica $S_{Li} = 2\pi f(\hat{x}_i) L_i$ on els $\hat{x}_i$ són punts determinats de $[x_{i-1}, x_i]$. Si sumem les contribucions dels diferents intervals arribem a $2\pi \sum_{i-1}^{n} f(\hat{x}_i)\sqrt{1 + f'(\bar{x}_i)^2}\,\Delta x_i$, que té com a límit la integral $2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1 + f'(x)^2}\,dx$ quan refinem la partició (notem que $\hat{x}_i - \bar{x}_i \to 0$ en aquest límit). $\diamondsuit$

Si la corba generadora s'expressa en forma paramètrica i raonem com en el cas anterior arribem a

$$S_L = 2\pi \int_{t_a}^{t_b} y(t)\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, dt,$$

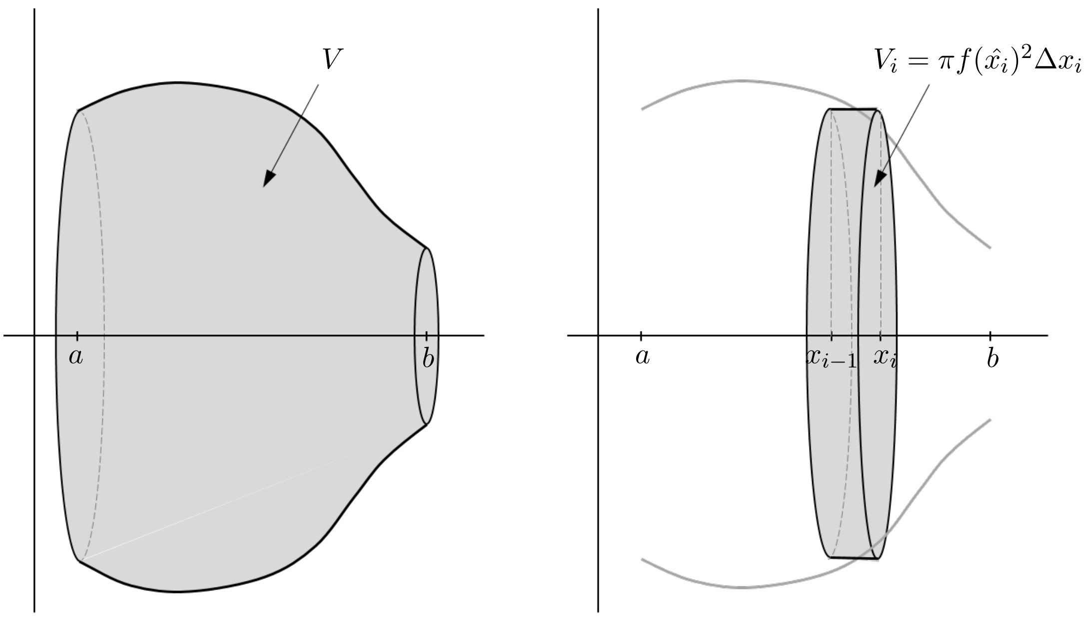
i si s'expressa en coordenades polars tenim

$$S_L = 2\pi \int_{\varphi_a}^{\varphi_b} r(\varphi)\sin\varphi \sqrt{r(\varphi)^2 + r'(\varphi)^2}\, d\varphi.$$

4) Volum d'un cos de revolució

Si $f(x)$ és integrable, el volum de la figura generada fent girar el gràfic de $f(x)$ al voltant de l'eix x és

$$\boxed{V = \pi \int_a^b f(x)^2\, dx.}$$



Demostració: com en els casos anteriors, triem una partició de $[a, b]$. A cada interval escollim un punt $\hat{x}_i$ i aproximem la funció $f(x)$ amb la constant $f(\hat{x}_i)$. En girar al voltant de l'eix x, a cada interval es genera una figura cilíndrica de volum $V_i = \pi f(\hat{x}_i)^2 \Delta x_i$. Si sumem les contribucions de tots els intervals arribem a $\pi \sum_{i-1}^{n} f(\hat{x}_i)^2 \Delta x_i$ que és una suma de Riemann de la integral $\pi \int_a^b f(x)^2\, dx$. $\diamondsuit$

5.7 Càlcul de primitives

En aquesta secció es presenten alguns mètodes (els més habituals) per trobar la primitiva d'una funció. En alguns casos es fa referència als nombres complexos (consulteu, per a més detalls, l'apèndix A). Si $F(x)$ és una primitiva de $f(x)$, diem que $F(x)$ és la "integral indefinida" de $f(x)$ i ho expressem així:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + K,$$

on K és una constant additiva arbitrària.

1) Primitives immediates

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + K \quad (n \neq -1), \qquad \int x^{-1}\,dx = \ln|x| + K,$$

$$\int e^x\,dx = e^x + K, \qquad \int \cos x\,dx = \sin x + K,$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + K, \qquad \int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \tan x + K,$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan x + K, \qquad \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x + K.$$

2) Integració "per parts"

D'acord amb el teorema de la integració per parts, es compleix

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b g(x)f'(x)\,dx.$$

La utilitat d'aquesta igualtat és que permet calcular la integral del costat esquerre calculant la integral del costat dret, si és més senzilla.

Exemple 1: Per calcular la integral $\int xe^x\,dx$ fem $f(x) = x$, $g'(x) = e^x$, amb la qual cosa $f'(x) = 1$, $g(x) = e^x$. Per tant,

$$\int xe^x\,dx = xe^x - \int e^x\,dx + K = e^x(x-1) + K.$$

Exemple 2: Per calcular $\int \ln x\,dx$ fem $f(x) = \ln x$, $g'(x) = 1$ i, per tant, $f'(x) = 1/x$, $g(x) = x$. Així doncs,

$$\int \ln x\,dx = x\ln x - \int dx + K = x(\ln x - 1) + K.$$

Exemple 3: Considerem ara la integral $\int e^x \sin x\, dx$. Si prenem $f(x) = e^x$ i $g'(x) = \sin x$ tenim $f'(x) = e^x$ i $g(x) = -\cos x$. Per tant,

$$\int e^x \sin x\, dx = -e^x \cos x + \int e^x \cos x\, dx + K.$$

La integral de la dreta no és més senzilla que l'original, però també la podem integrar "per parts" prenent, ara, $f(x) = e^x$ i $g'(x) = \cos x$, i obtenim

$$\int e^x \cos x\, dx = e^x \sin x - \int e^x \sin x\, dx + K.$$

Si combinem tots dos resultats arribem a

$$\int e^x \sin x\, dx = -e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \sin x\, dx + K,$$

és a dir,

$$\int e^x \sin x\, dx = \frac{1}{2}\, e^x (\sin x - \cos x) + K.$$

3) Integració de funcions racionals

Considerem les integrals del tipus

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\, dx,$$

on $P(x)$ i $Q(x)$ són polinomis, i grau$(P) <$ grau$(Q) = n$ (si no és així, tenim $P(x)/Q(x) = A(x) + B(x)/Q(x)$, on $A(x)$ i $B(x)$ són polinomis; la integral de $A(x)$ és trivial i $B(x)/Q(x)$ compleix la condició grau$(B) <$ grau(Q)). També podem fer sempre que el coeficient de x^n de $Q(x)$ sigui 1, és a dir,

$$Q(x) = x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \cdots + c_1 x + c_0.$$

El càlcul de la integral es fa en dos passos:

Pas 1: Descomposició en fraccions simples.

El denominador $Q(x)$ es pot expressar sempre així:

$$Q(x) = (x - a_1)^{m_1} \ldots (x - a_r)^{m_r}\ [(x - \alpha_1)^2 + \beta_1^2]^{n_1} \ldots [(x - \alpha_s)^2 + \beta_s^2]^{n_s},$$

on a_i són arrels *reals* del polinomi de multiplicitat m_i, i $\alpha_i \pm i\beta_i$ són arrels *complexes* de multiplicitat n_i.

$P(x)/Q(x)$ es pot expressar sempre com una suma de "fraccions simples"

$$
\begin{aligned}
P(x)/Q(x) \quad = \quad & \frac{A_{1,1}}{x-a_1} + \cdots + \frac{A_{1,m_1}}{(x-a_1)^{m_1}} \\
& + \cdots \\
& + \frac{A_{r,1}}{x-a_r} + \cdots + \frac{A_{r,m_r}}{(x-a_r)^{m_r}} \qquad (*) \\
& + \frac{B_{1,1}x + C_{1,1}}{(x-\alpha_1)^2+\beta_1^2} + \cdots + \frac{B_{1,n_1}x + C_{1,n_1}}{[(x-\alpha_1)^2+\beta_1^2]^{n_1}} \\
& + \cdots \\
& + \frac{B_{s,1}x + C_{s,1}}{(x-\alpha_s)^2+\beta_s^2} + \cdots + \frac{B_{s,n_s}x + C_{s,n_s}}{[(x-\alpha_s)^2+\beta_s^2]^{n_s}} \,.
\end{aligned}
$$

Pas 2: Integració de les fraccions simples.

El primer bloc d'integrals, amb $A_{i,j}$ constant en el numerador, s'integra immediatament, ja que les integrals són de la forma

$$\int \frac{1}{(x-a)^k}\, dx = \begin{cases} \ln(x-a) + K & \text{si } k = 1, \\ \dfrac{(x-a)^{1-k}}{(1-k)} + K & \text{si } k \neq 1. \end{cases}$$

El segon bloc porta a integrals del tipus

$$I \stackrel{\text{def}}{=} \int \frac{Bx + C}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^k}\, dx,$$

que podem reexpressar així

$$I = \frac{B}{2}\int \frac{2x - 2\alpha}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^k}\, dx + (B\alpha + C)\int \frac{1}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^k}\, dx \,.$$

La primera integral és proporcional a $\ln[(x-\alpha)^2+\beta^2]$ si $k = 1$ i és proporcional a $[(x-\alpha)^2+\beta^2]^{1-k}$ si $k \neq 1$. La segona integral és del tipus

$$\int \frac{1}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^k}\, dx,$$

que amb el canvi de variable $t = (x-a)/b$ (o $x = a + bt$) es converteix en

$$\int \frac{1}{[t^2+1]^k}\, dt \stackrel{\text{def}}{=} I_k \,.$$

Si $k = 1$, I_1 tenim $I_1 = \arctan t$. Per a valors superiors de k manipularem I_k per arribar a I_{k-1} i, de forma successiva, arribar a I_1. En efecte,

$$I_k = \int \frac{t^2+1}{[t^2+1]^k}\,dt - \int \frac{t^2}{[t^2+1]^k}\,dt.$$

La primera integral és I_{k-1}. La segona es pot integrar per parts, amb $f = t$ i $g' = t/[t^2+1]^k$,

$$\begin{aligned}
-\int \frac{t^2}{[t^2+1]^k}\,dt &= \frac{1}{2(k-1)}\frac{t}{[t^2+1]^{k-1}} - \frac{1}{2(k-1)}\int \frac{1}{[t^2+1]^{k-1}}\,dt \\
&= \frac{1}{2(k-1)}\frac{t}{[t^2+1]^{k-1}} - \frac{1}{2(k-1)}I_{k-1}.
\end{aligned}$$

Hem reduït, doncs, el càlcul de I_k al de I_{k-1}.

Exemple 1: Considerem la integral

$$\int \frac{x-1}{(x-2)^2(x-3)}\,dx.$$

La descomposició de l'integrand en fraccions simples és

$$\frac{x-1}{(x-2)^2(x-3)} = \frac{A_1}{(x-2)} + \frac{A_2}{(x-2)^2} + \frac{B}{(x-3)}.$$

Per determinar A_1, A_2 i B sumem les fraccions i igualem els numeradors

$$x-1 = A_1(x-2)(x-3) + A_2(x-3) + B(x-2)^2.$$

Una manera senzilla d'obtenir els coeficients A_1, A_2 i B és fer servir la igualtat anterior donant valors concrets a la variable x

$$\begin{aligned}
x = 2 &\;\Rightarrow\; 1 = -A_2, \\
x = 3 &\;\Rightarrow\; 2 = B, \\
x = 0 &\;\Rightarrow\; -1 = 6A_1 - 3A_2 + 4B \Rightarrow A_1 = -2.
\end{aligned}$$

Així doncs,

$$\frac{x-1}{(x-2)^2(x-3)} = \frac{-2}{(x-2)} + \frac{-1}{(x-2)^2} + \frac{2}{(x-3)},$$

i, per tant,

$$\int \frac{x-1}{(x-2)^2(x-3)}\,dx = -2\ln|x-2| + \frac{1}{x-2} + 2\ln|x-3| + K.$$

Exemple 2: Considerem la integral

$$\int \frac{3x^3+x}{(x^2+1)^2}\,dx.$$

La descomposició de l'integrand en fraccions simples és

$$\frac{3x^3+x}{(x^2+1)^2} = \frac{B_1x+C_1}{x^2+1} + \frac{B_2x+C_2}{(x^2+1)^2}\,.$$

Si igualem els numeradors tenim

$$3x^3+x = B_1x^3 + C_1x^2 + (B_1+B_2)x + (C_1+C_2),$$

d'on obtenim $B_1 = 3, B_2 = -2$ i $C_1 = C_2 = 0$, és a dir,

$$\frac{3x^3+x}{(x^2+1)^2} = \frac{3x}{x^2+1} - \frac{2x}{(x^2+1)^2}\,,$$

i, per tant,

$$\int \frac{3x^3+x}{(x^2+1)^2}\,dx = \frac{3}{2}\ln(x^2+1) + \frac{1}{x^2+1} + K.$$

Exemple 3: Considerem la integral

$$\int \frac{1}{x^3-1}\,dx.$$

La descomposició de l'integrand en fraccions simples és

$$\frac{1}{x^3-1} = \frac{1}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1}\,,$$

ja que el polinomi x^2+x+1 no té arrels reals. Si procedim com abans obtenim $A = 1/3, B = -1/3$ i $C = -2/3$, és a dir,

$$\frac{1}{x^3-1} = \frac{1}{3}\,\frac{1}{x-1} - \frac{1}{3}\,\frac{x+2}{x^2+x+1},$$

i, per tant,

$$\int \frac{1}{x^3-1}\,dx = \frac{1}{3}\ln|x-1| - \frac{1}{3}\int \frac{x+2}{x^2+x+1}\,dx.$$

Per calcular la darrera integral reexpressem el numerador $x+2$ com a suma d'un terme proporcional a la derivada del denominador i un terme numèric

$$\frac{x+2}{x^2+x+1} = \frac{(2x+1)/2}{x^2+x+1} + \frac{3/2}{x^2+x+1}\,,$$

amb la qual cosa tenim

$$\int \frac{1}{x^3-1}\,dx = \frac{1}{3}\ln|x-1| - \frac{1}{6}\ln(x^2+x+1) - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+x+1}\,.$$

Ens queda per calcular la integral de $1/(x^2+x+1)$. Per fer-ho, reexpressem el denominador "completant quadrats", és a dir, en la forma $(x+p)^2+q^2$. En aquest cas $x^2+x+1 = (x+\frac{1}{2})^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2})^2 = \frac{3}{4}[1+(\frac{2x+1}{\sqrt{3}})^2]$ i, per tant

$$\begin{aligned}-\frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+x+1} &= -\frac{2}{3}\int \frac{1}{1+(\frac{2x+1}{\sqrt{3}})^2} = -\frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{dt}{1+t^2}\\ &= -\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan t = -\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right),\end{aligned}$$

on hem fet el canvi de variable $t = (2x+1)/\sqrt{3}$ (és a dir, $x = (\sqrt{3}t-1)/2$, $dx = \sqrt{3}\,dt/2$).

Així doncs, arribem finalment a

$$\begin{aligned}&\int \frac{1}{x^3-1}\,dx\\ &\quad = \frac{1}{3}\ln|x-1| - \frac{1}{6}\ln(x^2+x+1) - \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + K.\end{aligned}$$

Una manera alternativa (equivalent) de procedir és treballar amb els nombres complexos. En aquest cas, la descomposició en fraccions simples només conté fraccions del tipus $1/(x-a)^k$, on a és en general un nombre complex. Llavors la integració es immediata, però, entre altres coses, cal treballar amb els logaritmes de nombres complexos. Vegem-ho.

Com que $Q(x)$ és un polinomi de coeficients *reals*, si a és una arrel complexa de Q, la conjugada a^* també ho és. Això fa que la descomposició $(*)$ contingui termes del tipus

$$\frac{A}{(x-a)^k} + \frac{A^*}{(x-a^*)^k} \qquad (**)$$

on $a = \alpha + i\beta$ i $a^* = \alpha - i\beta$ són arrels complexes del polinomi. Observem que sumem una expressió i la seva conjugada i, per tant, la suma és real.

Quan $k = 1$, el resultat de la integració de $(**)$ és

$$A \ln(x-a) + A^* \ln(x-a^*) + K,$$

on K és una constant arbitrària real. Com que $\ln z = \ln |z| + i \arg z$, tenim

$$\ln[x - (\alpha \pm i\beta)] = \ln \sqrt{(x-\alpha)^2 + \beta^2} \mp i \arctan \frac{\beta}{x-\alpha},$$

i l'expressió anterior esdevé

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}(A + A^*) \ln[(x-\alpha)^2 + \beta^2] - i(A - A^*) \arctan[\beta/(x-\alpha)] + K \\ &\qquad = (\operatorname{Re} A) \ln[(x-\alpha)^2 + \beta^2] + 2(\operatorname{Im} A) \arctan[\beta/(x-\alpha)] + K. \end{aligned}$$

Cal comentar que a l'argument d'un nombre complex li podem sumar múltiples enters de 2π. Això fa que a la part imaginària del seu logaritme li puguem sumar, també, múltiples enters de 2π. Aquests termes addicionals es poden englobar en la constant arbitrària K.

Quan $k > 1$, el resultat de la integració de $(**)$ és

$$\begin{aligned} &\frac{-1}{k-1}\left[\frac{A}{(x-a)^{k-1}} + \frac{A^*}{(x-a^*)^{k-1}}\right] + K \\ &\qquad = \frac{-1}{k-1}\left[\frac{A(x-a^*)^{k-1} + A^*(x-a)^{k-1}}{[(x-\alpha)^2 + \beta^2]^{k-1}}\right] + K. \end{aligned}$$

Exemple: Considerem, novament, la integral de l'exemple 3 anterior $\int (x^3 - 1)^{-1}\, dx$. El denominador té tres arrels, una és real, $x = 1$, i les altres dues són complexes (les solucions de l'equació $x^2 + x + 1 = 0$)

$$a = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad a^* = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

La descomposició de l'integrand en fraccions simples és

$$\frac{1}{x^3-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{D}{x-a} + \frac{D^*}{x-a^*}\,,$$

on ara D i D^* són complexos (i conjugats l'un de l'altre). La integral és, doncs,

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^3-1}\,dx &= A\ln(x-1) + D\ln(x-a) + D^*\ln(x-a^*) \qquad (***)\\ &= A\ln(x-1) + 2\operatorname{Re}\big(D\ln(x-a)\big)\\ &= A\ln(x-1) + 2\Big[(\operatorname{Re}D)\operatorname{Re}\big(\ln(x-a)\big) - (\operatorname{Im}D)\operatorname{Im}\big(\ln(x-a)\big)\Big].\end{aligned}$$

Si procedim com en els exemples anteriors trobem

$$A = \frac{1}{3}\,, \quad D = -\frac{1}{6} + i\frac{\sqrt{3}}{6}\,, \quad D^* = -\frac{1}{6} - i\frac{\sqrt{3}}{6}\,.$$

D'altra banda, com que $\ln(z) = \ln|z| + i\arg z$, tenim

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}\big[\ln(x-a)\big] &= \ln\left|x+\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right| = \ln\left[\Big(x+\frac{1}{2}\Big)^2 + \Big(\frac{\sqrt{3}}{2}\Big)^2\right]^{1/2}\\ &= \frac{1}{2}\ln(x^2+x+1),\\ \operatorname{Im}\big[\ln(x-a)\big] &= \arg\left(x+\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \arctan\left(\frac{\frac{-\sqrt{3}}{2}}{x+\frac{1}{2}}\right)\\ &= -\arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{2x+1}\right).\end{aligned}$$

Si ho substituïm a $(***)$ arribem finalment a

$$\int \frac{1}{x^3-1}\,dx = \frac{1}{3}\ln|x-1| - \frac{1}{6}\ln(x^2+x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{2x+1}\right) + K,$$

que coincideix amb el resultat obtingut anteriorment (recordem que $\arctan\frac{\sqrt{3}}{2x+1} = \frac{\pi}{2} - \arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}$, i el terme $\frac{\pi}{2}$ es pot englobar a K).

4) Integració de funcions racionals de funcions trigonomètriques

Considerem integrals del tipus

$$\int R(s,c)\,dx, \qquad \text{on} \quad s=\sin x, \quad c=\cos x,$$

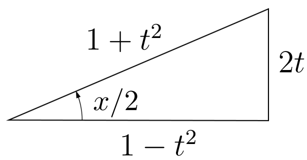
i R és una funció racional en les seves variables. El mètode consisteix a fer el canvi de variable

$$\boxed{t=\tan(x/2) \;\Leftrightarrow\; x=2\arctan t}$$

amb la qual cosa tenim

$$\sin x=\frac{2t}{1+t^2}\,, \quad \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}\,, \quad dx=\frac{2\,dt}{1+t^2}\,.$$

Aquest canvi ens porta a una funció racional de la variable t. El triangle de la figura següent és una regla mnemotècnica que ajuda a recordar aquest canvi de variable.



$$dx=\frac{2\,dt}{1+t^2}$$

Exemple 1:

$$\int \frac{1}{2+\cos x}\,dx=\int \frac{1}{2+\frac{1-t^2}{1+t^2}}\,\frac{2\,dt}{1+t^2}=\int \frac{2\,dt}{3+t^2}=\frac{2}{3}\int \frac{dt}{1+\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right)^2}$$

$$=\frac{2}{3}\int \frac{\sqrt{3}\,du}{1+u^2}=\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan u=\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right)$$

$$=\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\tan(x/2)\right)+K,$$

on hem fet el canvi $u=t/\sqrt{3}$ (o $t=\sqrt{3}u$, $dt=\sqrt{3}\,du$) a la segona línia.

Exemple 2:

$$\int \frac{1}{\cos x}\,dx=\int \frac{1}{\frac{1-t^2}{1+t^2}}\,\frac{2\,dt}{1+t^2}=\int \frac{2\,dt}{1-t^2}=\int\left(\frac{1}{1+t}+\frac{1}{1-t}\right)dt$$

$$=\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right|=\ln\left|\frac{1+\tan(x/2)}{1-\tan(x/2)}\right|=\ln\left|\frac{1+\sin x}{\cos x}\right|+K.$$

El mètode descrit és general, però de vegades es poden fer canvis que porten a expressions més senzilles:

· Si $R(-s,-c) = R(s,c)$, fem el canvi $\boxed{t = \tan x \Leftrightarrow x = \arctan t}$ i tenim

$$\sin x = t/\sqrt{1+t^2}\,, \quad \cos x = 1/\sqrt{1+t^2}\,, \quad dx = dt/(1+t^2).$$

EXEMPLE:

$$\int \frac{\cos^2 x}{1+\sin^2 x}\,dx = \int \frac{\frac{1}{1+t^2}}{1+\frac{t^2}{1+t^2}}\,\frac{dt}{1+t^2} = \int \frac{dt}{(1+t^2)(1+2t^2)}$$

$$= \int \left(\frac{2}{1+2t^2} - \frac{1}{1+t^2}\right)dt = \sqrt{2}\arctan\left(\sqrt{2}\tan x\right) - x + K.$$

· Si $R(s,-c) = -R(s,c)$, fem el canvi $\boxed{t = \sin x \Leftrightarrow x = \arcsin t}$ i tenim

$$\cos x = \sqrt{1-t^2}\,, \quad dx = dt/\sqrt{1-t^2}.$$

EXEMPLE:

$$\int \frac{1}{\cos^3 x}\,dx = \int \frac{1}{(1-t^2)^{3/2}}\,\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \int \frac{dt}{(t+1)^2(t-1)^2}$$

$$= \int \left[\frac{1/4}{t+1} - \frac{1/4}{t-1} + \frac{1/4}{(t+1)^2} + \frac{1/4}{(t-1)^2}\right]dt$$

$$= \frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right| + \frac{1}{4}\,\frac{2t}{1-t^2} = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right| + \frac{\sin x}{2\cos^2 x} + K.$$

· Si $R(-s,c) = -R(s,c)$, fem el canvi $\boxed{t = \cos x \Leftrightarrow x = \arccos t}$ i tenim

$$\sin x = \sqrt{1-t^2}\,, \quad dx = -dt/\sqrt{1-t^2}.$$

Exemple:

$$\int \frac{\cos x}{\sin^3 x + 2\cos^2 x \sin x}\, dx = \int \frac{t}{(1-t^2)^{3/2} + 2t^2\sqrt{1-t^2}}\, \frac{-dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

$$= \int \frac{t\, dt}{t^4 - 1} = \int \left[\frac{1/4}{t+1} + \frac{1/4}{t-1} - \frac{t/2}{t^2+1} \right] dt = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{t^2-1}{t^2+1} \right|$$

$$= \frac{1}{4} \ln \left(\frac{\sin^2 x}{1 + \cos^2 x} \right) + K.$$

5) Integració de funcions racionals de funcions hiperbòliques

Per a integrals del tipus

$$\int R(s, c)\, dx, \qquad \text{on} \quad s = \sinh x, \quad c = \cosh x,$$

i R és una funció racional en les seves variables, hi ha un mètode similar a l'anterior que consisteix a fer el canvi de variable

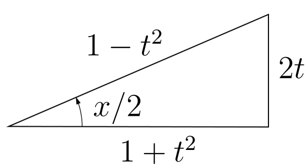
$$\boxed{t = \tanh(x/2) \Leftrightarrow x = 2\tanh^{-1} t.}$$

Amb aquest canvi tenim

$$dx = \frac{2\, dt}{1-t^2}\,, \quad \sinh x = \frac{2t}{1-t^2}\,, \quad \cosh x = \frac{1+t^2}{1-t^2}\,,$$

que ens porta a una funció racional de la variable t.

El triangle "hiperbòlic"[1] de la figura següent és una regla mnemotècnica que ajuda a recordar el canvi de variable.



$$dx = \frac{2\, dt}{1-t^2}$$

[1] El teorema de Pitàgores per a un triangle "hiperbòlic" és:
$(\text{hipotenusa})^2 = (\text{catet adjacent})^2 - (\text{catet oposat})^2$.

6) Integració de polinomis de funcions trigonomètriques

Considerem integrals del tipus

$$\int P(s,c)\,dx, \qquad \text{on } s=\sin x,\ c=\cos x,$$

i $P(s,c)=\sum_{mn} a_{mn}s^m c^n$ és un polinomi en les dues variables s i c. Ens cal, doncs, calcular integrals del tipus $\int \sin^m x \cos^n x dx$, on $m,n\in\mathbb{N}$. Distingim tres casos:

i) Si $m=1$ o $n=1$, la integral és immediata, ja que

$$\begin{aligned}\int \sin x\,\cos^n x\,dx &= -\frac{\cos^{n+1}x}{n+1}+C,\\ \int \sin^m x\cos x\,dx &= \frac{\sin^{m+1}x}{m+1}+C.\end{aligned}$$

ii) Si m o n és senar, fem servir la identitat $\sin^2 x+\cos^2 x=1$ (reiteradament, si cal) per reduir-la al cas anterior.

Exemple:

$$\begin{aligned}\int \sin^2 x\cos^3 x dx &= \int \sin^2 x\big(1-\sin^2 x\big)\cos x\,dx\\ &= \int \sin^2 x\cos x\,dx-\int \sin^4 x\cos x\,dx\\ &= \frac{\sin^3 x}{3}-\frac{\sin^5 x}{5}+K.\end{aligned}$$

iii) Si m i n són parells, fem servir les fórmules de l'angle meitat $\sin^2 x = [1-\cos(2x)]/2$, i $\cos^2 x=[1+\cos(2x)]/2$, per reduir-les al casos anteriors.

Exemple:

$$\begin{aligned}\int \sin^2 x \cos^2 x dx &= \int \left(\frac{1-\cos(2x)}{2}\right)\left(\frac{1+\cos(2x)}{2}\right) dx \\ &= \int \frac{1-\cos^2(2x)}{4}\, dx = \int \frac{\sin^2(2x)}{4}\, dx = \int \frac{1-\cos(4x)}{8}\, dx \\ &= \frac{1}{8}\left(x - \frac{\sin(4x)}{4}\right) + K.\end{aligned}$$

Hi ha un mètode alternatiu més simple per calcular les integrals del tipus $\int P(s,c)\, dx$ que fa servir els nombres complexos i consisteix a fer els dos passos següents:

Pas 1: fem la substitució $\boxed{t = e^{ix} \Leftrightarrow x = -i \ln t,}$ on i és la "unitat imaginària". Amb aquest canvi de variable tenim

$$dx = \frac{dt}{it}, \quad \sin x = \frac{t - t^{-1}}{2i}, \quad \cos x = \frac{t + t^{-1}}{2}.$$

Aquesta substitució es basa en les fórmules d'Euler

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}, \quad \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2},$$

i ens porta a un polinomi en les variables t i t^{-1} la integració del qual és immediata.

Pas 2: la primitiva obtinguda és també un polinomi en les variables t i t^{-1} i pot contenir també algun sumand del tipus $\ln t$.

Pel que fa al polinomi, cal reagrupar les potències enteres de t i t^{-1} en termes de la forma $(t^n - t^{-n})/2i$ o de la forma $(t^n + t^{-n})/2$. Llavors, el canvi de variable invers ens porta a

$$\frac{t^n - t^{-n}}{2i} = \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i} = \sin nx, \quad \frac{t^n + t^{-n}}{2} = \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2} = \cos nx.$$

El possible terme de tipus $\ln t$ es converteix en ix quan desfem el canvi.

Malgrat la presència de i's en els diferents estadis del càlcul el resultat final no en conté cap, ja que es tracta de la integral indefinida d'una funció real que, òbviament, ha de ser real.

Exemple:

$$\int \sin^2 x \cos^2 x dx = \int \left(\frac{t-t^{-1}}{2i}\right)^2 \left(\frac{t+t^{-1}}{2}\right)^2 \frac{dt}{it}$$

$$= -\frac{1}{16i}\int \frac{t^4+t^{-4}-2}{t}\,dt = -\frac{1}{16i}\int (t^3+t^{-5}-2t^{-1})\,dt$$

$$= -\frac{1}{16i}\left(\frac{t^4}{4}+\frac{t^{-4}}{-4}-2\ln t\right) = -\frac{1}{32}\left(\frac{t^4-t^{-4}}{2i}\right)+\frac{\ln t}{8i}$$

$$= -\frac{\sin(4x)}{32}+\frac{x}{8}+K.$$

7) Integració de polinomis de funcions hiperbòliques

Les integrals del tipus

$$\int P(s,c)\,dx, \qquad \text{on} \quad s=\sinh x, \quad c=\cosh x,$$

es poden fer de manera similar al cas anterior.

Pas 1: fem la substitució $t=e^x$ (o $x=\ln t$) i tenim $dx=dt/t$, $\sinh x=(t-t^{-1})/2$ i $\cosh x=(t+t^{-1})/2$. Aquest canvi de variable ens porta a un polinomi en les variables t i t^{-1} la integració del qual és immediata.

Pas 2: la primitiva obtinguda és també un polinomi en les variables t i t^{-1} i pot contenir també algun sumand del tipus $\ln t$.

Pel que fa al polinomi, cal reagrupar les potències enteres de t i t^{-1} en termes de la forma $(t^n-t^{-n})/2$ o de la forma $(t^n+t^{-n})/2$. Llavors, el canvi de variable invers ens porta a

$$\frac{t^n-t^{-n}}{2}=\frac{e^{nx}-e^{-nx}}{2}=\sinh nx, \qquad \frac{t^n+t^{-n}}{2}=\frac{e^{nx}+e^{-nx}}{2}=\cosh nx.$$

El possible terme amb $\ln t$ es converteix en x quan desfem el canvi.

8) Integració de funcions racionals que contenen e^x

El canvi de variable anterior també és útil en integrals del tipus $\int R(e^x)\,dx$, on $R(x)$ és una funció racional. Si fem $\boxed{t=e^x \Leftrightarrow x=\ln t}$ tenim $dx=dt/t$ i la integral es converteix en la integral d'una funció racional en la variable t.

EXEMPLE:

$$\int \frac{1}{1+e^x}\,dx = \int \frac{1}{1+t}\frac{dt}{t} = \int \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{1+t}\right)dt$$
$$= \ln\left|\frac{t}{1+t}\right| = \ln\left(\frac{e^x}{1+e^x}\right) + K.$$

9) Integració de funcions racionals que contenen $\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{p/q}$

Les integrals que contenen termes del tipus

$$\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_1}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_2}, \dots$$

on $r_1, r_2, \ldots \in \mathbb{Q}$, es poden convertir en integrals de funcions racionals amb el canvi

$$\boxed{t^m = \frac{ax+b}{cx+d} \Leftrightarrow x = \frac{b-dt^m}{ct^m-a}, \qquad dx = \frac{(ad-bc)mt^{m-1}}{(ct^m-a)^2}\,dt,}$$

on m és el mínim denominador comú dels exponents fraccionaris $r_1, r_2, \ldots$

EXEMPLE 1: Considerem la integral

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{x-1}}\,dx.$$

Tenim $\sqrt{x-1} = \left(\frac{x-1}{0x+1}\right)^{1/2}$, és a dir, $a = d = 1$, $b = -1$, $c = 0$ i $m = 2$. Per tant, el canvi de variable és

$$t^2 = x-1 \Leftrightarrow x = 1+t^2, \quad dx = 2t\,dt.$$

Per tant,

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{x-1}}\,dx = \int \frac{(1+t^2)^3}{t}2t\,dt = 2\int (t^6+3t^4+3t^2+1)\,dt$$
$$= 2\left(\frac{t^7}{7} + \frac{3t^5}{5} + t^3 + t\right)$$
$$= 2\sqrt{x-1}\left(\frac{(x-1)^3}{7} + \frac{3(x-1)^2}{5} + x\right) + K.$$

Exemple 2: Considerem la integral

$$\int \frac{1}{x^{1/2}+x^{1/3}}\,dx.$$

En aquest cas tenim $a=d=1$, $b=c=0$ i $m=6$. El canvi de variable és, doncs,

$$t^6 = x \Leftrightarrow t = x^{1/6}, \quad dx = 6t^5\,dt.$$

Per tant,

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{x^{1/2}+x^{1/3}}\,dx &= \int \frac{1}{t^3+t^2}\,6t^5\,dt = 6\int \frac{t^3}{t+1}\,dt \\
&= 6\int\left(t^2-t+1-\frac{1}{t+1}\right) \\
&= 2t^3-3t^2+6t-6\ln(t+1) \\
&= 2x^{1/2}-3x^{1/3}+6x^{1/6}-6\ln\left(x^{1/6}+1\right)+K.
\end{aligned}$$

10) Integració de funcions racionals que contenen $\sqrt{ax^2+bx+c}$

Volem integrar

$$\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})\,dx,$$

i ho fem en dos passos:

Pas 1: "completem quadrats" i convertim $\sqrt{ax^2+bx+c}$ en $\sqrt{\pm t^2 \pm r^2}$

i) Si $a>0$, $(4ac-b^2)>0$ cal fer el canvi

$$x = \frac{t}{\sqrt{a}} - \frac{b}{2a} \Leftrightarrow t = \sqrt{a}\left(x+\frac{b}{2a}\right), \qquad dx = \frac{dt}{\sqrt{a}}\,,$$

amb la qual cosa $\sqrt{ax^2+bx+c}$ es converteix en $\sqrt{t^2+r^2}$, amb $r^2 = c-(b^2/4a)$.

ii) Si $a>0$, $(4ac-b^2)<0$ cal fer el mateix canvi

$$x = \frac{t}{\sqrt{a}} - \frac{b}{2a} \Leftrightarrow t = \sqrt{a}\left(x+\frac{b}{2a}\right), \qquad dx = \frac{dt}{\sqrt{a}}\,,$$

amb la qual cosa $\sqrt{ax^2+bx+c}$ es converteix en $\sqrt{t^2-r^2}$, amb $r^2 = (b^2/4a) - c$.

iii) Si $a < 0$, $(4ac - b^2) < 0$ cal fer el canvi

$$x = \frac{t}{\sqrt{-a}} - \frac{b}{2a} \Leftrightarrow t = \sqrt{-a}\left(x + \frac{b}{2a}\right), \qquad dx = \frac{dt}{\sqrt{-a}},$$

amb la qual cosa $\sqrt{ax^2+bx+c}$ es converteix en $\sqrt{r^2-t^2}$, amb $r^2 = c - (b^2/4a)$.

iv) El cas $a < 0$, $(4ac - b^2) > 0$ no té interès, ja que ax^2+bx+c seria sempre negatiu i la seva arrel quadrada no seria real.

Així doncs, al final del primer pas tenim una integral del tipus

$$\int R(t, \sqrt{t^2+r^2})\,dt, \;\int R(t, \sqrt{t^2-r^2})\,dt \;\text{ o } \int R(t, \sqrt{r^2-t^2})\,dt.$$

Pas 2:

i) En el cas $\int R(t, \sqrt{t^2+r^2})\,dt$ fem el canvi

$$t = r\tan u, \quad dt = \frac{r}{\cos^2 u}\,du.$$

Llavors $\sqrt{t^2-r^2}$ es converteix en $r/\cos u$ i ens queda una integral de funcions trigonomètriques.

També es pot fer el canvi $t = r\sinh u$, $dt = r\cosh u\,du$. Llavors $\sqrt{t^2+r^2}$ es converteix en $r\cosh u$ (ja que $\cosh^2 u - \sinh^2 u = 1$) i ens queda una integral de funcions hiperbòliques.

ii) En el cas $\int R(t, \sqrt{t^2-r^2})\,dt$ fem el canvi

$$t = r\sec u = \frac{r}{\cos u}, \quad dt = \frac{r\sin u}{\cos^2 u}\,du.$$

Llavors $\sqrt{t^2-r^2}$ es converteix en $r\sin u/\cos u = r\tan u$ i ens queda una integral de funcions trigonomètriques.

També es pot fer el canvi $t = r\cosh u$, $dt = r\sinh u\,du$. Llavors $\sqrt{t^2-r^2}$ es converteix en $r\sinh u$ i ens queda una integral de funcions hiperbòliques.

iii) En el cas $\int R(t, \sqrt{r^2-t^2})\,dt$ fem el canvi $t = r\sin u$, $dt = r\cos u\,du$. Llavors $\sqrt{r^2-t^2}$ es converteix en $r\cos u$ i ens queda una integral de funcions trigonomètriques.

Exemple 1: Considerem la integral

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+x+1}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}}\,dx,$$

que és del tipus i) si fem $t = x + \frac{1}{2}$ i $r = \sqrt{3}/2$. En la variable t la integral és

$$\int \frac{1}{\sqrt{t^2+r^2}}\,dt.$$

Ara cal fer el canvi

$$t = r\tan u \Leftrightarrow u = \arctan\left(\frac{t}{r}\right), \quad dt = \frac{r}{\cos^2 u}\,du,$$

amb la qual cosa $\sqrt{x^2+x+1} = \sqrt{t^2+r^2} = r/\cos u$, i la integral esdevé de tipus trigonomètric,

$$\int \frac{r/\cos^2 u}{r/\cos u}\,du = \int \frac{1}{\cos u}\,du = \ln\left|\frac{1+\tan\frac{u}{2}}{1-\tan\frac{u}{2}}\right| = \ln\left|\frac{1+\sin u}{\cos u}\right|.$$

Per desfer els canvis, notem que $\tan u = t/r = (2x+1)/\sqrt{3}$ i, per tant,

$$\sin u = \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}}, \quad \cos u = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{x^2+x+1}}.$$

Així, arribem finalment a

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+x+1}}\,dx = \ln\left|x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x+1}\right| + K.$$

Exemple 2: Considerem la integral

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}\,dx,$$

que és del tipus ii) amb $t = x$ i $r = a$. El canvi és

$$x = a\sec u = \frac{a}{\cos u} \Leftrightarrow u = \arccos\left(\frac{a}{x}\right), \quad dx = \frac{a\sin u}{\cos^2 u}\,du,$$

i la integral esdevé

$$\int \frac{r\sin u/\cos^2 u}{r\sin u/\cos u}\,du = \int \frac{1}{\cos u}\,du = \ln\left|\frac{1+\sin u}{\cos u}\right|.$$

Desfem el canvi tenint en compte que $\sin u = \frac{1}{x}\sqrt{x^2-a^2}$, i $\cos u = a/x$. Així arribem a

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}\,dx = \ln\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right)+K.$$

Exemple 3: Considerem la integral

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx.$$

El canvi és

$$x = a\sin u \Leftrightarrow u = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right), \quad dx = a\cos u\,du,$$

i la integral esdevé

$$\int a^2\cos^2 u\,du = a^2\int \frac{1+\cos(2u)}{2}\,du = a^2\left(\frac{u}{2}+\frac{\sin(2u)}{4}\right).$$

Desfem el canvi per arribar a

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\left(a^2\arcsin(x/a)+x\sqrt{a^2-x^2}\right)+K.$$

5.8 Problemes

P5.1 Calculeu les integrals indefinides següents:

(a) $\displaystyle\int \frac{\sin[\ln(2x)]}{x}\,dx$

(b) $\displaystyle\int \tan^8(3x)\,dx$

(c) $\displaystyle\int \frac{\ln x}{5x}\,dx$

(d) $\displaystyle\int \frac{1}{(x-a)(x-b)}\,dx$

(e) $\displaystyle\int \frac{\sin x\cos x}{1+\sin^4 x}\,dx$

(f) $\displaystyle\int \sin^4 x\cos^5 x\,dx$

(g) $\displaystyle\int \sin(3x)\cos x\,dx$

(h) $\displaystyle\int \frac{e^x-e^{2x}}{e^{3x}-1}\,dx$

(i) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt[3]{x+1}-1}\,dx$

(j) $\displaystyle\int \frac{x^5}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

P5.2 Calculeu el volum de l'el·lipsoide generat per l'el·lipsi $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$, quan gira al voltant de l'eix x.

P5.3 Calculeu la longitud del segment de la corba $y=\dfrac{x^3}{6}+\dfrac{1}{2x}$, comprès entre $x=1$ i $x=2$.

Solucions

S5.1 Resultats:

(a) Canvi $u=\ln(2x)$ i integració per parts. Resultat: $-\cos[\ln(2x)]+K$.

(b) Canvi $u=\tan(3x)$ i es redueix a una funció racional. Resultat:

$$\frac{\tan^7(3x)}{21}-\frac{\tan^5(3x)}{15}+\frac{\tan^3(3x)}{9}-\frac{\tan(3x)}{3}+x+K.$$

(c) Integració per parts. Resultat: $\dfrac{(\ln x)^2}{10}+K$.

(d) Resultat: $\dfrac{1}{a-b}\ln\left|\dfrac{x-a}{x-b}\right|+K$.

(e) Canvis $u=\sin x$ i $t=u^2$. Resultat: $\dfrac{1}{2}\arctan(\sin^2 x)+K$.

(f) Resultat: $\dfrac{1}{5}\sin^5 x-\dfrac{2}{7}\sin^7 x+\dfrac{1}{9}\sin^9 x+K$.

(g) Feu servir la fórmula de De Moivre: $\sin(3x)=3\cos^2 x\sin x-\sin^3 x$ (vegeu pàgina 242).

Resultat: $-\dfrac{3}{4}\cos^4 x-\dfrac{1}{4}\sin^4 x+K$.

(h) Canvi $t=e^x$. Resultat: $-\dfrac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\dfrac{2e^x+1}{\sqrt{3}}\right)+K$.

(i) Canvi $t^6=x+1$. Resultat:

$$\frac{6}{7}(x+1)^{7/6}+\frac{6}{5}(x+1)^{5/6}-\frac{3}{2}(x+1)^{2/3}+2(x+1)^{1/2}$$
$$-3(x+1)^{1/3}+6(x+1)^{1/6}-6\ln\Big((x+1)^{1/6}+1\Big)+K.$$

(j) Canvi $x=\sin t$. Resultat: $-\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{15}(3x^4+4x^2+8)+K$.

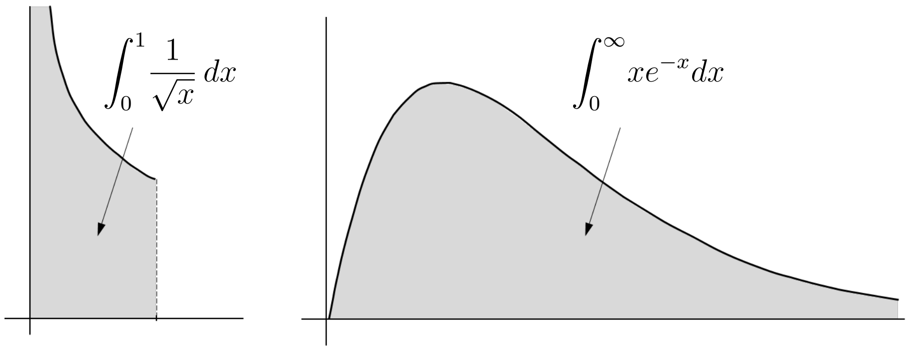
S5.2 Aïllem $y = b\sqrt{1-\dfrac{x^2}{a^2}} \stackrel{\text{def}}{=} f(x)$ i calculem $V = \pi\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)^2\,dx$ per obtenir

$$V = \frac{4}{3}\pi a b^2.$$

S5.3 $L = \displaystyle\int_1^2 \sqrt{1+f'(x)^2}\,dx = \frac{17}{12}\,.$

6 INTEGRALS IMPRÒPIES

La teoria de la integral de Riemann només és aplicable a funcions definides i *fitades* en un interval tancat *finit* $[a, b]$, ja que sense aquestes restriccions, no podríem parlar de sumes superiors, inferiors o de Riemann. En aquest capítol estenem la integral a funcions que no compleixen aquests requisits. Això ens permetrà considerar integrals com



en les quals l'integrand té una discontinuïtat infinita en algun dels límits d'integració o un d'aquests límits és $\pm\infty$.

6.1 Integral impròpia d'una funció localment integrable

Funcions localment integrables

Sigui f una funció definida a l'interval $[a, b)$, on a és finit mentre que $b = +\infty$ o és finit, però f té una discontinuïtat infinita en aquest punt. Diem que f és una funció *localment integrable* en aquest interval si és integrable en qualsevol subinterval finit de $[a, b)$, és a dir, si $\forall z \in [a, b)$ la integral $\int_a^z f$ existeix.

Similarment, una funció definida a l'interval $(a, b]$ és localment integrable a $(a, b]$ si és integrable a $[z, b]$, $\forall z \in (a, b]$.

Integrals impròpies

DEFINICIÓ: Si f és localment integrable a $[a, b)$, la *integral impròpia* de f en aquest interval és el límit (si existeix)

$$\int_a^{\to b} f(x)\,dx \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{z\to b^-} \int_a^z f(x)\,dx.$$

Si el límit és finit diem que la integral impròpia és *convergent*, si és $\pm\infty$ diem que la integral impròpia és *divergent* i si el límit no existeix diem que f no és integrable en sentit impropi a l'interval $[a, b)$.[1]

Si $c \in [a, b)$ la integral impròpia es pot descompondre en una integral ordinària a $[a, c]$ i una d'impròpia a $[c, b)$

$$\int_a^{\to b} f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^{\to b} f(x)\,dx,$$

ja que només cal fer el límit $z \to b^-$ de $\int_a^z f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^z f(x)\,dx$. Concloem d'això que, $\int_a^{\to b} f$ convergeix si i només si $\int_c^{\to b} f$ convergeix, $\forall c \in [a, b)$.

Similarment, es defineix la integral impròpia quan f és localment integrable a $(a, b]$

$$\boxed{\int_{a\leftarrow}^b f(x)\,dx \overset{\text{def}}{=} \lim_{z\to a^+} \int_z^b f(x)\,dx,}$$

la qual, si existeix, és també descomponible

$$\int_{a\leftarrow}^b f(x)\,dx = \int_{a\leftarrow}^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

Exemple 1:

$$\int_{0\leftarrow}^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{z\to 0^+} \int_z^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{z\to 0^+} \left[2\sqrt{x}\right]_z^1 = \lim_{z\to 0^+} 2\left(1 - \sqrt{z}\right) = 2.$$

Exemple 2:

$$\int_0^{\to+\infty} xe^{-x}\,dx = \lim_{z\to+\infty} \int_0^z xe^{-x}\,dx = \lim_{z\to+\infty} \left[\left[-xe^{-x}\right]_0^z + \int_0^z e^{-x}\,dx\right]$$
$$= \lim_{z\to+\infty} \left[-ze^{-z} + 1 - e^{-z}\right] = 1.$$

Linealitat de les integrals impròpies

Si f i g són integrables (en sentit impropi) a $[a, b)$ i $k \in \mathbb{R}$, es compleix

$$\begin{aligned} \int_a^{\to b} [f(x) + g(x)]\,dx &= \int_a^{\to b} f(x)\,dx + \int_a^{\to b} g(x)\,dx, \\ \int_a^{\to b} kf(x)\,dx &= k\int_a^{\to b} f(x)\,dx. \end{aligned}$$

[1] La fletxa $\to$ en el límit d'integració s'omet habitualment. Tanmateix, en aquesta secció i la següent la mantindrem per fer explícit el límit d'integració que fa impròpia la integral.

DEMOSTRACIÓ: és una conseqüència directa de la linealitat de les integrals ordinàries i de les propietats dels límits. $\diamondsuit$

El mateix passa amb les integrals impròpies del tipus $\int_{a\leftarrow}^{b}$.

Integrals doblement impròpies

Quan f és localment integrable a (a,b) tenim una integral *doblement impròpia.* Això passa en les situacions següents:

- $a=-\infty$ i $b=+\infty$,
- $a=-\infty$ i f té una discontinuïtat infinita en el punt b,
- f té una discontinuïtat infinita en el punt a i $b=+\infty$,
- f té discontinuïtats infinites en els punts a i b.

En aquest cas es defineix

$$\boxed{\int_{a\leftarrow}^{\rightarrow b} f(x)\,dx \stackrel{\text{def}}{=} \int_{a\leftarrow}^{c} f(x)\,dx + \int_{c}^{\rightarrow b} f(x)\,dx,}$$

on c és un punt qualsevol de (a,b). Evidentment, la suma anterior és independent de l'elecció del punt c. Si escollim un altre punt c' (suposem $c'>c$) tindrem

$$\begin{aligned}\int_{a\leftarrow}^{c} f + \int_{c}^{\rightarrow b} f &= \int_{a\leftarrow}^{c} f + \left[\int_{c}^{c'} f + \int_{c'}^{\rightarrow b} f\right]\\ &= \left[\int_{a\leftarrow}^{c} f + \int_{c}^{c'} f\right] + \int_{c'}^{\rightarrow b} f = \int_{a\leftarrow}^{c'} f + \int_{c'}^{\rightarrow b} f.\end{aligned}$$

Notem que el càlcul de $\int_{a\leftarrow}^{\rightarrow b} f$ requereix el càlcul separat de dues integrals impròpies, és a dir,

$$\int_{a\leftarrow}^{\rightarrow b} f(x)\,dx = \lim_{z\to a^+}\int_{z}^{c} f(x)\,dx + \lim_{z'\to b^-}\int_{c}^{z'} f(x)\,dx,$$

on ambdós límits han d'existir separadament.

També tenim una integral doblement impròpia si f està definida en tots els punts de l'interval finit $[a,b]$ llevat d'un punt c, interior a aquest interval, on hi ha una discontinuïtat infinita. En aquest cas tindrem

$$\begin{aligned}\int_{a}^{b} f(x)\,dx &\stackrel{\text{def}}{=} \int_{a}^{\rightarrow c} f(x)\,dx + \int_{c\leftarrow}^{b} f(x)\,dx\\ &= \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{a}^{c-\varepsilon} f(x)\,dx + \lim_{\varepsilon'\to 0^+}\int_{c+\varepsilon'}^{b} f(x)\,dx,\end{aligned}$$

on, com abans, tots dos límits han d'existir separadament.

Exemple: Trobem les integrals impròpies de la funció $f(x) = 1/x^p$. Si $0 < a < b < +\infty$, i p és un nombre real *positiu*, la funció $f(x) = 1/x^p$ és integrable a $[a, b]$ i tenim

$$\int_a^b \frac{1}{x^p}\,dx = \begin{cases} \ln(b/a) & \text{si } p = 1, \\ [b^{1-p} - a^{1-p}]/(1-p) & \text{si } p \neq 1. \end{cases}$$

Si prenem els límits $b \to +\infty$, $a \to 0^+$, tenim

	$\int_{0\leftarrow}^{b} \frac{1}{x^p}\,dx$	$\int_{a}^{\to+\infty} \frac{1}{x^p}\,dx$	$\int_{0\leftarrow}^{\to+\infty} \frac{1}{x^p}\,dx$
$p = 1$	divergent	divergent	divergent
$p > 1$	divergent	$a^{1-p}/(p-1)$	divergent
$p < 1$	$b^{1-p}/(1-p)$	divergent	divergent

Integrabilitat absoluta

Si f és localment integrable a $[a, b)$, diem que f és *absolutament integrable* en aquest interval si la integral impròpia $\int_a^{\to b} |f(x)|dx$ és convergent. El teorema següent afirma que, en sentit impropi, la integrabilitat absoluta és condició suficient per a la integrabilitat.[2]

Teorema: Si f és absolutament integrable a $[a, b)$, aleshores és integrable en aquest interval, és a dir,

$$\int_a^{\to b} |f| \text{ convergent } \Rightarrow \int_a^{\to b} f \text{ convergent.}$$

Demostració: siguin $\widetilde{F}(z) \stackrel{\text{def}}{=} \int_a^z |f|$ i $F(z) \stackrel{\text{def}}{=} \int_a^z f$. Per hipòtesi, $\lim_{z\to b^-} \widetilde{F}(z)$ existeix i hem de demostrar que $\lim_{z\to b^-} F(z)$ també

[2] Notem que això no passa amb les integrals ordinàries. La funció $f(x)$ de valors 1 si $x \in \mathbb{Q}$ i (-1) si $x \notin \mathbb{Q}$, no és integrable en cap interval, mentre que $|f(x)| = 1$ ho és en qualsevol.

existeix. Per fer-ho recordem la condició de Cauchy per a l'existència del límit d'una funció: $\lim_{z\to b^-} F(z)$ existeix si i només si, $\forall\varepsilon > 0$ hi ha algun entorn de b (entorn de l'esquerra, en aquest cas) tal que si z i z' són dins d'aquest entorn, $|F(z) - F(z')| < \varepsilon$ (vegeu pàgina 60). Llavors, si $z' < z$ tenim

$$\begin{aligned} |F(z) - F(z')| &= \left| \int_a^z f - \int_a^{z'} f \right| = \left| \int_{z'}^z f \right| \le \int_{z'}^z |f| \\ &= \int_a^z |f| - \int_a^{z'} |f| = \widetilde{F}(z) - \widetilde{F}(z') = |\widetilde{F}(z) - \widetilde{F}(z')|, \end{aligned}$$

on a la darrera igualtat hem fet servir que $\widetilde{F}(z)$ és creixent. Com que $\widetilde{F}(z)$ compleix la condició de Cauchy, $F(z)$ també la compleix i, per tant, $\lim_{z\to b^-} F(z)$ existeix. $\diamondsuit$

6.2 Integrals impròpies de funcions no negatives

Un cas particular interessant és el de les integrals impròpies de les funcions (localment integrables) *no negatives*, és a dir, que compleixen $f(x) \ge 0$. En aquest cas tenim una condició necessària i suficient per a la integrabilitat.

TEOREMA: Si f és localment integrable i *no negativa* a $[a, b)$, i $S(z) \overset{\text{def}}{=} \int_a^z f$, aleshores

$$\int_a^{\to b} f \text{ convergeix } \Leftrightarrow S(z) \text{ és fitada superiorment a } [a, b).$$

DEMOSTRACIÓ: com que f és no negativa, la funció $S(z)$ és creixent a $[a, b)$ i, per tant, el límit $\lim_{z\to b^-} S(z)$ coincideix amb el suprem de $S(z)$ a $[a, b)$, però $S(z)$ té suprem si i només si és fitada superiorment. $\diamondsuit$

Hi ha una condició similar per al cas en què f estigui definida a $(a, b]$: $\int_{a\leftarrow}^b f$ convergeix si i només si $S(z) = \int_z^b f$ és fitada superiorment.

Notem que, d'acord amb aquest resultat, les integrals impròpies de funcions no negatives només poden ser convergents (quan $S(z)$ sigui fitada superiorment) o divergents (quan no ho sigui).

Criteri de comparació

Vegem ara una condició suficient per a la convergència de la integral impròpia d'una funció no negativa:

TEOREMA: Si f i g són localment integrables i no negatives a $[a,b)$, i λ és un nombre real tal que en algun entorn de b es compleix que $f(x) < \lambda g(x)$, aleshores

$$\int_a^{\to b} g \text{ convergent } \Rightarrow \int_a^{\to b} f \text{ convergent.}$$

(Consegüentment, $\int_a^{\to b} f$ divergent $\Rightarrow \int_a^{\to b} g$ divergent.)

DEMOSTRACIÓ: fem la descomposició $\int_a^{\to b} = \int_a^c + \int_c^{\to b}$, triant el punt c dins l'entorn de b on es compleix la desigualtat $f(x) < \lambda g(x)$. Llavors, $\forall z \in [c,b)$ tenim

$$\int_c^z f < \lambda \int_c^z g,$$

però com que, per hipòtesi, $\int_c^{\to b} g$ convergeix, $\int_c^z g$ ha de ser fitada superiorment i, per tant, $\int_c^z f$ també ho és. Així doncs, $\int_c^{\to b} f$ i també $\int_a^{\to b} f$ són convergents. $\diamondsuit$

Tenim una condició similar quan l'interval és $(a,b]$.

EXEMPLE 1: Considerem la integral impròpia

$$\int_0^{\to +\infty} \frac{1}{\sqrt{1+x^3}}\, dx.$$

Per esbrinar si és o no convergent notem que $\frac{1}{\sqrt{1+x^3}} < \frac{1}{\sqrt{x^3}} = \frac{1}{x^{3/2}}$. Com que la integral de $1/x^{3/2}$ entre $c > 0$ i $+\infty$ és convergent, el mateix passa amb la de $1/\sqrt{1+x^3}$, entre c i $+\infty$.

Pel que fa a la integral entre 0 i c, encara que la integral de $1/x^{3/2}$ és divergent, com que $1/\sqrt{1+x^3}$ és contínua a $[0,c]$, és integrable (en el sentit normal) en aquest interval. Així doncs,

$$\int_0^{\to +\infty} \frac{1}{\sqrt{1+x^3}}\, dx = \int_0^c \frac{1}{\sqrt{1+x^3}}\, dx + \int_c^{\to +\infty} \frac{1}{\sqrt{1+x^3}}\, dx,$$

és convergent, ja que la segona integral del costat dret ho és.

Exemple 2: Considerem la integral impròpia

$$\int_1^{\to+\infty} \frac{x}{\sqrt{1+x^3}}\,dx.$$

Com que $\frac{x}{\sqrt{1+x^3}} > \frac{x}{\sqrt{x^3+x^3}} = \frac{1}{\sqrt{2}\,x^{1/2}}$ i la integral $\int_1^{\to+\infty} \frac{1}{x^{1/2}}\,dx$ és divergent, concloem que $\int_1^{\to+\infty} \frac{x}{\sqrt{1+x^3}}\,dx$ també ho és.

Criteri de comparació fent pas al límit

La condició següent és una conseqüència directa del criteri de comparació.

Si f i g són localment integrables i no negatives a $[a,b)$, i $A = \lim_{x\to b^-} \frac{f(x)}{g(x)}$, aleshores

1) Si $A \neq \infty$: $\displaystyle\int_a^{\to b} g$ convergent $\Rightarrow \displaystyle\int_a^{\to b} f$ convergent.

2) Si $A \neq 0$: $\displaystyle\int_a^{\to b} f$ convergent $\Rightarrow \displaystyle\int_a^{\to b} g$ convergent.

Conseqüentment, si $A \neq 0, \infty$ les integrals $\int_a^{\to b} f$ i $\int_a^{\to b} g$ són totes dues convergents o totes dues divergents.

Demostració: si $A \neq \infty$, per a cada $\varepsilon > 0$ hi haurà algun entorn de b en el qual $\frac{f(x)}{g(x)} \in (A-\varepsilon, A+\varepsilon)$. Per tant, en aquest entorn es compleix $\frac{f(x)}{g(x)} < A+\varepsilon$, és a dir, $f(x) < [A+\varepsilon]\,g(x)$ i només cal aplicar el criteri de comparació.

Si $A \neq 0$, tenim que $\lim_{x\to b^-} \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{1}{A} \neq \infty$ amb la qual cosa aquest cas es redueix al cas anterior amb els papers de f i g intercanviats.
$\diamondsuit$

Exemple 1: Considerem la integral impròpia $\int_{0\leftarrow}^1 \frac{1}{x+x^2}\,dx$. Si prenem $f(x) = 1/(x+x^2)$ i $g(x) = 1/x$, tenim

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{x+x^2} = 1\ (\neq 0, \infty),$$

i com que $\int_{0\leftarrow}^1 \frac{1}{x}\,dx$ és divergent, $\int_{0\leftarrow}^1 \frac{1}{x+x^2}\,dx$ també ho és.

Exemple 2: Considerem ara la integral impròpia $\int_1^{\to+\infty} \frac{1}{x+x^2}\,dx$. Si $f(x) = 1/(x+x^2)$ i $g(x) = 1/x^2$, tenim

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x+x^2} = 1 \; (\neq 0, \infty),$$

i com que $\int_1^{\to+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$ és convergent, la integral $\int_1^{\to+\infty} \frac{1}{x+x^2}\,dx$ també ho és.

Exemple 3: Considerem la integral impròpia

$$\int_{0\leftarrow}^{1} \frac{1}{\sqrt{x}+3\sqrt[3]{x}}\,dx = \int_{0\leftarrow}^{1} \frac{1}{x^{1/2}+3x^{1/3}}\,dx.$$

El denominador es pot reescriure $x^{1/3}(3+x^{1/6}) = x^{1/3}(3+\cdots)$, on els punts suspensius són termes que tendeixen a 0 quan $x \to 0^+$. Això suggereix triar la funció $g(x) = 1/x^{1/3}$ per aplicar el criteri de comparació a la funció $f(x) = 1/(\sqrt{x}+3\sqrt[3]{x})$, és a dir,

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1/[x^{1/3}(3+\cdots)]}{1/x^{1/3}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{3+\cdots} = \frac{1}{3}.$$

Per tant, com que $\int_{0\leftarrow}^{1} \frac{1}{x^{1/3}}\,dx$ és convergent, $\int_{0\leftarrow}^{1} \frac{1}{\sqrt{x}+3\sqrt[3]{x}}\,dx$ també ho és.

Exemple 4: Considerem la integral impròpia

$$\int_{0\leftarrow}^{1} \frac{\tan^2 x}{\sqrt{x}(1-\cos x)}\,dx.$$

Al voltant de $x=0$ tenim $\tan x = x + \mathrm{o}(x)$, $1-\cos x = \frac{x^2}{2} + \mathrm{o}(x^2)$ (recordem que $\mathrm{o}(x)$ = infinitèsim d'ordre superior a x quan $x \to 0$). Per tant,

$$\frac{\tan^2 x}{\sqrt{x}(1-\cos x)} = \frac{x^2+\mathrm{o}(x^2)}{\sqrt{x}\big(x^2/2+\mathrm{o}(x^2)\big)} = \frac{2}{\sqrt{x}}\big(1+\mathrm{o}(x)\big).$$

La integral és, doncs, convergent, ja que $\int_{0\leftarrow}^{1} x^{-1/2}\,dx$ ho és.

Tot i que el criteri de comparació només és aplicable quan f és no negativa, també pot ser útil en altres casos. Per exemple, si l'apliquem a $|f|$ (que és no negativa) i concloem que $\int_a^{\to b}|f|$ és convergent, llavors $\int_a^{\to b} f$ també ho és.

Apliquem, tot seguit, aquests resultats a l'estudi de la funció Γ d'Euler.

6.3 Funció Γ d'Euler

Per a $x>0$, es defineix

$$\boxed{\Gamma(x) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^{\infty} t^{x-1}e^{-t}dt.}$$

La funció $f(t)=t^{x-1}e^{-t}$ està definida a l'interval $(0,+\infty)$. Es tracta, doncs, d'una integral doblement impròpia i, per tant, l'haurem de descompondre en dues: $\int_0^{+\infty}=\int_0^1+\int_1^{+\infty}$. Estudiem, ara, la convergència de cadascuna d'aquestes integrals.

La primera integral, $\int_0^1 t^{x-1}e^{-t}dt$, només és impròpia quan $x<1$, ja que llavors $f(t)$ té una discontinuïtat infinita a $t=0$ (quan $x\geq 1$, $f(t)$ és contínua i, per tant, integrable a l'interval $[0,1]$). La convergència d'aquesta integral impròpia està garantida, ja que $f(t)$ és no negativa, es compleix

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{t^{x-1}e^{-t}}{t^{x-1}}=1,$$

i la funció t^{x-1} és integrable a $(0,1]$ quan $0<x<1$,

Quan $x\leq 0$ la integral de la funció t^{x-1} és divergent i, per tant, la del numerador també ho és.

Pel que fa a la segona integral, $\int_1^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$, la seva convergència està també assegurada, atès que la funció t^{-2} és integrable a $[1,+\infty)$, i es compleix

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{t^{x-1}e^{-t}}{t^{-2}}=0.$$

Així doncs, la integral que defineix la funció $\Gamma(x)$ només és convergent per a $x>0$ i, per tant, $\Gamma(x)$ està definida a $(0,+\infty)$.

Fórmula de recurrència: extensió a $x<0$

D'acord amb la definició, $\Gamma(x+1)=\int_0^{\infty} t^x e^{-t}dt$. Si integrem per parts tenim

$$\Gamma(x+1)=\int_0^{\infty} t^x e^{-t}dt=\big[-t^x e^{-t}\big]_0^{\infty}+x\int_0^{\infty} t^{x-1}e^{-t}dt=x\Gamma(x).$$

Hem trobat, doncs, una fórmula de recurrència que relaciona els valors de Γ en dos punts que distin 1 entre ells

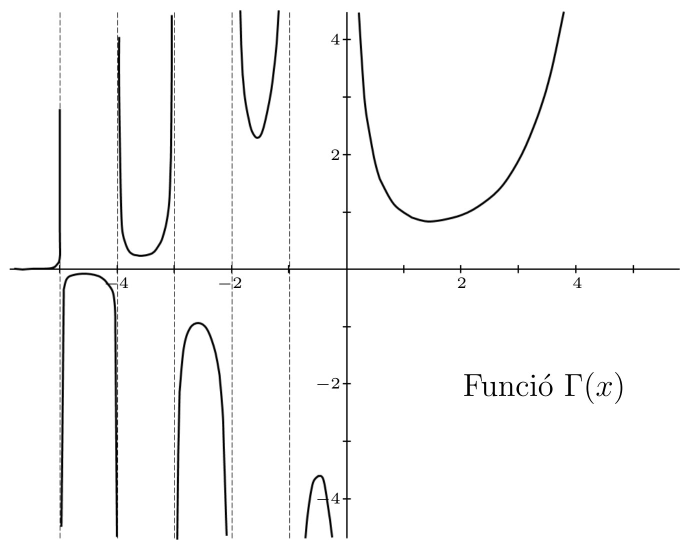
$$\boxed{\Gamma(x+1)=x\Gamma(x).}$$

Si aïllem $\Gamma(x)$ a la igualtat anterior tenim

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+1)}{x}.$$

Observem que el segon membre està ben definit quan $-1 < x < 0$. Això ens permet estendre la funció Γ a l'interval $(-1, 0)$ si fem servir la igualtat anterior com a *definició* de $\Gamma(x)$ en aquest interval. Podem repetir el procés indefinidament i estendre la definició de $\Gamma(x)$ als intervals $(-2, -1)$, $(-3, -2)$, $(-4, -3)$, etc.

D'aquesta manera tenim definida $\Gamma(x)$ a tota la recta real, llevat dels enters no positius $(0, -1, -2, \ldots)$. Notem, però, que quan $x < 0$ la funció $\Gamma(x)$ no ve donada per la integral $\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt$, ja que, com hem vist, aquesta integral és divergent quan $x \leq 0$.



Funció factorial

Quan $x = n \in \mathbb{N}$ la fórmula de recurrència aplicada n vegades ens dona

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n(n-1)\Gamma(n-1) = \cdots = n!\,\Gamma(1).$$

D'altra banda, $\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t}dt = 1$. Per tant,

$$\boxed{\Gamma(n+1) = n!.}$$

Fem servir aquesta relació com a definició del factorial de qualsevol nombre real que no sigui un enter negatiu, és a dir,

$$x! \stackrel{\text{def}}{=} \Gamma(x+1), \quad (x \neq -1, -2, -3, \ldots).$$

La funció $f(x) = x!$ s'anomena *funció factorial*. És contínua a tota la recta real, llevat dels enters negatius on hi té discontinuïtats infinites. El seu gràfic és el mateix que el de la funció Γ, però desplaçat una unitat cap a l'esquerra.

EXEMPLE: A partir de la igualtat[3] $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$, calculem $\Gamma(1/2)$ i $(1/2)!$.

$$\Gamma(1/2) = \int_0^\infty t^{-1/2}e^{-t}dt = \int_0^\infty u^{-1}e^{-u^2}2u\,du = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2}du = \sqrt{\pi},$$

on hem fet el canvi de variable $t = u^2$, $dt = 2u\,du$, i hem fet servir que e^{-u^2} és una funció parella. Tenim doncs, $(-1/2)! = \Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ i, per tant, $(1/2)! = \frac{1}{2}(-1/2)! = \sqrt{\pi}/2$.

Fórmula de Stirling

Tant la funció Γ com la funció factorial tenen límit infinit quan $x \to +\infty$. Es pot demostrar[4] que aquest "infinit" és del mateix ordre que $\lim_{x\to+\infty} x^x e^{-x}\sqrt{2\pi x}$, és a dir,

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{\Gamma(x+1)}{x^x e^{-x}\sqrt{2\pi x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x!}{x^x e^{-x}\sqrt{2\pi x}} = 1.}$$

Aquesta relació es coneix com la Fórmula de Stirling i és molt útil per al càlcul aproximat del factorial de nombres grans

$$n! \simeq n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}.$$

[3] La funció e^{-x^2} té primitiva perquè és contínua, però aquesta primitiva no es pot expressar mitjançant funcions elementals. Això fa que aquesta integral no es pugui calcular amb el mètode habitual. Tanmateix, és molt fàcil trobar el valor de $I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$ fent servir el càlcul en dues variables. Sense entrar en detalls,

$$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}dxdy = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2}dy = I^2.$$

D'altra banda, si fem servir coordenades polars tenim

$$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}dxdy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\infty re^{-r^2}dr = 2\pi\left[-\frac{e^{-r^2}}{2}\right]_0^\infty = \pi.$$

De les dues igualtats anteriors deduïm que $I = \sqrt{\pi}$.

[4] Vegeu, per exemple, la secció 3 del capítol VIII de J. M. Ortega, *Introducció a l'anàlisi matemàtica, op. cit.*

Altres funcions eulerianes:

- Funció β d'Euler:

$$\beta(x,y) \overset{\text{def}}{=} \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt = 2\int_0^{\pi/2} (\sin\phi)^{2x-1}(\cos\phi)^{2y-1}d\phi = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}\,,$$

  on hem fet el canvi $t = (\cos\phi)^2$.

- Funció Ψ (també anomenada *digamma*) d'Euler:

$$\Psi(x) \overset{\text{def}}{=} \frac{d}{dx}\ln\Gamma(x) = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}\,.$$

  El seu valor a $x = 1$ és $\Psi(1) = -\gamma$, on $\gamma = 0{,}577215664901\ldots$ es coneix com la *constant d'Euler-Mascheroni* (no se sap si és racional o irracional).

6.4 Valor principal de Cauchy

Ja hem vist que les integrals doblement impròpies dels tipus

- $\int_a^b f$, on f té una discontinuïtat infinita a $c \in (a,b)$
- $\int_{-\infty}^{+\infty} g$

són, de fet, sumes de dues integrals impròpies

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)\,dx &= \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_a^{c-\varepsilon} f + \lim_{\varepsilon'\to 0^+}\int_{c+\varepsilon'}^b f,\\
\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\,dx &= \lim_{a\to-\infty}\int_a^u g + \lim_{b\to+\infty}\int_u^b g, \qquad (u \text{ arbitrari}),
\end{aligned}$$

és a dir, les integrals són convergents si els dos límits sumats existeixen separadament.

Pot passar que els límits no existeixin separadament (i, per tant, les integrals no són convergents) però que existeixin els límits combinats

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\left[\int_a^{c-\varepsilon} f + \int_{c+\varepsilon}^b f\right], \qquad \lim_{A\to+\infty}\left[\int_{-A}^u g + \int_u^A g\right] = \lim_{A\to+\infty}\int_{-A}^A g.$$

Aquests límits, si existeixen, s'anomenen *valor principal* (de Cauchy) de $\int_a^b f$ i de $\int_{-\infty}^{+\infty} g$, respectivament, i es representen per

$$\text{VP}\int_a^b f, \qquad \text{VP}\int_{-\infty}^{+\infty} g.$$

Evidentment, si la integral doblement impròpia és convergent, el seu valor coincideix amb el del seu valor principal. Però pot succeir que existeixi el VP però no la integral (doblement) impròpia.

EXEMPLE 1: La integral $\int_{-2}^{3} \frac{dx}{x}$ és doblement impròpia, ja que l'integrand té una discontinuïtat infinita a l'origen. No és convergent, ja que les integrals impròpies $\int_{-2}^{\to 0} \frac{dx}{x}$ i $\int_{0\leftarrow}^{3} \frac{dx}{x}$ són separadament divergents. No obstant això, existeix el valor principal de Cauchy:

$$\mathrm{VP}\int_{-2}^{3} \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\left[\int_{-2}^{0-\varepsilon} \frac{dx}{x} + \int_{0+\varepsilon}^{3} \frac{dx}{x}\right] = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\left[\ln\frac{\varepsilon}{2} + \ln\frac{3}{\varepsilon}\right] = \ln\frac{3}{2}\,.$$

EXEMPLE 2: La integral $\int_{-\infty}^{+\infty} xe^{x^2}dx$ tampoc és convergent, ja que ni $\int_{-\infty}^{0} xe^{x^2}dx$ ni $\int_{0}^{+\infty} xe^{x^2}dx$ ho són. En canvi,

$$\mathrm{VP}\int_{-\infty}^{+\infty} xe^{x^2}dx = \lim_{A\to+\infty}\int_{-A}^{A} xe^{x^2}dx = \lim_{A\to+\infty}\left[\frac{e^{x^2}}{2}\right]_{-A}^{A} = 0.$$

Cal notar que les prescripcions

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\left[\int_{a}^{c-\varepsilon} + \int_{c+\varepsilon}^{b}\right], \qquad \lim_{A\to+\infty}\int_{-A}^{A},$$

que defineixen el valor principal de Cauchy són prescripcions concretes. Altres prescripcions donarien, en general, resultats diferents. Per exemple, si en l'exemple 1 anterior féssim servir la prescripció $\lim_{\varepsilon\to 0^+}\left[\int_{a}^{c-\varepsilon} + \int_{c+2\varepsilon}^{b}\right]$, tindríem

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\left[\int_{-2}^{0-\varepsilon} \frac{dx}{x} + \int_{0+2\varepsilon}^{3} \frac{dx}{x}\right] = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\left[\ln\frac{\varepsilon}{2} + \ln\frac{3}{2\varepsilon}\right] = \ln\frac{3}{4}\,.$$

6.5 Transformada de Laplace

Si $f(x)$ és localment integrable a $[0,\infty)$, s'anomena *transformada de Laplace* de f la funció $\widetilde{f}(s)$, amb $s>0$, definida per la integral impròpia (si existeix)

$$\boxed{\widetilde{f}(s) \overset{\text{def}}{=} \int_{0}^{\infty} f(x)\,e^{-sx}\,dx \overset{\text{def}}{=} \mathcal{L}(f).}$$

Com a aplicació entre funcions, la transformada de Laplace és lineal, és a dir,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(f+g) &= \mathcal{L}(f)+\mathcal{L}(g), \\ \mathcal{L}(kf) &= k\mathcal{L}(f), \qquad\qquad k\in\mathbb{R}. \end{aligned}$$

Una condició suficient per a l'existència de $\widetilde{f}(s)$ és que la funció $f(x)$ sigui d'*ordre exponencial.* Això vol dir que a partir d'algun punt x_0 la funció $f(x)$ creix més lentament que una funció exponencial, és a dir, $\exists b\in\mathbb{R}$ tal que

$$|f(x)|\le \text{const.}\times e^{bx} \quad (\text{o, equivalentment, } |f(x)\,e^{-bx}|\le\text{const.}),\ \forall x>x_0$$

En aquest cas, $\widetilde{f}(s)$ existeix $\forall s>b$, ja que

$$\int_0^\infty |f(x)|\,e^{-sx}\,dx \le \text{const.}\times\int_0^\infty e^{(b-s)x}\,dx \quad (\text{convergent si } s>b).$$

$f(x)\,e^{-sx}$ és, doncs, absolutament integrable (i, per tant, integrable) a $[0,\infty)$.

EXEMPLE 1: Si $a>-1$, $\mathcal{L}(x^a)$ existeix per a $s>0$. En efecte, fent el canvi $t=sx$ a la integral següent tenim

$$\mathcal{L}(x^a)=\int_0^\infty x^a e^{-sx}\,dx=\frac{1}{s^{a+1}}\int_0^\infty t^a e^{-t}\,dt=\frac{\Gamma(a+1)}{s^{a+1}}=\frac{a!}{s^{a+1}}\,,$$

si $a>-1$. En particular,

$$\mathcal{L}(1)=1/s,\quad \mathcal{L}(x)=1/s^2,\quad \mathcal{L}(x^2)=2/s^3,\quad \mathcal{L}(x^3)=6/s^4,\ \text{etc.}$$

$$\mathcal{L}\left(\sqrt{x}\right)=\frac{(1/2)!}{s^{3/2}}\,,\quad \mathcal{L}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)=\frac{(-1/2)!}{\sqrt{s}}\,,$$

i, en general,

$$\mathcal{L}\left(\sum_{k=0}^n c_k x^k\right)=\sum_{k=0}^n c_k\,\frac{k!}{s^{k+1}}\,.$$

EXEMPLE 2: $\mathcal{L}(e^{ax})$ existeix per a $s>a$ i és $\mathcal{L}(e^{ax})=1/(s-a)$. En efecte, $\int_0^\infty e^{ax}e^{-sx}\,dx=\int_0^\infty e^{(a-s)x}\,dx$ convergeix quan $a-s<0$ i el seu valor és $1/(s-a)$.

EXEMPLE 3: Les transformades de Laplace de $\sin(kx)$ i de $\cos(kx)$ existeixen per a $s>0$. En efecte, integrant per parts trobem

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left[\sin(kx)\right]=\int_0^\infty \sin(kx)e^{-sx}\,dx &= \frac{k}{s}\mathcal{L}\left[\cos(kx)\right], \\ \mathcal{L}\left[\cos(kx)\right]=\int_0^\infty \cos(kx)e^{-sx}\,dx &= \frac{1}{s}-\frac{k}{s}\mathcal{L}\left[\sin(kx)\right], \end{aligned}$$

de les quals obtenim

$$\mathcal{L}\left[\sin(kx)\right] = \frac{k}{s^2+k^2}\,, \qquad \mathcal{L}\left[\cos(kx)\right] = \frac{s}{s^2+k^2}\,.$$

Transformada de Laplace de la derivada

A partir de $\mathcal{L}(f)$ podem trobar, integrant per parts, la transformada de Laplace de $f'(x)$

$$\mathcal{L}(f') = \int_0^\infty f'(x)e^{-sx}\,dx = s\mathcal{L}(f) - f(0).$$

Iterant l'expressió anterior trobem també

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(f'') &= s\mathcal{L}(f') - f'(0) \\
&= s\left[s\mathcal{L}(f) - f(0)\right] - f'(0) \\
&= s^2\mathcal{L}(f) - sf(0) - f'(0), \\
\\
\mathcal{L}(f''') &= s^3\mathcal{L}(f) - s^2f(0) - sf'(0) - f''(0), \quad \text{etc.}
\end{aligned}$$

Transformada de Laplace de la primitiva

Si $F(x)$ és una primitiva de $f(x)$, a partir del resultat anterior tenim $\mathcal{L}(f) = \mathcal{L}(F') = s\mathcal{L}(F) - F(0)$, és a dir,

$$\mathcal{L}(F) = \frac{\mathcal{L}(f) + F(0)}{s}\,.$$

Teorema de Lerch

TEOREMA: Siguin f i g definides a $[0,\infty)$, contínues i d'ordre exponencial. Si $f \neq g$, aleshores $\mathcal{L}(f) \neq \mathcal{L}(g)$.

Ometem la demostració, que no és senzilla. Aquest teorema estableix que, quan s'aplica a les funcions contínues, la transformada de Laplace és *injectiva* i, per tant, *invertible*. Això ens porta a definir la *transformada de Laplace inversa*, $\mathcal{L}^{-1}$:

$$\boxed{\mathcal{L}^{-1}(\widetilde{f}) = f \quad \text{si} \quad \mathcal{L}(f) = \widetilde{f}}$$

Una aplicació interessant de la transformada de Laplace, aprofitant aquesta invertibilitat i les propietats de transformació de les derivades, és en la resolució d'alguns tipus d'equacions diferencials. Ho il·lustrem a l'exemple senzill següent.

Exemple: Considerem l'equació diferencial $f'(x) + f(x) = x$, amb la condició inicial $f(0) = -1$. La transformada de Laplace d'aquesta equació és

$$s\mathcal{L}(f) - f(0) + \mathcal{L}(f) = \frac{1}{s^2},$$

que no és una equació diferencial i podem aïllar $\mathcal{L}(f)$ fàcilment

$$\mathcal{L}(f) = \frac{1}{s+1}\left(\frac{1}{s^2} - 1\right) = \frac{1-s}{s^2} = \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s} = \mathcal{L}(x-1).$$

La solució de l'equació diferencial és, doncs, $f(x) = x - 1$.

6.6 Problemes

P6.1 Calculeu les integrals impròpies següents:

(a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

(b) $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,dx$

(c) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

(d) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}+(\sqrt{x})^3}\,dx$

P6.2 Estudieu la convergència de les integrals impròpies següents, sense calcular-les:

(a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{\cosh x}\,dx$

(b) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{x+x^5}\,dx$

(c) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x)\sqrt{x}}\,dx$

(d) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{1+x^3}}\,dx$

(e) $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\cos(x/2)}{\sqrt{x}(\pi-x)}\,dx$

(f) $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{(1-\cos x)^{3/4}}\,dx$

(g) $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{(x^2-1)}\,dx$

(h) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^{4/3}+x^{2/3}}\,dx$

(i) $\displaystyle\int_1^{2} \frac{1}{\sqrt{(\ln x)}}\,dx$

(j) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^{3/2}}\,dx$

P6.3 Considereu el sòlid de revolució que s'obté quan fem girar al voltant de l'eix x la hipèrbola $y = 1/x$, per a $x > 1$.

(a) Demostreu que el volum d'aquest sòlid és finit mentre que la seva superfície és infinita.

(b) Si féssim servir la corba $y = 1/x^p$, per a $x > 1$, per a quins valors de p serien finits tant el volumen com la superfície?

P6.4 La integral $I_r \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^\infty x^r e^{-x^2}\,dx$ es pot relacionar, amb un canvi de variable, amb la funció $\Gamma(x)$ i s'obté la igualtat $I_r = p\,\Gamma(q)$.

(a) Determineu els valors de p i q en funció de r.

(b) Per a quins valors de r és vàlida aquesta igualtat?

P6.5 A partir de la relació $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$, trobeu la relació que hi ha entre

(a) $\beta(x+1, y)$ i $\beta(x, y)$ (b) $\Psi(x+1)$ i $\Psi(x)$

P6.6 Trobeu el valor principal de Cauchy de la integral $\displaystyle\int_{-1}^{2} \frac{1}{x^3}\,dx$.

P6.7 Trobeu la transformada de Laplace de la funció

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 \le x \le 1, \\ 0 & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

Solucions

S6.1 Resultats:

(a) $\displaystyle\lim_{z\to 1^-} \int_0^z \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \lim_{z\to 1^-} [\arcsin z - \arcsin 0] = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}\,.$

(b) $\displaystyle\lim_{z\to 1^+} \int_z^2 \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,dx = \lim_{z\to 1^+} \left[\ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)\right]_z^2 = \ln\left(2+\sqrt{3}\right).$

(c) És doblement impròpia i la descomponem en dues integrals impròpies

$$\begin{aligned} \lim_{z\to -1^+} \int_z^0 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx + \lim_{z'\to 1^-} \int_0^{z'} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \\ = \lim_{z\to -1^+} [\arcsin x]_z^0 + \lim_{z'\to 1^-} [\arcsin x]_0^{z'} \\ = -\arcsin(-1) + \arcsin 1 = \pi. \end{aligned}$$

(d) Amb el canvi $t = \sqrt{x}$ la integral es converteix en $\int_0^\infty \frac{1}{1+t^2}\,dt$ que només és impròpia en el límit superior d'integració.

$$\lim_{z\to +\infty} \int_0^z \frac{1}{1+t^2}\,dt = \lim_{z\to+\infty} [\arctan t]_0^z = \arctan(+\infty) - \arctan(0) = \frac{\pi}{2}.$$

S6.2 (a) És doblement impròpia i l'hem de descompondre en dues, per exemple, $\int_{-\infty}^{0} + \int_{0}^{+\infty}$. Com que l'integrand és una funció imparella, $f(-x) = -f(x)$, té el mateix comportament a $\pm\infty$. En el cas de $\int_0^{+\infty} \frac{x}{\cosh x}\, dx$ tenim $\cosh x > e^x/2$ i, per tant, $\frac{x}{\cosh x} < xe^{-x/2}$. En ser la integral $\int_0^{+\infty} xe^{-x/2}\, dx$ convergent, el criteri de comparació ens garanteix que la integral $\int_0^{+\infty} \frac{x}{\cosh x}\, dx$ també ho és, ja que els integrands són funcions no negatives a $[0, +\infty)$.

(b) És doblement impròpia i la descomponem $\int_0^1 + \int_1^{+\infty}$. A la primera integral, $f(x) = \frac{1}{x+x^5} = \frac{1}{x(1+x^4)} \simeq \frac{1}{x}$ quan $x \to 0^+$. Això suggereix fer servir el criteri de comparació fent pas al límit amb $g(x) = 1/x$. Com que $\lim_{x\to 0^+} f(x)/g(x) = 1$ i $\int_0^1 \frac{1}{x}\, dx$ és divergent, $\int_0^1 \frac{1}{x+x^5}\, dx$ també ho és. Així doncs, independentment del que passi amb l'altra integral, $\int_0^{\infty} \frac{1}{x+x^5}\, dx$ és divergent.

(c) És doblement impròpia i la descomponem $\int_0^1 + \int_1^{+\infty}$. A la primera integral, l'integrand $\simeq 1/\sqrt{x}$. Com que $\lim_{x\to 0^+} \frac{1/\sqrt{x}}{1/(1+x)\sqrt{x}} = 1$ i $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx$ és convergent, $\int_0^1 \frac{1}{(1+x)\sqrt{x}}\, dx$ també ho és.

Similarment, com que $\frac{1}{(1+x)\sqrt{x}} \simeq \frac{1}{x^{3/2}}$ quan $x \to +\infty$ i $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^{3/2}}\, dx$ és convergent, $\int_1^{\infty} \frac{1}{(1+x)\sqrt{x}}\, dx$ també ho és. Així doncs, la integral completa és convergent.

(d) És impròpia només al límit superior d'integració, $+\infty$. Com que $\frac{x}{\sqrt{1+x^3}} \simeq \frac{1}{x^{1/2}}$ quan $x \to +\infty$, és a dir, $\lim_{x\to +\infty} \frac{1/x^{1/2}}{x/\sqrt{(1+x^3)}} = 1$, i la integral $\int_{c(>0)}^{+\infty} \frac{1}{x^{1/2}}\, dx$ és divergent, $\int_0^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{(1+x^3)}}\, dx$ també ho és.

(e) Aparentment, és doblement impròpia perquè el denominador s'anul·la a $x = 0$ i $x = \pi$, però la discontinuïtat a $x = \pi$ és evitable, ja que $\lim_{x\to\pi^-} \frac{\cos(x/2)}{\sqrt{x}(\pi-x)} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}$. A l'altra discontinuïtat tenim $\frac{\cos(x/2)}{\sqrt{x}(\pi-x)} \simeq \frac{1}{\pi\sqrt{x}}$ i com que $\int_0^{\pi} \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx$ és convergent, $\int_0^{\pi} \frac{\cos(x/2)}{\sqrt{x}(\pi-x)}\, dx$ també ho és.

(f) Només és impròpia al límit inferior d'integració $x = 0$. En aquest punt tenim $\frac{\sin x}{(1-\cos x)^{3/4}} \simeq \frac{2^{3/4}}{x^{1/2}}$. Per tant, com en el cas precedent, $\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{(1-\cos x)^{3/4}}\, dx$ és convergent.

(g) És doblement impròpia perquè hi ha una discontinuïtat infinita al punt $x = 1$ que és a l'interior de l'interval d'integració. Hem de descompondre la integral en dues $\int_0^1 + \int_1^{\pi}$. Al voltant de $x = 1$ tenim $\frac{\sin x}{x^2-1} \simeq \frac{\sin 1}{2(x-1)}$. Les integrals $\int_0^1 \frac{1}{x-1}\, dx$ i $\int_1^{\pi} \frac{1}{x-1}\, dx$ són divergents i, per tant, la integral $\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{(x^2-1)}\, dx$ també ho és.

(h) És doblement impròpia i la descomponem $\int_0^1 + \int_1^\infty$. En el límit inferior d'integració, $x = 0$, el terme $x^{2/3}$ és el dominant, ja que $\frac{1}{x^{4/3}+x^{2/3}} = \frac{1}{x^{2/3}(x^{2/3}+1)} \simeq \frac{1}{x^{2/3}}$. Per tant, $\int_0^1 \frac{1}{x^{4/3}+x^{2/3}}\,dx$ és convergent.

Similarment, en el límit superior d'integració, $+\infty$, el terme $x^{4/3}$ és el dominant, ja que $\frac{1}{x^{4/3}+x^{2/3}} = \frac{1}{x^{4/3}(1+x^{-2/3})} \simeq \frac{1}{x^{4/3}}$. Per tant, $\int_1^\infty \frac{1}{x^{4/3}+x^{2/3}}\,dx$ també és convergent.

(i) Si fem $t = \ln x$, la integral esdevé $\int_0^{\ln 2} \frac{e^t}{t^{1/2}}\,dt$, que és impròpia al límit inferior d'integració. Com que $\frac{e^t}{t^{1/2}} \simeq \frac{1}{t^{1/2}}$ quan $t \to 0$ i $\int_0^{\ln 2} \frac{1}{t^{1/2}}\,dt$ és convergent, la integral $\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{(\ln x)}}\,dx$ també ho és.

(j) Com que $\frac{|\sin x|}{x^{3/2}} \le \frac{1}{x^{3/2}}$ i la integral $\int_1^\infty \frac{1}{x^{3/2}}\,dx$ convergeix, $\int_1^\infty \frac{|\sin x|}{x^{3/2}}\,dx$ també ho fa. Això vol dir que $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^{3/2}}\,dx$ és *absolutament* convergent i, per tant, és convergent.

S6.3 (a) $V = \pi \displaystyle\int_1^\infty f(x)^2\,dx = \pi \int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx$, que és convergent.

$S_L = 2\pi \displaystyle\int_1^\infty f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx = 2\pi \int_1^\infty \frac{1}{x}\sqrt{1+\frac{1}{x^4}}\,dx$, que és divergent, ja que tenim $\frac{1}{x}\sqrt{1+\frac{1}{x^4}} \simeq \frac{1}{x}$, quan $x \to \infty$.

(b) De l'anàlisi anterior veiem que V és finit si $p > 1/2$, mentre que S_L és finit si $p > 1$. Per tant, ambdós són finits si $p > 1$.

S6.4 (a) Si fem el canvi $t = x^2$ arribem a $I_r = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{r+1}{2}\right)$. Per tant, $p = 1/2$ i $q = (r+1)/2$.

(b) Ha de ser $(r+1)/2 > 0$, és a dir, $r > -1$.

S6.5 (a) $\beta(x+1,y) = \dfrac{\Gamma(x+1)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y+1)} = \dfrac{x\Gamma(x)\Gamma(y)}{(x+y)\Gamma(x+y)} = \dfrac{x}{x+y}\,\beta(x,y)$.

(b) $\Psi(x+1) = \dfrac{[\Gamma(x+1)]'}{\Gamma(x+1)} = \dfrac{[x\Gamma(x)]'}{x\Gamma(x)} = \dfrac{\Gamma(x)+x\Gamma'(x)}{x\Gamma(x)} = \dfrac{1}{x} + \Psi(x)$.

S6.6
$$\mathrm{VP}\int_{-1}^2 \frac{1}{x^3}\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\left(\int_{-1}^{-\varepsilon}\frac{1}{x^3}\,dx + \int_\varepsilon^2 \frac{1}{x^3}\,dx\right)$$
$$= \lim_{\varepsilon\to 0^+}\left(\left[\frac{-1}{2x^2}\right]_{-1}^{-\varepsilon} + \left[\frac{-1}{2x^2}\right]_\varepsilon^2\right) = \frac{3}{8}\,.$$

S6.7 Fem una integració per parts:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}(f) &= \int_0^\infty f(x)e^{-sx}\,dx = \int_0^1 xe^{-sx}\,dx \\
&= \left[-\frac{xe^{-sx}}{s}\right]_0^1 + \frac{1}{s}\int_0^1 e^{-sx}\,dx = \frac{1}{s^2}(1-e^{-s}-se^{-s}).
\end{aligned}
$$

7 SÈRIES NUMÈRIQUES

En el cos dels nombres reals hi ha definida l'operació *suma*. Això vol dir que donats dos nombres reals, x i y, la seva suma, $x+y$, està determinada sense cap ambigüitat. Les propietats commutativa i associativa també permeten sumar sense ambigüitat un nombre *finit* de nombres reals. En canvi, contràriament al que es podria esperar, la suma d'un nombre *infinit* de nombres reals és ambigua. Per fer-ho evident considerem la suma $S = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$

$$\begin{aligned} S &= (1-1)+(1-1)+(1-1)+\cdots = 0+0+0+\cdots = 0, \\ S &= 1+(-1+1)+(-1+1)+(-1+1)+\cdots = 1+0+0+0+\cdots = 1, \\ S &= 1-(1-1+1-1+1-1+\cdots) = 1-S \Rightarrow S = 1/2. \end{aligned}$$

Cal, doncs, *definir* el significat de "suma infinita". Això ens portarà al concepte de *sèrie*.

7.1 Sèries de nombres reals

DEFINICIÓ: Sigui $\{a_n\}$ una successió de nombres reals. Considerem la successió de *sumes parcials* $\{S_n\}$, on $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$. Definim *suma* de la *sèrie* $\sum_{k=1}^\infty a_k$ com el límit (si existeix)

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \stackrel{\text{def}}{=} \lim\{S_n\}.$$

Si el límit és finit diem que la sèrie és *sumable* o *convergent*[1] i anomenem *suma de la sèrie* el valor d'aquest límit. Si el límit és $\pm\infty$ diem que la sèrie és *divergent*, i si el límit no existeix diem que la sèrie no és sumable.[2] La definició anterior es pot expressar també

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right).$$

Així doncs, el significat de "suma infinita" és, per definició,

$$\boxed{\sum_{k=1}^{\infty} \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}}$$

[1] Estrictament, $\{a_n\}$ és sumable i $\{S_n\}$ és convergent.

[2] Sovint es fa servir el terme *divergent* com a sinònim de *no convergent*, però aquí distingirem, entre les no convergents, les *divergents* (si $\{S_n\}\to\pm\infty$) de les *no sumables* (la resta).

és a dir, per poder parlar de *sumes infinites* no n'hi ha prou amb tenir definida una *suma*, ens cal també el concepte de *límit* (o, equivalentment, el de *successió convergent*).

Si $n_0 \in \mathbb{N}$, la sèrie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ es pot descompondre en una suma finita i una sèrie residual

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{n_0} a_k + \sum_{k=n_0+1}^{\infty} a_k,$$

ja que només cal fer $n \to \infty$ a l'expressió $\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n_0} a_k + \sum_{k=n_0+1}^{n} a_k$.

Evidentment, la sèrie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ és convergent si i només si ho és la sèrie residual $\sum_{k=n_0+1}^{\infty} a_k$. Això vol dir que qualsevol canvi en el valor o en l'ordre dels sumands d'una sèrie, que afecti únicament un nombre *finit* dels seus termes, no modifica el seu caràcter sumable o no sumable.

Propietat associativa de les sèries convergents

La propietat associativa de la suma ens permet posar, de qualsevol manera, "parells de parèntesis", $(\ldots)$, sense que el resultat de la suma d'un nombre *finit* de sumands es modifiqui. Podem preguntar-nos si passa el mateix quan tenim una infinitat de sumands. Pel que hem vist a l'apartat anterior, si posem un nombre *finit* de parèntesis en una sèrie (afectant, per tant, només un nombre finit dels seus termes) el seu caràcter sumable o no sumable no canvia (i si és sumable, la seva suma és la mateixa).

La qüestió és, doncs, què passa quan posem una infinitat de parèntesis. Si la sèrie és *sumable*, tampoc es modifica ni la seva sumabilitat ni el valor de la seva suma, ja que la successió de sumes parcials de la nova sèrie és una *successió parcial* de la successió (convergent) de sumes parcials de la sèrie original i té, per tant, el mateix límit. Per exemple, si $\{S_n\}$ és la successió (convergent) de sumes parcials de la sèrie (sumable) $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, la successió de sumes parcials de la sèrie

$$a_1 + (a_2 + a_3 + a_4) + a_5 + (a_6 + a_7 + a_8 + a_9 + a_{10}) + (a_{11} + a_{12}) + \cdots$$

és $\{S_1, S_4, S_5, S_{10}, S_{12}, \cdots\}$ que és una successió parcial de $\{S_n\}$.

El raonament anterior és també aplicable quan la sèrie és *divergent* (amb suma $\pm\infty$). En canvi, si la sèrie original és *no sumable*, en posar-li parèntesis es pot convertir en sumable, ja que la successió no convergent de sumes parcials pot tenir successions parcials convergents. Per exemple, la sèrie $1-1+1-1+1-1+\cdots$ no és sumable. En canvi, la sèrie

$$(1-1) + (1-1) + (1-1) + \cdots = 0 + 0 + 0 + \cdots = 0,$$

sí que ho és. Això ens diu, també, que les sèries (fins i tot les sumables) no tenen la propietat *dissociativa*, és a dir, la substitució d'infinits sumands per sumes equivalents pot modificar la seva sumabilitat.

La propietat associativa és vàlida, doncs, per a les sèries convergents i divergents, i no ho és per a les no sumables. Veurem més endavant que l'altra propietat de la suma, la commutativa, no la compleixen, en general, ni sèries convergents quan la reordenació afecta una infinitat de sumands.

Linealitat de les sèries convergents

Si $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ i $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ són sèries convergents i $\lambda \in \mathbb{R}$, es compleix

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty}(a_k + b_k) &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k, \\ \sum_{k=1}^{\infty} \lambda a_k &= \lambda \sum_{k=1}^{\infty} a_k. \end{aligned}$$

DEMOSTRACIÓ: són conseqüència de la linealitat de les sumes parcials i de les propietats dels límits. $\diamondsuit$

EXEMPLE 1: La sèrie *geomètrica* és

$$\sum_{k=0}^{\infty} r^k = 1 + r + r^2 + r^3 + \cdots$$

L'expressió de la suma parcial n-èsima és (notem que, per conveniència, els subíndexs comencen amb $k = 0$)

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} r^k = \begin{cases} n+1 & \text{si } r = 1, \\ (r^{n+1} - 1)/(r-1) & \text{si } r \neq 1. \end{cases}$$

Només quan $|r| < 1$ la successió de sumes parcials és convergent i el seu límit és $1/(1-r)$. Per $r \geq 1$, el seu límit és $+\infty$, mentre que per $r \leq -1$ no té límit. Així doncs,

$$\sum_{k=0}^{\infty} r^k = \begin{cases} 1/(1-r) & \text{si } |r| < 1, \\ +\infty \text{ (divergent)} & \text{si } r \geq 1, \\ \text{no sumable} & \text{si } r \leq -1. \end{cases}$$

Notem, en particular, que la sèrie $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$ no és sumable (la successió de sumes parcials $\{1, 0, 1, 0, 1, 0, \ldots\}$ no és convergent).

EXEMPLE 2: La sèrie *harmònica*,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$$

és divergent. De fet, com veurem més endavant (pàgina 180), l'anomenada *sèrie harmònica generalitzada*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} + \cdots$$

és convergent per $p > 1$ i divergent per $p \leq 1$.

EXEMPLE 3: La sèrie *harmònica alternada*,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$$

és convergent, com veurem, també, més endavant (pàgina 183).

Criteri general de convergència d'una sèrie

TEOREMA: La sèrie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ és convergent si i només si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tal que } |a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p}| < \varepsilon, \forall n > n_0 \text{ i } \forall p > 0.$$

DEMOSTRACIÓ: per definició, $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ és convergent si i només si la successió de sumes parcials $\{S_n\}$ és convergent. Però això equival a dir que la successió $\{S_n\}$ és de Cauchy, ja que els S_n són nombres reals, és a dir,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tal que } |S_m - S_n| < \varepsilon, \forall n, m > n_0.$$

Si prenem $m > n$, tenim $|S_m - S_n| = |a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_m|$. Llavors només cal fer $p = m - n$. $\diamondsuit$

COROL·LARI: Si $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ és convergent, aleshores $\lim\{a_n\} = 0$.

DEMOSTRACIÓ: només cal fer $p = 1$ en el criteri general de convergència.[3] $\diamondsuit$

[3] També es pot argumentar que $a_n = S_n - S_{n-1}$ i si prenem el límit a ambdós costats tenim $\lim\{a_n\} = \lim\{S_n\} - \lim\{S_{n-1}\} = S - S = 0$.

El recíproc no és cert. Encara que $\lim\{a_n\} = 0$, això no és suficient per garantir la sumabilitat de la sèrie. Per exemple, la sèrie harmònica és divergent malgrat que la successió dels sumands $\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\} \to 0$.

7.2 Convergència absoluta i convergència condicional

DEFINICIÓ: Una sèrie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ és *absolutament convergent* si la sèrie $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ és convergent.

TEOREMA: Si la sèrie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ és absolutament convergent, aleshores és convergent.

DEMOSTRACIÓ: si fem servir la desigualtat triangular tenim

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p}| \leq \Big| |a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \cdots + |a_{n+p}| \Big|.$$

Com que, per hipòtesi, la sèrie $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ compleix el criteri general de convergència, la sèrie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ també el complirà. $\diamondsuit$

Així doncs, la *convergència absoluta* d'una sèrie implica també la seva *convergència*. El recíproc no és cert. Una sèrie pot ser convergent però no ser-ho absolutament. En aquest cas direm que la sèrie és *condicionalment convergent*.

EXEMPLE: La sèrie geomètrica $\sum_{k=0}^{\infty} r^k$, amb $|r| < 1$, és absolutament convergent, però la sèrie harmònica alternada, $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1}/k$, és condicionalment convergent, ja que la sèrie harmònica, $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k$, és divergent.

Les sèries absolutament convergents tenen propietats que no tenen, en general, les sèries condicionalment convergents. Per exemple, són *reordenables*, és a dir, tenen la propietat commutativa. Per veure-ho amb més detall hem de parlar abans de les sèries de termes no negatius.

7.3 Sèries de termes no negatius

Un cas particular interessant de les sèries numèriques és el de les sèries de termes *no negatius*, és a dir, que compleixen $a_k \geq 0$. En aquest cas hi ha una nova condició necessària i suficient per a la sumabilitat:

TEOREMA: Si $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ és una sèrie de termes no negatius, aleshores,

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ és convergent } \Leftrightarrow \text{ la successió } \{S_n\} \text{ és fitada superiorment.}$$

DEMOSTRACIÓ: com que $a_k \geq 0$, la successió $\{S_n\}$ és creixent i, per tant, convergeix si i només si és fitada superiorment. $\diamondsuit$

D'acord amb aquest resultat, les sèries de termes no negatius només poden ser convergents (quan $\{S_n\}$ sigui fitada) o divergents (quan no ho sigui).

Criteri de comparació

Vegem ara una condició suficient per a la convergència d'una sèrie de termes no negatius.

TEOREMA: Si $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ i $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ són sèries de termes no negatius i λ és un nombre real tal que a partir d'algun subíndex es compleix $a_k < \lambda b_k$, aleshores

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k \text{ convergent } \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ convergent.}$$

(Consegüentment, $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ divergent $\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} b_k$ divergent.)

DEMOSTRACIÓ: fem la descomposició $\sum_{k=1}^{\infty} = \sum_{k=1}^{n_0} + \sum_{k=n_0+1}^{\infty}$, triant n_0 de manera que a partir d'aquest subíndex es compleixi la desigualtat $a_k < \lambda b_k$. Llavors, $\forall n > n_0$ tenim

$$\sum_{k=n_0+1}^{n} a_k < \lambda \sum_{k=n_0+1}^{n} b_k.$$

Com que $\sum_{k=n_0+1}^{\infty} b_k$ convergeix, les sumes parcials $\sum_{k=n_0+1}^{n} b_k$ són fitades i, per tant, les sumes parcials $\sum_{k=n_0+1}^{n} a_k$ també ho són. Així doncs, $\sum_{k=n_0+1}^{\infty} a_k$ i també $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ són convergents. $\diamondsuit$

EXEMPLE: La sèrie $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k^2$ és la sèrie harmònica generalitzada i és convergent quan l'exponent és > 1 (ho veurem a la secció 7.4). Com que $\frac{1}{1+k^2} < \frac{1}{k^2}$, la sèrie $\sum_{k=1}^{\infty} 1/(1+k^2)$ també és convergent.

D'altra banda, com que $\frac{k}{1+k^2} > \frac{k}{2k^2} = \frac{1}{2k}$ i la sèrie $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k$ és divergent (sèrie harmònica), la sèrie $\sum_{k=1}^{\infty} k/(1+k^2)$ també ho és.

Criteri de comparació fent pas al límit

La condició següent és una conseqüència directa del criteri de comparació.

Si $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ i $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ són sèries de termes no negatius i $A = \lim \left\{ \frac{a_n}{b_n} \right\}$, aleshores

1) si $A \neq \infty$: $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ convergent $\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ convergent,

2) si $A \neq 0$: $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ convergent $\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} b_k$ convergent.

Conseqüentment, si $A \neq 0, \infty$ les sèries $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ i $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ són totes dues convergents o totes dues divergents.

Demostració: si $A \neq \infty$, per a cada $\varepsilon > 0$ hi haurà algun subíndex a partir del qual $\frac{a_n}{b_n} \in (A - \varepsilon, A + \varepsilon)$. A partir d'aquest subíndex es complirà, per tant, $\frac{a_n}{b_n} < A + \varepsilon$, és a dir, $a_n < (A + \varepsilon)\, b_n$. Llavors només cal aplicar el criteri de comparació.

Si $A \neq 0$, tindrem que $\lim \left\{ \frac{b_n}{a_n} \right\} = \frac{1}{A} \neq \infty$ amb la qual cosa aquest cas es redueix a l'anterior amb a_n i b_n intercanviats. $\diamondsuit$

Exemple 1: Analitzem l'exemple anterior.

$$\lim \left\{ \frac{1/(1+n^2)}{1/n^2} \right\} = \lim \left\{ \frac{n^2}{1+n^2} \right\} = 1.$$

Per tant, les sèries $\sum_{k=1}^{\infty} 1/(1+k^2)$ i $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k^2$ han de ser totes dues convergents o totes dues divergents. Com que la segona és convergent, la primera també ho és.

Similarment,

$$\lim \left\{ \frac{n/(1+n^2)}{1/n} \right\} = \lim \left\{ \frac{n^2}{1+n^2} \right\} = 1,$$

i com que $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k$ és divergent, $\sum_{k=1}^{\infty} k/(1+k^2)$ també ho és.

Exemple 2: Considerem la sèrie $\sum_{k=1}^{\infty} k^2/2^k$. Tenim

$$\lim \left\{ \frac{n^2/2^n}{(3/4)^n} \right\} = \lim \left\{ n^2 \left(\frac{2}{3} \right)^n \right\} = 0.$$

En aquest cas, la convergència de $\sum_{k=1}^{\infty} (3/4)^k$ implica la de $\sum_{k=1}^{\infty} k^2/2^k$, però no a l'inrevés. Com que la primera és convergent (és la sèrie geomètrica i $3/4 < 1$), la segona també ho és.

Propietat commutativa de les sèries de termes no negatius

Vegem ara que les sèries de termes no negatius són *reordenables*, és a dir, una permutació dels seus sumands no afecta ni la seva convergència ni el valor de la seva suma.

TEOREMA: Si $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ és una sèrie de termes no negatius i $\{n_1, n_2, n_3, \ldots\}$ és una reordenació de $\{1, 2, 3, \ldots\}$, aleshores

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{i=1}^{\infty} a_{n_i}.$$

DEMOSTRACIÓ: en efecte, cada suma parcial de $\sum_{i=1}^{\infty} a_{n_i}$ és menor o igual que alguna suma parcial de $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ (per exemple, $a_{23} + a_8 + a_{97} + a_{11} \leq \sum_{k=1}^{97} a_k$). Per tant, les sumes parcials de $\sum_{i=1}^{\infty} a_{n_i}$ són també fitades, la sèrie reordenada és també convergent i es compleix $\sum_{i=1}^{\infty} a_{n_i} \leq \sum_{k=1}^{\infty} a_k$. L'argument també és aplicable en sentit oposat, ja que $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ és també una reordenació de $\sum_{i=1}^{\infty} a_{n_i}$ i, per tant, també $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \leq \sum_{i=1}^{\infty} a_{n_i}$. $\diamondsuit$

Propietat commutativa de les sèries absolutament convergents

Comencem definint les subsèries de sumands positius i de sumands negatius d'una sèrie qualsevol. Donada la sèrie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ definim:

- *Subsèrie de sumands positius*: $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ on

$$p_k = \begin{cases} a_k & \text{si } a_k > 0, \\ 0 & \text{si } a_k \leq 0. \end{cases}$$

- *Subsèrie de sumands negatius*: $\sum_{k=1}^{\infty} q_k$ on

$$q_k = \begin{cases} -a_k & \text{si } a_k < 0, \\ 0 & \text{si } a_k \geq 0. \end{cases}$$

Notem que, malgrat el seu nom, ambdues subsèries són de termes no negatius. Vegem ara una nova condició necessària i suficient per a la convergència absoluta:

TEOREMA: $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ és absolutament convergent si i només si $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ i $\sum_{k=1}^{\infty} q_k$ són convergents i en aquest cas es compleix

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} p_k - \sum_{k=1}^{\infty} q_k.$$

DEMOSTRACIÓ: si anomenem A_n, $\widetilde{A}_n$, P_n i Q_n, respectivament, les sumes parcials n-èsimes de les sèries $\sum a_k$, $\sum |a_k|$, $\sum p_k$ i $\sum q_k$ (on hem simplificat la notació), tenim

$$P_n\,,\,Q_n \leq P_n + Q_n = \widetilde{A}_n,$$

d'on es conclou que P_n i Q_n són fitades si i només si les $\widetilde{A}_n$ són fitades i, per tant, les sèries $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ i $\sum_{k=1}^{\infty} q_k$ convergeixen si i només si $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ convergeix, ja que totes són sèries de termes no negatius.

Tenim, també,

$$A_n = P_n - Q_n\,,$$

d'on es dedueix, fent $n \to \infty$, que quan $\sum p_k$ i $\sum q_k$ convergeixen (és a dir, quan $\sum |a_k|$ convergeix) es compleix

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} p_k - \sum_{k=1}^{\infty} q_k\,. \quad \diamondsuit$$

És clar, doncs, que si $\sum a_k$ és absolutament convergent, qualsevol reordenació d'aquesta sèrie equival a reordenar les sèries $\sum p_k$ i $\sum q_k$ que, com que són de termes no negatius, són reordenables. Les sèries absolutament convergents són, per tant, reordenables.

Notem, d'altra banda, que les sèries condicionalment convergents no són reordenables. En aquest cas, tant $\sum p_k$ com $\sum q_k$ són *divergents* i, reordenada adequadament, es pot aconseguir qualsevol valor per a la suma de $\sum a_k$.

7.4 Criteris de convergència absoluta

Criteri de la integral

En les seccions anteriors es pot observar una gran similitud entre les sèries numèriques i les integrals impròpies. El següent teorema fa encara més palesa aquesta similitud i li dona una perspectiva geomètrica

TEOREMA: Sigui $f(x)$ una funció localment integrable, no negativa i *decreixent* a l'interval $[n_0, +\infty)$, on $n_0 \in \mathbb{N}$, aleshores

$$\sum_{k=n_0}^{\infty} f(k) \text{ convergent } \Leftrightarrow \int_{n_0}^{\infty} f(x)\,dx \text{ convergent.}$$

Demostració: com que $f(x)$ és no negativa, la sèrie $\sum_{k=n_0}^{\infty} f(k)$ és de termes no negatius. Llavors, si la integral $\int_{n_0}^{\infty} f$ és convergent tenim (vegeu la figura a sota)

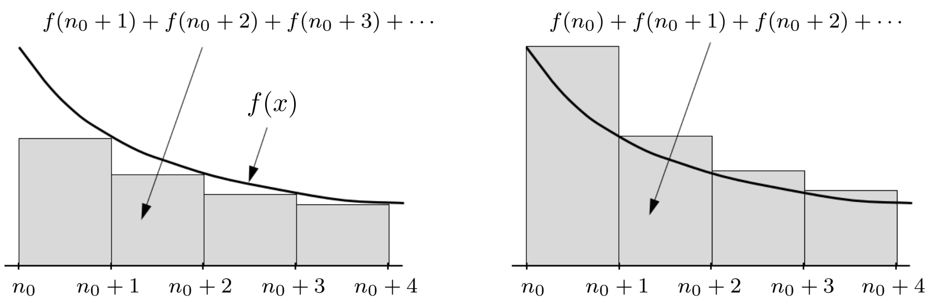
$$S_n = \sum_{k=n_0+1}^{n} f(k) \leq \int_{n_0}^{\infty} f(x)\,dx, \quad \forall n > n_0,$$

és a dir, les sumes parcials S_n són fitades i la sèrie $\sum_{k=n_0+1}^{\infty} f(k)$ és convergent (també, òbviament, si li afegim el sumand $f(n_0)$).

Recíprocament, si la sèrie $\sum_{k=n_0}^{\infty} f(k)$ convergeix, tenim

$$S(z) = \int_{n_0}^{z} f(x)\,dx \leq \sum_{k=n_0}^{\infty} f(k), \quad \forall z > n_0.$$

Per tant, $S(z)$ és fitada i la integral $\int_{n_0}^{\infty} f(x)\,dx$ convergeix. $\diamondsuit$



Exemple 1: Considerem la sèrie harmònica generalitzada. La funció x^{-p} és decreixent a $[1,\infty)$ quan $p \geq 0$ i, com que la integral $\int_1^{\infty}(1/x^p)\,dx$ és convergent quan $p > 1$ i divergent quan $0 \leq p \leq 1$, el mateix passa amb la sèrie $\sum_{k=1}^{\infty}(1/k^p)$. En particular, la sèrie harmònica $\sum_{k=1}^{\infty}(1/k)$ és divergent.

Exemple 2: Considerem la sèrie $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(\ln k)^2}$ i esbrinem si és o no convergent amb el criteri de la integral (notem que $1/[x(\ln x)^2]$ és decreixent).

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{x(\ln x)^2}\,dx = \int_{\ln 2}^{\infty} \frac{1}{t^2}\,dt = \left[-\frac{1}{t}\right]_{\ln 2}^{\infty} = \frac{1}{\ln 2},$$

on hem fet el canvi de variable $t = \ln x$. Així doncs, la integral impròpia és convergent i, per tant, la sèrie també ho és.

Criteri de l'arrel (o de Cauchy)

TEOREMA: Sigui la sèrie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$. Si $\alpha = \lim \left\{ \sqrt[n]{|a_n|} \right\}$, aleshores

1) si $\alpha < 1$: la sèrie és absolutament convergent (i, per tant, convergent),
2) si $\alpha > 1$: la sèrie no és convergent,
3) si $\alpha = 1$: no es pot concloure res.

DEMOSTRACIÓ: si $\alpha < 1$ escollim r que compleixi $\alpha < r < 1$. Com que $\left\{ \sqrt[n]{|a_n|} \right\} \to \alpha$, a partir d'algun subíndex n tindrem $\sqrt[n]{|a_n|} < r$, és a dir, $|a_n| < r^n$. Llavors, la convergència de la sèrie geomètrica $\sum_{k=1}^{\infty} r^k$ quan $|r| < 1$ ens garanteix la convergència de $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ i, per tant, de $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

Si $\alpha > 1$, a partir d'algun subíndex tindrem $\sqrt[n]{|a_n|} > 1$, és a dir, $|a_n| > 1$. Això fa que $\{a_n\} \not\to 0$ i, per tant, $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ no pot ser convergent. $\diamondsuit$

EXEMPLE 1: Considerem la sèrie $\sum_{k=1}^{\infty}(k^2/2^k)$ i fem servir el criteri de l'arrel per esbrinar si és o no convergent.

$$\lim \left\{ \sqrt[n]{\frac{n^2}{2^n}} \right\} = \lim \left\{ \frac{\left(\sqrt[n]{n}\right)^2}{2} \right\} = \frac{1}{2} \quad (< 1),$$

ja que $\lim\{\sqrt[n]{n}\} = 1$. Per tant, la sèrie és convergent.

EXEMPLE 2: Amb el criteri de la integral hem demostrat que la sèrie harmònica generalitzada $\sum_{k=1}^{\infty}(1/k^p)$ convergeix quan $p > 1$. Tanmateix, en aquest cas el criteri de l'arrel no decideix, ja que

$$\lim \left\{ \sqrt[n]{\frac{1}{n^p}} \right\} = \lim \left\{ \frac{1}{\left(\sqrt[n]{n}\right)^p} \right\} = 1.$$

Criteri del quocient (o de D'Alembert)

TEOREMA: Sigui la sèrie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$. Si $\alpha = \lim\{|a_{n+1}|/|a_n|\}$, aleshores

1) si $\alpha < 1$: la sèrie és absolutament convergent (i, per tant, convergent),
2) si $\alpha > 1$: la sèrie no és convergent,
3) si $\alpha = 1$: no es pot concloure res.

Demostració: si $\alpha < 1$ escollim r de manera que $\alpha < r < 1$. Com que $\{|a_{n+1}|/|a_n|\} \to \alpha$, a partir d'algun subíndex tindrem que $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < r = \frac{r^{n+1}}{r^n}$, és a dir, $\frac{|a_{n+1}|}{r^{n+1}} < \frac{|a_n|}{r^n}$. Això vol dir que a partir d'aquest subíndex la successió $\{|a_n|/r^n\}$ és decreixent i, per tant, fitada superiorment. Si M és una fita superior, tindrem $|a_n|/r^n < M$, és a dir, $|a_n| < Mr^n$. Llavors, la convergència de la sèrie geomètrica $\sum_{k=1}^{\infty} r^k$ quan $|r| < 1$ ens garanteix la convergència de $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ i, per tant, de $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

Si $\alpha > 1$, a partir d'algun subíndex tindrem que $|a_{n+1}|/|a_n| > 1$, és a dir, $|a_{n+1}| > |a_n|$. Això fa que $\{a_n\} \not\to 0$ i, per tant, $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ no pot ser convergent. $\diamondsuit$

Exemple: Considerem la sèrie $\sum_{k=0}^{\infty}(1/k!)$. Com que

$$\lim\left\{\frac{1/(n+1)!}{1/n!}\right\} = \lim\left\{\frac{n!}{(n+1)!}\right\} = \lim\left\{\frac{1}{n+1}\right\} = 0 \quad (< 1),$$

la sèrie és convergent.

Ja hem vist (pàgina 49) que si $\lim\left\{\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}\right\} = \alpha$, llavors també $\lim\left\{\sqrt[n]{|a_n|}\right\} = \alpha$. Per tant, si el criteri del quocient no decideix ($\alpha = 1$), el de l'arrel tampoc. El recíproc no és cert, pot existir $\lim\left\{\sqrt[n]{|a_n|}\right\}$ i no existir $\lim\left\{\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}\right\}$. En aquest sentit, podem afirmar que el criteri de l'arrel és més "potent" que el del quocient.

Generalització

Els dos criteris anteriors (de l'arrel i del quocient) admeten una formulació més general[4] que no requereix que les successions $\left\{\sqrt[n]{|a_n|}\right\}$ i $\left\{\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}\right\}$ siguin convergents. Aquestes generalitzacions utilitzen els conceptes de *límit superior* ($\limsup$) i de *límit inferior* ($\liminf$) d'una successió que són, respectivament, el més gran i el més petit dels límits de les seves successions parcials.[5] Evidentment, es compleix sempre que $\liminf \leq \limsup$. Si la successió convergeix, tenim que $\liminf = \limsup = \lim$.

En el cas del criteri de l'arrel només cal reemplaçar "lim" per "lim sup", és a dir, si $\alpha = \limsup\left\{\sqrt[n]{|a_n|}\right\}$, la sèrie convergeix absolutament si $\alpha < 1$, no convergeix si $\alpha > 1$ i no es conclou res si $\alpha = 1$.

[4] Vegeu, per exemple, la secció 2 del capítol IX de J. M. Ortega, *Introducció a l'anàlisi matemàtica, op. cit.*

[5] $\limsup\{a_n\} = \lim_{n\to\infty}[\sup_{k\geq n}\{a_k\}]$, i $\liminf\{a_n\} = \lim_{n\to\infty}[\inf_{k\geq n}\{a_k\}]$.

En el cas del criteri del quocient, si α i α' són, respectivament, el $\limsup$ i el $\liminf$ de la successió $\left\{\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}\right\}$, tenim que la sèrie convergeix absolutament si $\alpha < 1$, no és convergent si $\alpha' > 1$ i no es conclou res si $\alpha' \leq 1 \leq \alpha$.

7.5 Criteris de convergència

Els criteris anteriors només són útils per esbrinar si una sèrie és absolutament convergent. Vegem ara alguns criteris de convergència més generals que són d'utilitat per determinar la convergència condicional d'una sèrie.

Criteri de les sèries alternades (o de Leibnitz)
S'anomenen sèries *alternades* les sèries del tipus

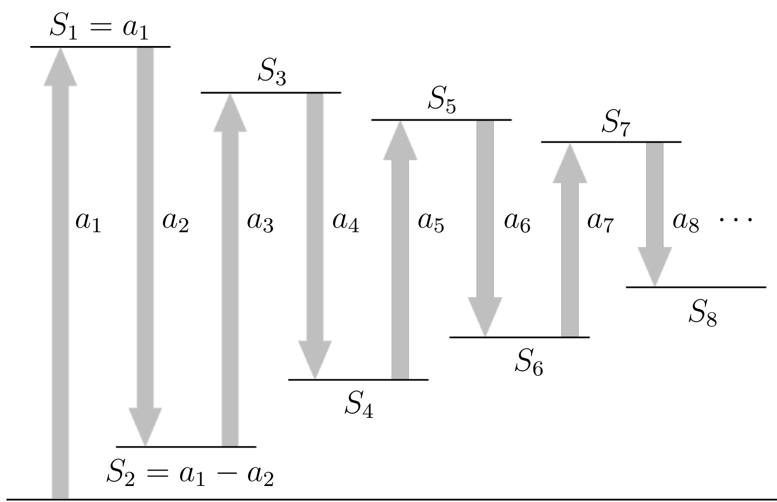
$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}a_k = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots$$
$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k}a_k = -a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - \cdots$$

on $a_k > 0$, $\forall k$.

Una condició suficient per a la convergència de les sèries alternades ens ve donada pel teorema següent.

TEOREMA: Si $\{a_n\}$ és una successió *decreixent* de termes positius que té límit 0, aleshores la sèrie alternada $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}a_k$ és convergent.

DEMOSTRACIÓ: podem representar els sumands positius i els negatius respectivament com a vectors de sentit oposat (vegeu la figura).



Notem que totes les sumes parcials estan entre 0 i a_1. La successió de sumes parcials de subíndex parell $\{S_2, S_4, S_6, \ldots\}$ és creixent i fitada superiorment i és, per tant, convergent. Similarment, la successió de sumes parcials de subíndex senar $\{S_1, S_3, S_5, \ldots\}$ és decreixent i fitada inferiorment i, per tant, també és convergent. Totes dues successions tenen el mateix límit S perquè que si restem l'una de l'altra tenim

$$\{S_1 - S_2, S_3 - S_4, S_5 - S_6, \ldots\} = \{a_2, a_4, a_6, \ldots\} \longrightarrow 0,$$

ja que és una successió parcial de $\{a_n\}$ que, per hipòtesi, convergeix cap a 0.

Llavors, donat un $\varepsilon > 0$ arbitrari, a partir d'algun subíndex totes les sumes parcials (amb subíndex parell o senar) estaran a una distància de S inferior a ε. En altres paraules, $\{S_n\} \longrightarrow S$, i per tant, $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_k = S$. $\diamondsuit$

Exemple: Considerem la sèrie harmònica alternada

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$$

que no convergeix absolutament, ja que la sèrie harmònica és divergent i, per tant, cap dels criteris de la secció anterior serviria per provar la seva possible convergència. El criteri de les sèries alternades, en canvi, ens prova la seva convergència condicional, ja que $\{1/n\}$ és una successió decreixent de termes positius amb límit 0.

De manera semblant concloem que la sèrie harmònica *generalitzada* alternada

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^p} = 1 - \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} - \frac{1}{4^p} + \cdots \quad (p > 0),$$

és convergent si $0 < p \leq 1$, encara que no ho és absolutament. Per exemple,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \cdots$$

és condicionalment convergent.

Si $p > 1$, la sèrie és absolutament convergent, ja que $\sum_{k=1}^{\infty}(1/k^p)$ també convergeix. Això vol dir que amb qualsevol distribució de signes (no únicament l'alternança $+-+-+-\cdots$) la sèrie és convergent.

El criteri de les sèries alternades és, de fet, un cas particular d'un criteri més general (de Dirichlet) que veurem a tot seguit. Abans hem d'establir la identitat següent.

Fórmula de sumació parcial d'Abel

TEOREMA: Siguin dues successions $\{a_n\}$ i $\{b_n\}$. Si $A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$, aleshores tenim la identitat

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = A_n b_{n+1} + \sum_{k=1}^{n} A_k (b_k - b_{k+1}), \ \forall n.$$

DEMOSTRACIÓ: és un exercici senzill després de substituir a_k per $(A_k - A_{k-1})$ i fer $A_0 = 0$. $\diamondsuit$

Aquesta identitat s'anomena *Fórmula de sumació parcial d'Abel*. La seva utilitat es basa en el fet que si quan fem $n \to \infty$ existeixen els límits dels dos sumands del costat dret (és a dir, si la successió $\{A_n b_{n+1}\}$ té límit i la sèrie $\sum_{k=1}^{\infty} A_k(b_k - b_{k+1})$ és convergent), aleshores la sèrie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ també és convergent. Els dos criteris següents fan servir aquesta propietat.

Criteri de Dirichlet

TEOREMA: Si (amb la notació anterior) $\{A_n\}$ i $\{b_n\}$ compleixen

1) $\{A_n\}$ és fitada,
2) $\{b_n\}$ és decreixent, amb límit 0,

aleshores $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ és convergent.

DEMOSTRACIÓ: segons la hipòtesi 1), existeix $M > 0$ tal que $|A_n| < M, \forall n$. Això, juntament amb la hipòtesi 2), fa que $\{A_n b_{n+1}\} \to 0$. D'altra banda, tenim

$$|A_k(b_k - b_{k+1})| < M|b_k - b_{k+1}| = M(b_k - b_{k+1}),$$

on hem fet servir que $\{b_n\}$ és decreixent (és a dir, $b_k \geq b_{k+1}$). La sèrie $\sum_{k=1}^{\infty}(b_k - b_{k+1})$ és convergent, ja que

$$\sum_{k=1}^{n}(b_k - b_{k+1}) = b_1 - b_{n+1} \;\to\; b_1 \;\; (\text{quan } n \to \infty).$$

Llavors, si utilitzem el criteri de comparació concloem que la sèrie $\sum_{k=1}^{\infty} |A_k(b_k - b_{k+1})|$ convergeix i, per tant, $\sum_{k=1}^{\infty} A_k(b_k - b_{k+1})$ també convergeix. Amb aquests resultats la fórmula de sumació parcial d'Abel ens garanteix que $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ és convergent. $\diamondsuit$

Notem que el criteri de les sèries alternades és un cas particular del criteri de Dirichlet. Si tenim la sèrie alternada $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1} b_k = b_1 - b_2 + b_3 - b_4 + \cdots$, on $\{b_n\}$ és decreixent i convergent cap a 0, només cal aplicar el criteri de Dirichlet amb $a_n = (-1)^{n+1}$, ja que tindríem $\{A_n\} = \{1, 0, 1, 0, \ldots\}$ que és fitada.

Tanmateix, el criteri de Dirichlet és més general, com es pot veure a l'exemple següent.

Exemple: La sèrie

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{6}} - \cdots$$

no és alternada (la successió de signes és $+ + - - + + - - \cdots$) ni absolutament convergent (criteri de la integral), però el criteri de Dirichlet mostra que és condicionalment convergent. Només cal prendre $\{a_n\} = \{+1, +1, -1, -1, +1, +1, -1, -1, \ldots\}$ (per tant, $\{A_n\} = \{1, 2, 1, 0, 1, 2, 1, 0, \ldots\}$ és fitada) i $\{b_n\} = \{1/\sqrt{n}\}$ (decreixent, amb límit 0).

Criteri d'Abel

Teorema: Si $\{A_n\}$ i $\{b_n\}$ compleixen

1) $\{A_n\}$ és convergent (és a dir, $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ és convergent),
2) $\{b_n\}$ és creixent o decreixent, i convergent,

aleshores $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ és convergent.

Demostració: segons la hipòtesi 1), $\{A_n\}$ és convergent. Això, juntament amb la hipòtesi 2), fa que $\{A_n b_{n+1}\}$ tingui límit. D'altra banda, com que $\{A_n\}$ convergeix, ha de ser fitada, és a dir, existeix $M > 0$ tal que $|A_n| < M, \forall n$. Llavors tenim

$$|A_k(b_k - b_{k+1})| < M|b_k - b_{k+1}| = \begin{cases} M(b_k - b_{k+1}) & \text{si } \{b_n\} \text{ és decreixent,} \\ M(b_{k+1} - b_k) & \text{si } \{b_n\} \text{ és creixent.} \end{cases}$$

Si $\{b_n\}$ és decreixent, com que $\sum_{k=1}^{n}(b_k - b_{k+1}) = b_1 - b_{n+1}$ tenim $\sum_{k=1}^{\infty}(b_k - b_{k+1}) = b_1 - \lim\{b_n\}$ i, per tant, la sèrie $\sum_{k=1}^{\infty}|b_k - b_{k+1}|$ és convergent (si $\{b_n\}$ és creixent, el raonament és similar). Llavors, si utilitzem el criteri de comparació concloem que la sèrie $\sum_{k=1}^{\infty}|A_k(b_k - b_{k+1})|$ convergeix i, per tant, $\sum_{k=1}^{\infty} A_k(b_k - b_{k+1})$ també convergeix. Amb aquests resultats la fórmula de sumació parcial d'Abel ens garanteix que $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ és convergent. $\diamondsuit$

Exemple: Considerem la sèrie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}\left(1 + \frac{1}{k}\right)^k.$$

Si prenem

$$a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}, \quad b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n,$$

com que $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ és la sèrie harmònica alternada, que és convergent, i $\{b_n\}$ és una successió creixent i convergent cap a e (vegeu pàgina 38), podem aplicar el criteri d'Abel per concloure que la sèrie és convergent.

7.6 Problemes

P7.1 Calculeu la suma de les sèries següents:

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{7^n}$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{5^{n+1}}$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)}$

(d) $\displaystyle\frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{2 \cdot 5} + \frac{1}{3 \cdot 6} + \cdots$

(e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n+4}{n^3 + 3n^2 + 2n}$

(f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-2}{(n+1)!}$

P7.2 Esbrineu si les sèries següents són convergents o no:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n}\right)$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+4)}$

(c) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{3^{-n}}{n^2+2}$

(d) $\displaystyle\frac{1}{3}+\frac{2}{5}+\frac{3}{7}+\frac{4}{9}+\cdots$

(e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^{\ln n}}$

(f) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^p}$

(g) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cosh n}{\cosh(3n)}$

(h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{5^n}$

(i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}$

(j) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n n!}{n^n}$

(k) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^{100}}$

(l) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(\ln n)^n}$

(m) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n}}$

(n) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\ln(\ln n)}$

P7.3 En funció dels paràmetres a (>0) i b, estudieu la convergència de les sèries següents:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{n^b}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n n^b}{n!}$ (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n n!}{n^n}$

P7.4 Feu servir el criteri de Dirichlet per demostrar la convergència de la sèrie

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos n}{n+1}\,.$$

Suggeriment: Demostreu que les sumes parcials de $\sum_{k=0}^{\infty}\cos k$ són fitades considerant que $\sum_{k=0}^{n}\cos k$ és la part real de $\sum_{k=0}^{\infty}e^{ik}$.

P7.5 Feu servir el criteri d'Abel per demostrar la convergència de la sèrie

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\sqrt{n+1}}\,.$$

Solucions

S7.1 Recordem: $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{r^n}=\frac{1}{1-r}$ si $|r|<1$ (pàgina 173) i $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}=e$ (pàgina 101).

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{7^n}=\frac{1}{1-(1/7)}=\frac{7}{6}\,.$

(b)
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{5^{n+1}}=\frac{1}{5}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{5}\right)^n=\frac{1}{5}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{5}\right)^n-1\right]$$
$$=\frac{1}{5}\left(\frac{1}{1-(2/5)}-1\right)=\frac{2}{15}\,.$$

(c) Descomponem en fraccions simples: $\displaystyle\frac{1}{n(n+2)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)$. La suma parcial n-èsima és
$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+2)}=\frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+2}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\cancel{\frac{1}{3}}+\cancel{\cdots}+\cancel{\frac{1}{n}}\right)$$
$$-\frac{1}{2}\left(\cancel{\frac{1}{3}}+\cancel{\cdots}+\cancel{\frac{1}{n}}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right).$$

Per tant, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+2)}=\lim\{S_n\}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{4}\,.$

(d) Aquesta sèrie és $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+2)}$. Si procedim com en el cas anterior arribem a
$$\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{2\cdot 5}+\frac{1}{3\cdot 6}+\cdots=\frac{11}{18}\,.$$

(e) Tenim $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5n+4}{n^3+3n^2+2n}=\frac{2}{n}+\frac{1}{n+1}-\frac{3}{n+2}$. Si procedim com en els dos casos anteriors arribem a $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5n+4}{n^3+3n^2+2n}=\frac{7}{2}\,.$

(f)
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n-2}{(n+1)!}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)-3}{(n+1)!}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}-3\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)!}$$
$$=(e-1)-3(e-2)=5-2e.$$

S7.2 Recordem que $\lim\{\sqrt[n]{n}\} = 1$ (pàgina 49) i que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ convergeix quan $p > 1$ i divergeix quan $p \leq 1$ (sèrie harmònica generalitzada).

(a) $\displaystyle\sqrt{n+2}-\sqrt{n} = \frac{2}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}} > \frac{2}{2\sqrt{n+2}}$. Com que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2)^{1/2}} = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n^{1/2}}$ és divergent, concloem, pel criteri de comparació, que la sèrie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n}\right)$ també ho és.

(b) $\displaystyle\frac{1}{n(n+4)} < \frac{1}{n^2}$. Com que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ és convergent, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+4)}$ també ho és.

(c) $\displaystyle\frac{3^{-n}}{n^2+2} < \frac{1}{n^2+2} < \frac{1}{n^2}$. Per tant, com en el cas anterior, $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{3^{-n}}{n^2+2}$ és convergent.

(d) $\displaystyle\frac{1}{3}+\frac{2}{5}+\frac{3}{7}+\frac{4}{9}+\cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n+1}$. Com que $\displaystyle\lim\left\{\frac{n}{2n+1}\right\} = \frac{1}{2} \neq 0$, la successió de sumands no tendeix a 0 i la sèrie no pot ser convergent.

(e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^{\ln n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e^{(\ln n)(\ln 3)}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\ln 3}}$ és convergent, ja que $\ln 3 > 1$.

(f) Fem servir el criteri de la integral amb la funció $\displaystyle f(x) = \frac{1}{x(\ln x)^p}$ que és no negativa i decreixent.

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{x(\ln x)^p}\, dx = \int_{\ln 2}^{\infty} \frac{1}{t^p}\, dt,$$

on hem fet el canvi $t = \ln x$. La integral impròpia de la dreta convergeix quan $p > 1$ i divergeix quan $p \leq 1$ i, per tant, passa el mateix amb la sèrie $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p}$.

(g) $\displaystyle\frac{\cosh n}{\cosh(3n)} = \frac{e^n+e^{-n}}{e^{3n}+e^{-3n}} = \frac{1+e^{-2n}}{e^{2n}+e^{-4n}} < \frac{2}{e^{2n}}$. Com que la integral impròpia $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{2}{e^{2x}}\, dx$ és convergent, la sèrie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{e^{2n}}$ també és convergent i, per tant, la sèrie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cosh n}{\cosh(3n)}$, també ho és.

(h) Fem servir el criteri del quocient:

$$\lim\left\{\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}\right\} = \lim\left\{\frac{(n+1)}{5^{n+1}}\ \frac{5^n}{n}\right\} = \lim\left\{\frac{n+1}{5n}\right\} = \frac{1}{5} < 1.$$

Per tant, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{5^n}$ és convergent.

(i) Criteri del quocient:

$$\begin{aligned}\lim\left\{\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}\right\} &= \lim\left\{\frac{[(n+1)!]^2}{[2(n+1)]!}\ \frac{(2n)!}{(n!)^2}\right\}\\ &= \lim\left\{\frac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)}\right\} = \frac{1}{4} < 1.\end{aligned}$$

Per tant, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}$ és convergent.

(j) Criteri del quocient:

$$\begin{aligned}\lim\left\{\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}\right\} &= \lim\left\{\frac{3^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\ \frac{n^n}{3^n n!}\right\}\\ &= \lim\left\{\frac{3(n+1)}{(n+1)}\ \left(\frac{n}{n+1}\right)^n\right\} = \lim\left\{\frac{3}{[1+(1/n)]^n}\right\}\\ &= \frac{3}{e} > 1.\end{aligned}$$

Per tant, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n n!}{n^n}$ és divergent.

(k) Fem servir el criteri de l'arrel:

$$\lim\left\{\sqrt[n]{|a_n|}\right\} = \lim\left\{\sqrt[n]{\frac{2^n}{n^{100}}}\right\} = \lim\left\{\frac{2}{\left(\sqrt[n]{n}\right)^{100}}\right\} = 2 > 1.$$

Per tant, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^{100}}$ és divergent.

(l) Fem servir el criteri de l'arrel:

$$\lim\left\{\sqrt[n]{|a_n|}\right\} = \lim\left\{\sqrt[n]{\frac{1}{(\ln n)^n}}\right\} = \lim\left\{\frac{1}{\ln n}\right\} = 0 < 1.$$

Per tant, $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(\ln n)^n}$ és convergent.

(m) És una sèrie alternada i $\{1/\sqrt[3]{n}\}$ és decreixent amb límit 0. Per tant, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n}}$ és convergent.

(n) Com en el cas anterior, és una sèrie alternada i $\{1/\ln(\ln n)\}$ és decreixent amb límit 0. Per tant, $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(\ln n)}$ és convergent.

S7.3 Si fem servir el criteri del quocient arribem els resultats següents:

(a) Si $a > 1$ divergeix i si $a < 1$ convergeix. Si $a = 1$ convergeix quan $b > 1$ i divergeix quan $b \leq 1$.

(b) Sempre convergeix.

(c) Convergeix si $a < e$ i divergeix si $a > e$. Quan $a = e$, si fem servir la fórmula de Stirling, $n! \simeq n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}$, veiem que la successió de sumands no té límit 0 i, per tant, la sèrie no convergeix.

S7.4 La successió $\{1/(n+1)\}$ és decreixent amb límit 0. D'altra banda, les sumes parcials de $\sum_{k=0}^{\infty} \cos k$ són fitades. En efecte, notem que

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \cos k = \operatorname{Re}\left(\sum_{k=0}^{n} e^{ik}\right) = \operatorname{Re}\left(\frac{e^{i(n+1)} - 1}{e^i - 1}\right),$$

on hem fet servir la fórmula de la suma d'una progressió geomètrica. Per tant,

$$|S_n| = \left|\operatorname{Re}\left(\frac{e^{i(n+1)} - 1}{e^i - 1}\right)\right| \leq \left|\frac{e^{i(n+1)} - 1}{e^i - 1}\right| \leq \frac{2}{|e^i - 1|}\,.$$

Aleshores, el criteri de Dirichlet garanteix la convergència de $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos n}{n+1}$.

S7.5 La successió $\left\{\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right\}$ és decreixent i convergent (cap a 0) i la sèrie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$ és convergent, ja que és alternada i $\left\{1/\sqrt{n+1}\right\}$ és decreixent i amb límit 0. Aleshores, d'acord amb el criteri d'Abel, la sèrie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\sqrt{n+1}}$ és convergent.

8 SÈRIES DE FUNCIONS

8.1 Successions de funcions

Si $\mathcal{F}_D$ és el conjunt de les funcions definides en un domini D de la recta real, una successió de funcions de D és una aplicació de $\mathbb{N}$ sobre $\mathcal{F}_D$,

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathcal{F}_D \\ n & \to & f_n(x) \end{array}$$

que representem per $\{f_1(x), f_2(x), f_3(x), f_4(x), \ldots\}_D$ o, abreviadament, $\{f_n(x)\}_D$.

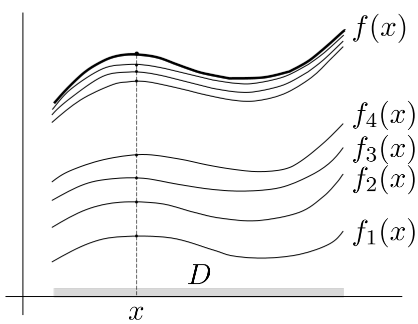
Convergència puntual

DEFINICIÓ: Una successió de funcions $\{f_n(x)\}_D$ és convergent *punt a punt* (o *puntualment*) cap a la funció $f(x)$, en el domini D, si

$$\forall \varepsilon > 0 \text{ i } \forall x \in D,\ \exists n_0(\varepsilon, x) \in \mathbb{N} \text{ tal que } |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon,\ \forall n > n_0.$$

En altres paraules, $\forall x \in D$ es compleix que $\lim\{f_n(x)\}_D = f(x)$, és a dir, a cada punt de D la successió *numèrica* dels valors de les funcions f_n en aquell punt convergeix cap al valor de f en el punt. Ho expressem

$$f(x) = \lim_{\text{punt}(D)} f_n(x) \qquad \text{o, també} \qquad \{f_n(x)\} \xrightarrow{\text{punt}(D)} f(x).$$



Vegem-ne alguns exemples (s'il·lustren gràficament a la figura de la pàgina 195).

EXEMPLE 1: La successió de funcions $f_n(x) = x/n$ convergeix puntualment, a tot $\mathbb{R}$, cap a la funció $f(x) = 0$.

EXEMPLE 2: La successió de funcions $f_n(x) = x^n$ convergeix puntualment, a l'interval $(-1, 1]$, cap a la funció

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in (-1,1), \\ 1 & \text{si } x = 1, \end{cases}$$

i no és convergent fora d'aquest interval. Notem que, malgrat que les funcions $f_n(x)$ estan definides i són contínues a tot $\mathbb{R}$, la successió només convergeix puntualment a l'interval $(-1, 1]$ i el límit no és una funció contínua.

EXEMPLE 3: La successió de funcions

$$f_n(x) = \begin{cases} 2nx & \text{si } x \in [0, 1/2n], \\ 2 - 2nx & \text{si } x \in [1/2n, 1/n], \\ 0 & \text{si } x \notin [0, 1/n], \end{cases}$$

convergeix puntualment, a tot $\mathbb{R}$, cap a la funció $f(x) = 0$. Notem que si integrem, per exemple, a l'interval $[0, 1]$ les funcions $f_n(x)$ i la funció límit $f(x)$ obtenim, respectivament, $\int_0^1 f_n(x)\,dx = 1/2n$ i $\int_0^1 f(x)\,dx = 0$, és a dir, es compleix que el límit de les integrals és la integral del límit:

$$\lim \left\{ \int_0^1 f_n(x)\,dx \right\} = \int_0^1 f(x)\,dx.$$

EXEMPLE 4: Considerem ara la successió de funcions

$$f_n(x) = \begin{cases} 2n^2x & \text{si } x \in [0, 1/2n], \\ 2n - 2n^2x & \text{si } x \in [1/2n, 1/n], \\ 0 & \text{si } x \notin [0, 1/n]. \end{cases}$$

Són les funcions de l'exemple anterior multiplicades per n. Aquesta successió també convergeix puntualment, a tot $\mathbb{R}$, cap a $f(x) = 0$, però ara $\int_0^1 f_n(x)\,dx = 1/2$ mentre que $\int_0^1 f(x)\,dx = 0$, és a dir,

$$\lim \left\{ \int_0^1 f_n(x)\,dx \right\} \neq \int_0^1 f(x)\,dx.$$

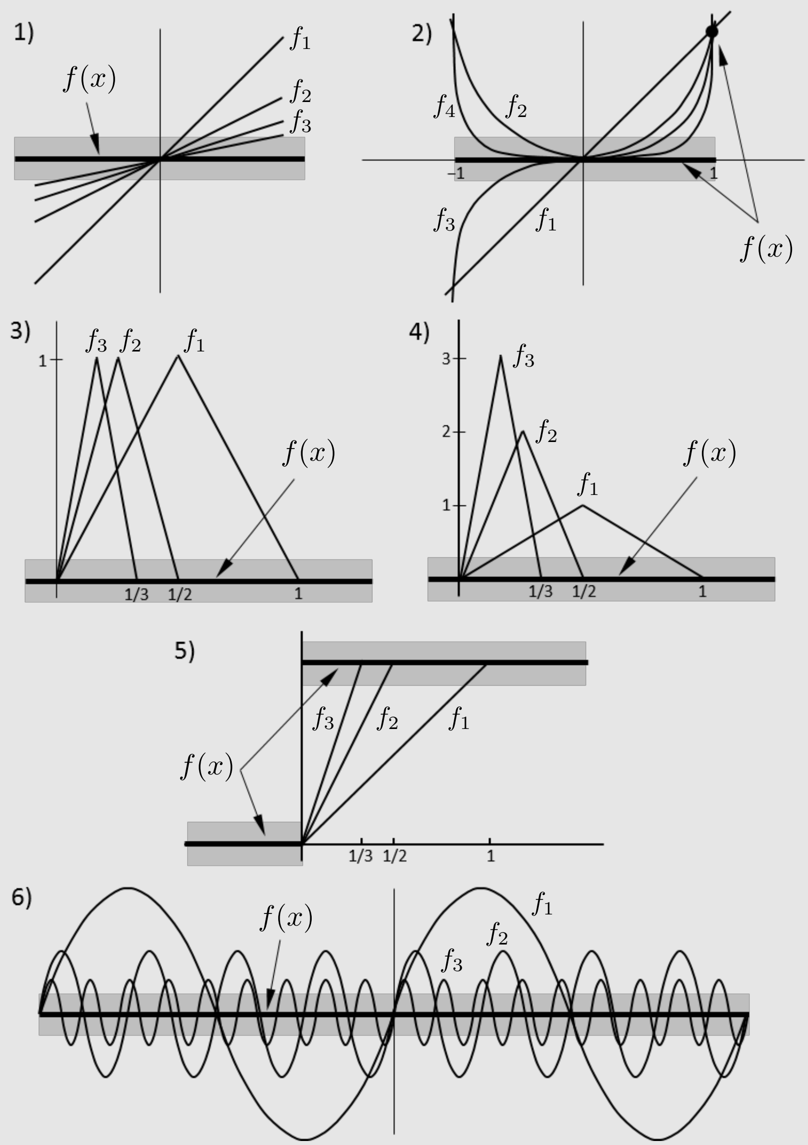
EXEMPLE 5: La successió de funcions (contínues)

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0, \\ nx & \text{si } x \in [0, 1/n], \\ 1 & \text{si } x \geq 1/n, \end{cases}$$

convergeix puntualment, a tot $\mathbb{R}$, cap a la funció (discontínua)

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0, \\ 1 & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

Exemple 6: La successió de funcions $f_n(x) = \sin(n^2x)/n$ convergeix puntualment, a tot $\mathbb{R}$, cap a la funció $f(x) = 0$. En aquest exemple és interessant notar que la successió de derivades, $f_n'(x) = n\cos(n^2x)$, no convergeix puntualment cap a $f'(x) = 0$ (per exemple, a $x = 0$ tenim $f_n'(0) = n$ mentre que $f'(0) = 0$).



Com es pot veure en els exemples anteriors, la convergència puntual no transmet ni la continuïtat, ni la integrabilitat, ni la derivabilitat de les funcions de la successió cap a la funció límit. Introduirem ara un concepte més fort de convergència, la *convergència uniforme*, que sí que ho fa.

Convergència uniforme

D'acord amb la definició de convergència puntual, $\{f_n(x)\} \stackrel{\text{punt}(D)}{\longrightarrow} f(x)$ si $\forall \varepsilon > 0$ i $\forall x \in D$, $\exists n_0(x, \varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$, $\forall n > n_0$. Notem que el subíndex n_0 a partir del qual la distància entre els valors de f_n i els de f és menor que ε, depèn del punt x. Quan sigui possible que n_0 depengui únicament de ε i no del punt $x \in D$ considerat, direm que $\{f_n(x)\}_D$ convergeix *uniformement* cap a la funció $f(x)$ en el domini D. Així doncs,

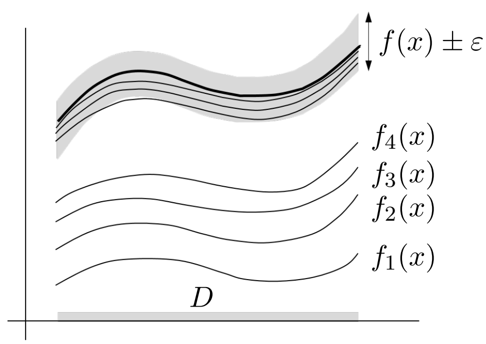
DEFINICIÓ: Una successió de funcions $\{f_n(x)\}_D$ convergeix *uniformement* cap a la funció $f(x)$, en el domini D, si

$$\forall \varepsilon > 0 \text{ i } \forall x \in D,\ \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} \text{ tal que } |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon,\ \forall n > n_0,$$

i ho expressem

$$f(x) = \lim_{\text{unif}(D)} f_n(x) \qquad \text{o, també} \qquad \{f_n(x)\} \xrightarrow{\text{unif}(D)} f(x).$$

Geomètricament, això significa que per a $n > n_0$, els gràfics de les funcions f_n, en *tot* el domini D, es troben dins la franja $f(x) \pm \varepsilon$.



TEOREMA: Si $\{f_n(x)\} \xrightarrow{\text{unif}(D)} f(x)$, aleshores $\{f_n(x)\} \xrightarrow{\text{punt}(D)} f(x)$.

DEMOSTRACIÓ: és evident a partir de la definició. $\diamondsuit$

El recíproc no és cert. Comprovem-ho en els exemples anteriors (a la figura de la pàgina 195 hi ha representades les franges $f(x) \pm \varepsilon$).

EXEMPLE 1: La successió de funcions $f_n(x) = x/n$ no convergeix uniformement cap a la funció $f(x) = 0$, a $\mathbb{R}$. Sí que ho fa, en canvi, en qualsevol interval finit de $\mathbb{R}$.

EXEMPLE 2: La successió de funcions $f_n(x) = x^n$ no convergeix uniformement, a l'interval $(-1, 1]$, cap a la funció $f(x)$. Sí que ho fa, en canvi, en qualsevol subinterval tancat de $(-1, 1)$ (per exemple, a l'interval $[-1/4, 1/2]$).

EXEMPLES 3, 4 I 5: En aquests exemples la convergència no és uniforme ni a $\mathbb{R}$ ni a cap interval que contingui el punt $x = 0$ al seu interior (per exemple, $[-1, 1]$) o que tingui aquest punt com a extrem inferior (per exemple, $[0, 1]$ o $(0, 2]$). A la resta d'intervals la convergència és uniforme.

EXEMPLE 6: La successió de funcions $f_n(x) = \sin(n^2x)/n$ convergeix uniformement, a tot $\mathbb{R}$, cap a la funció $f(x) = 0$.

Notem que el fet que una convergència sigui uniforme no depèn només de la successió sinó també del domini D considerat, és a dir, una successió de funcions pot no convergir uniformement en un domini D i fer-ho en un subdomini $D' \subset D$.

Els teoremes següents estableixen que la continuïtat i la integrabilitat es transmeten de les funcions de la successió cap a la funció límit quan la convergència és uniforme. La derivabilitat és més complicada, no es transmet necessàriament a la funció límit (vegeu l'exemple 6). Cal que la successió de les derivades també sigui uniformement convergent.

Teoremes sobre la convergència uniforme de successions

Únicament enunciarem els teoremes i ometrem les demostracions.[1]

TEOREMA DE LA CONTINUÏTAT: Si $\{f_n(x)\} \xrightarrow{\text{unif}(D)} f(x)$, i les funcions f_n són contínues a D, aleshores $f(x)$ és contínua a D.

TEOREMA DE LA INTEGRABILITAT TERME A TERME: Si $\{f_n(x)\} \xrightarrow{\text{unif}(D)} f(x)$ i les funcions f_n són integrables a $[a, b] \subset D$, aleshores f és integrable a $[a, b]$ i es compleix

$$\left\{ \int_a^b f_n(x)\,dx \right\} \longrightarrow \int_a^b f(x)\,dx.$$

[1] Vegeu, per exemple, la secció 1 del capítol X de J. M. Ortega, *Introducció a l'anàlisi matemàtica, op. cit.*

Teorema de la derivabilitat terme a terme:
Si les funcions f_n són derivables a D, $\{f_n(x)\}$ convergeix en *algun punt* de D i $\{f'_n(x)\} \xrightarrow{\text{unif}(D)} g(x)$, aleshores

$$\{f_n(x)\} \xrightarrow{\text{unif}(D)} f(x) \text{ (derivable) } \text{ i } f'(x) = g(x).$$

Corol·lari: Si $\{f_n(x)\} \xrightarrow{\text{unif}(D)} f(x)$, les funcions f_n són derivables a D i $\{f'_n(x)\}$ també és uniformement convergent a D, aleshores

$$f(x) \text{ és derivable i } \{f'_n(x)\} \xrightarrow{\text{unif}(D)} f'(x).$$

8.2 Sèries de funcions

Com en el cas de les sèries numèriques, definim la suma d'una sèrie de funcions definides en un domini D com el límit, si existeix, de la successió de sumes parcials

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \stackrel{\text{def}}{=} \lim\{F_n(x)\}, \qquad \text{on} \qquad F_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x).$$

Depenent de com convergeixi la successió de sumes parcials $\{F_n(x)\}$ la sèrie podrà ser sumable puntualment o uniformement.

Si $\{F_n(x)\} \xrightarrow{\text{punt}(D)} F(x)$ diem que la sèrie $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ convergeix *puntualment* (o és sumable *puntualment*) en el domini D, i que $F(x)$ és la seva suma en el sentit *puntual*. Ho expressem

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \stackrel{\text{punt}(D)}{=} F(x).$$

Si $\{F_n(x)\} \xrightarrow{\text{unif}(D)} F(x)$ diem que la sèrie $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ convergeix *uniformement* (o és sumable *uniformement*) en el domini D, i que $F(x)$ és la seva suma en el sentit *uniforme*. Ho expressem

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \stackrel{\text{unif}(D)}{=} F(x).$$

Per a les sèries de funcions uniformement convergents tenim teoremes anàlegs als de les successions uniformement convergents, dels quals en són conseqüència.

Teorema de la continuïtat: Si $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \stackrel{\text{unif}(D)}{=} F(x)$ i les funcions f_k són contínues a D, aleshores $F(x)$ és contínua a D.

Teorema de la integrabilitat terme a terme: Si $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \overset{\text{unif}(D)}{=} F(x)$ i les funcions f_k són integrables a $[a,b] \subset D$, aleshores F és integrable a $[a,b]$ i es compleix

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b f_k(x)\,dx = \int_a^b F(x)\,dx.$$

Teorema de la derivabilitat terme a terme:
Si les funcions f_k són derivables a D, $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ és sumable en *algun punt* de D i $\sum_{k=1}^{\infty} f_k'(x) \overset{\text{unif}(D)}{=} G(x)$, aleshores

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \overset{\text{unif}(D)}{=} F(x) \text{ (derivable) } \text{ i } F'(x) = G(x).$$

Corol·lari: Si $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \overset{\text{unif}(D)}{=} F(x)$, les funcions f_k són derivables a D, i $\sum_{k=1}^{\infty} f_k'(x)$ també és sumable en el sentit uniforme a D, aleshores

$$F(x) \text{ és derivable } \text{ i } \sum_{k=1}^{\infty} f_k'(x) \overset{\text{unif}(D)}{=} F'(x).$$

A la secció següent estudiarem un tipus particular de sèries de funcions: les *sèries de potències*.

8.3 Sèries de potències

Es tracta de sèries del tipus

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-c)^k = a_0 + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 + a_3(x-c)^3 + \cdots$$

que anomenem sèries de potències al voltant del punt c. Les funcions f_k són, doncs, potències de $(x-c)$ multiplicades per coeficients reals. Cal notar que qualsevol sèrie de potències al voltant d'un punt c es pot convertir en una sèrie de potències al voltant del punt 0 amb el canvi de variable $t = x - c$:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-c)^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k.$$

Així doncs, només ens cal estudiar aquestes.

Teorema de la convergència absoluta de les sèries de potències

TEOREMA: Si $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ és convergent en el punt $x = x_0$, aleshores $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ és *absolutament* convergent (i, per tant, convergent) en tot punt x tal que $|x| < |x_0|$.

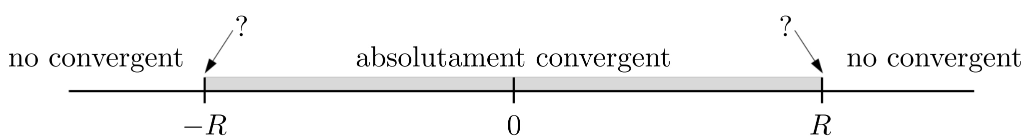
DEMOSTRACIÓ: com que la sèrie numèrica $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$ és convergent, la successió de sumands $\{a_n x_0^n\}$ ha de tendir cap a 0 i, per tant, ha de ser fitada (tota successió convergent ho és). Això vol dir que hi ha algun M tal que $|a_n x_0^n| \leq M$, $\forall n$. Llavors tenim

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n| = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n||x|^n = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n||x_0|^n \left|\frac{x}{x_0}\right|^n \leq M \sum_{n=0}^{\infty} \left|\frac{x}{x_0}\right|^n,$$

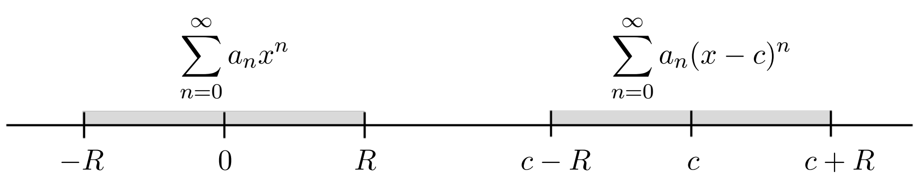
és a dir, la sèrie de termes no negatius $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$ està majorada per la sèrie geomètrica $\sum_{n=0}^{\infty} \left|\frac{x}{x_0}\right|^n$ que és convergent quan $\left|\frac{x}{x_0}\right| < 1$. D'aquí concloem que quan $|x| < |x_0|$, $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$ és convergent i, per tant, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ també ho és. $\diamondsuit$

Radi de convergència d'una sèrie de potències

D'acord amb el teorema anterior, si una sèrie de potències de x convergeix en un punt, llavors convergeix absolutament en tots els punts que estan a menor distància de l'origen que ell. Pel mateix motiu, si no convergeix en un punt, tampoc ho pot fer en punts més allunyats de l'origen que ell. Això ens diu que tota sèrie de potències $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ té associat un interval centrat en l'origen, d'extrems $\pm R$, a l'interior del qual (és a dir, a $(-R, R)$) la sèrie és absolutament convergent, a l'exterior del qual (quan $x < -R$ o $x > R$) no convergeix enlloc, i en els extrems del qual (els punts $x = \pm R$) no es pot afirmar, en general, ni una cosa ni l'altra (depèn de cada sèrie en concret). L'interval $(-R, R)$ s'anomena *interval de convergència* de la sèrie de potències i R és el *radi de convergència.*



Les sèries $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ i $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n$ tenen el mateix radi de convergència R, però els intervals de convergència són $(-R, R)$ i $(c-R, c+R)$, respectivament.



Càlcul del radi de convergència

Per trobar el radi de convergència d'una sèrie de potències podem utilitzar el criteri de l'arrel. Si $\alpha = \lim\left\{\sqrt[n]{|a_n|}\right\}$, tenim

$$\lim\left\{\sqrt[n]{|a_n x^n|}\right\} = \lim\left\{|x|\sqrt[n]{|a_n|}\right\} = |x|\alpha.$$

Quan aquest límit sigui < 1 (és a dir, quan $|x| < 1/\alpha$) la sèrie de potències $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ serà absolutament convergent mentre que quan aquest límit sigui > 1 (és a dir, quan $|x| > 1/\alpha$) la sèrie no serà convergent. El valor $1/\alpha$ és, doncs, el radi de convergència de la sèrie de potències $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Tenim, doncs,

$$R = \left[\lim\left\{\sqrt[n]{|a_n|}\right\}\right]^{-1}.$$

També podem utilitzar el criteri del quocient. Si $\alpha = \lim\left\{\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}\right\}$ tenim

$$\lim\left\{\frac{|a_{n+1}x^{n+1}|}{|a_n x^n|}\right\} = \lim\left\{|x|\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}\right\} = |x|\alpha.$$

Novament, quan aquest límit sigui < 1 (és a dir, quan $|x| < 1/\alpha$) la sèrie de potències $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ serà absolutament convergent mentre que quan aquest límit sigui > 1 (és a dir, quan $|x| > 1/\alpha$) la sèrie no serà convergent. El valor $1/\alpha$ és, doncs, el radi de convergència de la sèrie de potències $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, és a dir,

$$R = \left[\lim\left\{\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}\right\}\right]^{-1} = \lim\left\{\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}\right\}.$$

D'acord amb la generalització dels criteris de l'arrel i del quocient a què hem fet referència en el capítol anterior, si les successions $\left\{\sqrt[n]{|a_n|}\right\}$ i $\left\{\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}\right\}$ no són convergents, podem reemplaçar "lim" per "lim sup" en les dues expressions del radi de convergència R.

Exemples:

1) $1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \cdots$ En aquest cas $a_n = (-1)^n$ i, per tant,

$$R = \lim\left\{\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}\right\} = \lim\{1\} = 1.$$

2) $1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$ En aquest cas $a_n = \frac{1}{n!}$ i, per tant,

$$R = \lim\left\{\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}\right\} = \lim\left\{\frac{(n+1)!}{n!}\right\} = \lim\{n+1\} = \infty,$$

és a dir, la sèrie convergeix a tot $\mathbb{R}$.

3) $-1+2x-3x^2+4x^3-5x^4+\cdots$ Tenim $a_n=(-1)^{n+1}(n+1)$ i, per tant,

$$R=\lim\left\{\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}\right\}=\lim\left\{\frac{n+1}{n+2}\right\}=1.$$

4) $1+1!x+2!x^2+3!x^3+4!x^4+\cdots$ En aquest cas $a_n=n!$ i, per tant,

$$R=\lim\left\{\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}\right\}=\lim\left\{\frac{n!}{(n+1)!}\right\}=\lim\left\{\frac{1}{n+1}\right\}=0,$$

és a dir, la sèrie només convergeix en el punt $x=0$.

5) $1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{2^2}+\frac{x^3}{2^3}+\frac{x^4}{2^4}+\cdots$ En aquest cas $a_n=\frac{1}{2^n}$ i, per tant,

$$R=\lim\left\{\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}\right\}=\lim\left\{\frac{2^{n+1}}{2^n}\right\}=\lim\{2\}=2.$$

6) $1+3x^2+3^2x^4+3^3x^6+3^4x^8+\cdots$ En aquest cas la sèrie només conté potències parelles de x i és més convenient aplicar els criteris directament a la sèrie de potències $\sum_{n=0}^{\infty}3^nx^{2n}$.

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{3^n|x|^{2n}}=3|x|^2.$$

La sèrie convergeix absolutament quan $3|x|^2<1$, és a dir, quan $|x|<1/\sqrt{3}$. Per tant, $R=1/\sqrt{3}$.

7) $1+(1+\cos 1)x+(1+\cos 2)x^2+(1+\cos 3)x^3+\cdots$ Tenim $a_n=1+\cos n$, però $\lim_{n\to\infty}(1+\cos n)$ no existeix. En canvi

$$\limsup\{1+\cos n\}=\lim_{n\to\infty}\left[\sup_{k\geq n}(1+\cos k)\right]=\lim_{n\to\infty}2=2.$$

Per tant, $R=2$.

Radi de convergència de la sèrie de les derivades

TEOREMA: La sèrie de potències $\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}$ té el mateix radi de convergència que $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$.

Demostració: siguin R' i R els respectius radis de convergència. Notem que les sèries $\sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1}$ i $\sum_{n=1}^{\infty} na_n x^n$ tenen el mateix radi de convergència, ja que la segona s'obté de la primera multiplicant cadascun dels seus termes per x. Per tant,

$$R' = \left[\lim \left\{ \sqrt[n]{|na_n|} \right\}\right]^{-1} = \left[\lim \left\{ \sqrt[n]{n} \right\} \lim \left\{ \sqrt[n]{|a_n|} \right\}\right]^{-1} = R,$$

on hem fet servir que $\lim \{ \sqrt[n]{n} \} = 1$. També ho podem raonar

$$R' = \lim \left\{ \frac{|na_n|}{|(n+1)a_{n+1}|} \right\} = \lim \left\{ \frac{n}{n+1} \right\} \lim \left\{ \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} \right\} = R. \quad \diamondsuit$$

Exemple: La sèrie de potències de l'exemple 3 anterior s'obté derivant terme a terme la de l'exemple 1 i hem trobat que, efectivament, ambdues tenen el mateix radi de convergència.

Radi de convergència de la sèrie de les primitives

Teorema: La sèrie de potències $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}$ té el mateix radi de convergència que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

Demostració: és evident, ja que si derivem la primera sèrie terme a terme obtenim la segona. $\diamondsuit$

Si dins l'interval de convergència tenim que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = f(x)$ ens podem preguntar si la sèrie de les derivades $\sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1}$ convergeix cap a $f'(x)$ o si la sèrie de les primitives $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}$ convergeix cap a una primitiva de $f(x)$ (i si és així, cap a quina?). Aviat veurem, utilitzant els teoremes sobre la convergència uniforme de sèries (pàgines 198 i 199), que la resposta és afirmativa. Però per utilitzar aquests teoremes ens cal abans assegurar-nos que les sèries de potències convergeixen *uniformement* en alguna regió. Això és precisament el que estableix el teorema següent.

Teorema de la convergència uniforme de les sèries de potències

Teorema: Si $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ té radi de convergència R i $0 < A < R$, aleshores $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ convergeix *uniformement* a $[-A, A]$.

Demostració: suposem que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = f(x)$ a l'interior de l'interval de convergència $(-R, R)$. Com que el punt A és a l'interior d'aquest interval, la sèrie de potències convergeix absolutament en aquest punt. Tenim, doncs, que la sèrie numèrica $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| A^n$ és convergent. Per tant, si S és la seva suma, es compleix que $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left| S - \sum_{k=0}^{n} |a_k| A^k \right| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k| A^k \right| = \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k| A^k < \varepsilon,\ \forall n > n_0(\varepsilon).$$

Llavors, $\forall x \in [-A, A]$ tenim

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \right| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k x^k \right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k| |x|^k \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k| A^k < \varepsilon.$$

Així doncs, veiem que $\forall \varepsilon > 0$, i $\forall x \in [-A, A]$, $\exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \right| < \varepsilon,\ \forall n > n_0(\varepsilon).$$

Com que n_0 depèn únicament de ε i no del punt $x \in [-A, A]$, l'expressió anterior estableix la convergència uniforme de la sèrie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ cap a $f(x)$, a l'interval $[-A, A]$. $\diamondsuit$

Notem que la sèrie no convergeix uniformement a tot l'interval de convergència $(-R, R)$ sinó en subintervals tancats del tipus $[-A, A] \subset (-R, R)$. De fet, convergeix uniformement en qualsevol compacte $K \subset (-R, R)$, ja que sempre es pot trobar $A < R$ tal que $K \subset [-A, A] \subset (-R, R)$.

Si utilitzem els teoremes sobre la convergència uniforme de sèries de funcions arribem als resultats següents.

Teorema de la integrabilitat terme a terme de les sèries de potències

TEOREMA: Si $\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n = f(t)$, $\forall t \in (-R, R)$, aleshores $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} = \int_0^x f(t)\, dt$, $\forall x \in (-R, R)$.

DEMOSTRACIÓ: per a cada $x \in (-R, R)$, triem un A tal que $x \in [-A, A] \subset (-R, R)$. Tenim garantida la convergència uniforme de la sèrie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ a $[-A, A]$ i, per tant, a l'interval d'extrems 0 i x. Podem, doncs, aplicar directament el teorema de la integrabilitat terme a terme de les sèries uniformement convergents integrant cada sumand i la suma, entre 0 i x. $\diamondsuit$

Exemple 1: Considerem la sèrie geomètrica

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-t)^n = 1 - t + t^2 - t^3 + \cdots = \frac{1}{1+t}\,, \quad t \in (-1,1).$$

Si la integrem terme a terme entre 0 i x obtenim

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots = \ln(1+x)\,, \quad x \in (-1,1).$$

Exemple 2: Similarment, si integrem la sèrie

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-t^2)^n = 1 - t^2 + t^4 - t^6 + \cdots = \frac{1}{1+t^2}\,, \quad t \in (-1,1),$$

trobem

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots = \arctan x\,, \quad x \in (-1,1).$$

Teorema de la derivabilitat terme a terme de les sèries de potències

Teorema: Si $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = f(x)$, $\forall x \in (-R,R)$, aleshores $f(x)$ és derivable i $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = f'(x)$, $\forall x \in (-R,R)$.

Demostració: per a cada $x \in (-R,R)$, triem un A tal que $x \in [-A,A] \subset (-R,R)$. Tenim garantida la convergència uniforme de la sèrie a $[-A,A]$ i, per tant, podem aplicar directament el corol·lari del teorema de la derivabilitat terme a terme de les sèries uniformement convergents. $\diamondsuit$

Aquest teorema afirma, doncs, que la suma d'una sèrie de potències és sempre una funció derivable. Però això també és aplicable a la sèrie de les derivades, la suma de la qual serà també una funció derivable. L'aplicació reiterada d'aquesta propietat ens porta al resultat important següent:

La suma (dins del seu interval de convergència) d'una sèrie de potències és sempre una funció ∞-derivable.

Aquest fet permet *definir* funcions ∞-derivables a partir de sèries de potències. Òbviament, les funcions només queden definides dins l'interval de convergència de la sèrie.

Exemple: Les sèries

$$\begin{aligned} E(x) &\stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots \\ S(x) &\stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots \\ C(x) &\stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots \end{aligned}$$

defineixen les funcions ∞-derivables $E(x), S(x)$ i $C(x)$ a tota la recta real, ja que les tres sèries tenen radi de convergència ∞. Això és evident si fem servir $R = \lim\{|a_n|/|a_{n+1}|\}$ a la primera i també a les altres dues si fem $t = x^2$ i les tractem com a sèries de potències de t (a la segona cal, abans, treure x factor comú).

Si derivem terme a terme aquestes sèries obtenim

$$E'(x) = E(x), \quad S'(x) = C(x), \quad C'(x) = -S(x).$$

Al final d'aquesta secció veurem que

$$E(x) = e^x, \quad S(x) = \sin x, \quad C(x) = \cos x.$$

Teorema d'Abel del límit

Teorema: Si $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = f(x)$, $\forall x \in (-R, R)$ on R és el radi de convergència, i $\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$ és convergent, aleshores $\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n = \lim_{x \to R^-} f(x)$.

Demostració: si estenem $f(x)$ fins a $x = R$ assignant-li en aquest punt el valor $\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$, hem de demostrar que $f(x)$ és contínua a $[0, R]$. Per fer-ho n'hi ha prou amb demostrar que la sèrie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ convergeix uniformement en aquest interval. De fet, ja sabem que ho fa a $[0, A]$ si $A < R$, però l'extensió d'aquesta propietat a tot l'interval $[0, R]$ fa que la continuïtat de $f(x)$ també s'hi estengui.

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$ és convergent i, per tant, compleix el criteri general de convergència d'una sèrie (pàgina 174), és a dir, $\forall\varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|a_n R^n + a_{n+1} R^{n+1} + \cdots + a_{n+p} R^{n+p}| < \varepsilon, \quad \forall n > n_0, \forall p \geq 0.$$

Si $S_n \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=n}^{\infty} a_k R^k$, de la condició anterior deduïm que $|S_n| \leq \varepsilon$, $\forall n > n_0$. Notem, també, que $a_k R^k = S_k - S_{k-1}$.

Com que els punts de l'interval $[0, R]$ són de la forma $x = \lambda R$, on $\lambda \in [0, 1]$, tenim

$$\begin{aligned}
&\left|a_n(\lambda R)^n + a_{n+1}(\lambda R)^{n+1} + \cdots + a_{n+p}(\lambda R)^{n+p}\right| \\
&= \left|(S_n - S_{n-1})\lambda^n + (S_{n+1} - S_n)\lambda^{n+1} + \cdots + (S_{n+p} - S_{n+p-1})\lambda^{n+p}\right| \\
&= \left|-S_{n-1}\lambda^n + S_n(\lambda^n - \lambda^{n+1}) + S_{n+1}(\lambda^{n+1} - \lambda^{n+2}) + \cdots + S_{n+p}\lambda^{n+p}\right| \\
&\leq |-S_{n-1}\lambda^n| + \left|S_n(\lambda^n - \lambda^{n+1}) + S_{n+1}(\lambda^{n+1} - \lambda^{n+2}) + \cdots + S_{n+p}\lambda^{n+p}\right|,
\end{aligned}$$

El primer sumand és $< \varepsilon$, $\forall n > n_0 + 1$. Pel que fa al segon, com que $\lambda^k \geq \lambda^{k+1}$, tenim

$$\begin{aligned}
&\left|S_n(\lambda^n - \lambda^{n+1}) + S_{n+1}(\lambda^{n+1} - \lambda^{n+2}) + \cdots + S_{n+p}\lambda^{n+p}\right| \\
&\quad < \varepsilon \left|(\lambda^n - \lambda^{n+1}) + (\lambda^{n+1} - \lambda^{n+2}) + \cdots + (\lambda^{n+p-1} - \lambda^{n+p}) + \lambda^{n+p}\right| \\
&\qquad\qquad = \varepsilon\lambda^n < \varepsilon, \quad \forall n > n_0, \forall p \geq 0.
\end{aligned}$$

Així doncs, $\forall n > n_0 + 1$, $\forall p \geq 0$ tenim

$$\left|a_n(\lambda R)^n + a_{n+1}(\lambda R)^{n+1} + \cdots + a_{n+p}(\lambda R)^{n+p}\right| < 2\varepsilon,$$

d'on deduïm (fent $p \to \infty$)

$$\left|\sum_{k=n}^{\infty} a_k(\lambda R)^k\right| < 2\varepsilon, \quad \forall n > n_0 + 1, \forall\lambda \in [0, 1].$$

La desigualtat anterior equival a afirmar (redefinint ε i n_0)

$$\forall\varepsilon > 0, \exists n_0(\varepsilon) \text{ tal que } \left|f(x) - \sum_{k=0}^{n} a_k x^k\right| < \varepsilon, \forall n > n_0(\varepsilon), \forall x \in [0, R],$$

és a dir, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ convergeix uniformement a $[0, R]$, ja que n_0 no depèn del punt x considerat. Per tant, $f(x)$ és contínua a $[0, R]$. $\diamondsuit$

Hi ha un teorema similar quan $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(-R)^n$ és convergent. En aquest cas $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(-R)^n = \lim_{x\to -R^+} f(x)$. Aquests teoremes afirmen que la continuïtat de $f(x)$ s'estén als extrems de l'interval de convergència si la sèrie de potències hi convergeix. Vegem la seva utilitat als exemples següents.

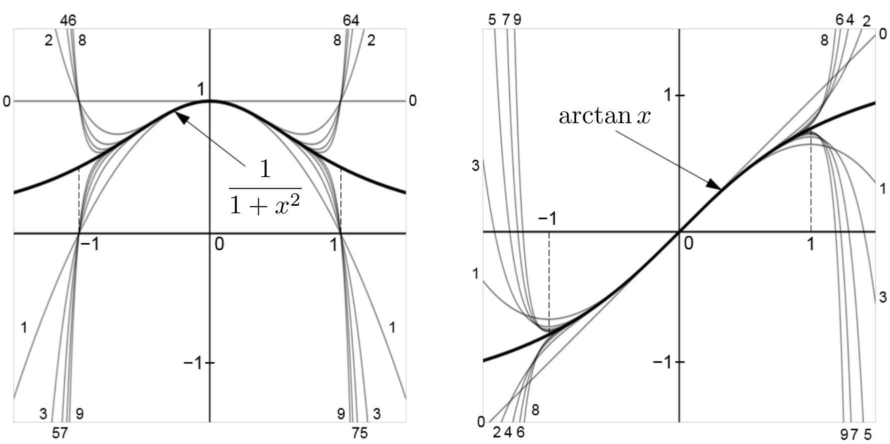
Exemple 1: Ja hem vist que $x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots = \ln(1+x), \forall x \in (-1,1)$. En principi, aquesta igualtat és vàlida a l'interval $(-1,1)$, però com que la sèrie també convergeix quan $x = 1$ (és la sèrie harmònica alternada), el teorema d'Abel permet afirmar que

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots = \lim_{x \to 1^-} \ln(1+x) = \ln 2.$$

Exemple 2: Similarment, $x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots = \arctan x, \forall x \in (-1,1)$, però com que la sèrie també és convergent quan $x = 1$, tenim

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots = \lim_{x \to 1^-} \arctan x = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}.$$

Aquests exemples també mostren un fet important. Quan integrem o derivem terme a terme una sèrie de potències, el radi de convergència no canvia, però en els extrems $\pm R$ de l'interval de convergència el caràcter convergent o no convergent de la sèrie pot canviar. Ho podem visualitzar a la figura següent.



A l'esquerra es mostra la funció $f(x) = 1/(1+x^2)$ i les sumes parcials $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^{2k}$, per als valors $n = 0, 1, 2, \ldots 9$ (indicats a les diferents corbes). Podem observar com la sèrie $\sum_{k=0}^{\infty} (-x^2)^k$ va convergint cap a $f(x)$ a l'interval $(-1,1)$, però no als extrems on les sumes parcials van prenent alternativament els valors ± 1.

A la dreta es pot veure la funció $\arctan x$ i les sumes parcials $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$, obtingudes per integració terme a terme de la sèrie anterior. En aquest cas, la sèrie convergeix cap a $\arctan x$ a l'interval $[-1,1]$.

Unicitat de les sèries de potències

TEOREMA: Si $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ a l'interval de convergència $(-R, R)$, aleshores $a_n = f^{(n)}(0)/n!$.

DEMOSTRACIÓ: si $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ a l'interval $(-R, R)$ i ho derivem reiteradament, obtenim

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \cdots \\
f'(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + 5a_5 x^4 + \cdots \\
f''(x) &= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} = 2a_2 + 3 \cdot 2\, a_3 x + 4 \cdot 3\, a_4 x^2 + 5 \cdot 4\, a_5 x^3 + \cdots \\
f'''(x) &= \sum_{n=3}^{\infty} n(n-1)(n-2) a_n x^{n-3} = 3 \cdot 2\, a_3 + 4 \cdot 3 \cdot 2\, a_4 x + 5 \cdot 4 \cdot 3\, a_5 x^2 + \cdots
\end{aligned}$$

etc.

Si substituïm $x = 0$ a les igualtats anteriors obtenim

$$\begin{aligned}
f(0) &= a_0 \\
f'(0) &= a_1 \\
f''(0) &= 2a_2 \\
f'''(0) &= 3 \cdot 2\, a_3 \\
&\vdots \\
f^{(n)}(0) &= n!\, a_n. \quad \diamondsuit
\end{aligned}$$

COROL·LARI: Si $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n$ a l'interval $(c-R, c+R)$, aleshores $a_n = f^{(n)}(c)/n!$.

DEMOSTRACIÓ: només cal fer el canvi $y = x - c$. $\diamondsuit$

COROL·LARI: Si $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-c)^n$, aleshores $a_n = b_n$.

DEMOSTRACIÓ: a_n i b_n han de coincidir amb $f^{(n)}(c)/n!$. $\diamondsuit$

Aquest resultat estableix la *unicitat* de les sèries de potències. No hi pot haver dues sèries de potències de $(x-c)$ *diferents* convergint cap a una mateixa funció $f(x)$.

EXEMPLE: La funció $f(x) = \arctan x$ és ∞-derivable. Volem trobar els seus polinomis de Taylor de grau qualsevol, al voltant de $x = 0$. Òbviament, ho podem fer calculant les derivades successives de $f(x)$ en el punt $x = 0$, però és un càlcul laboriós. La unicitat de les sèries de potències ens ho fa molt més fàcil.

Considerem la sèrie $\sum_{k=0}^{\infty}(-t^2)^k = 1-t^2+t^4-t^6+\cdots$. Si fem $u = t^2$, és la sèrie geomètrica $\sum_{k=0}^{\infty}(-u)^k$, que convergeix cap a $1/(1+u)$, si $|u| < 1$. Per tant,

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-t^2)^k = \frac{1}{1+t^2}\,, \qquad \forall t \in (-1,1).$$

Si ara integrem entre 0 i x la igualtat anterior arribem a

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} = \arctan x.$$

Aquesta sèrie és l'única sèrie de potències de x que convergeix cap a $f(x) = \arctan x$ a l'interval $(-1,1)$ i els seus coeficients han de ser $f^{(k)}(0)/k!$. Així doncs, el polinomi de Taylor de grau $2n+1$ d'aquesta funció és

$$\begin{aligned} P_{2n+1}^{(0)}(x) &= \sum_{k=0}^{n}(-1)^n \frac{x^{2k+1}}{2k+1} \\ &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots + (-1)^{2n+1}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\,. \end{aligned}$$

Sèrie de Taylor i fórmula de Taylor: Funcions analítiques

DEFINICIÓ: Si $f(x)$ és una funció ∞-derivable al punt $x = c$, anomenem *sèrie de Taylor* de $f(x)$ al voltant del punt c a la sèrie de potències

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n = f(c) + \frac{f'(c)}{1!}(x-c) + \frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2 + \frac{f'''(c)}{3!}(x-c)^3 + \cdots$$

Aquesta sèrie, com qualsevol sèrie de potències, té un radi de convergència R i, per tant, és convergent dins l'interval $(c-R, c+R)$. Convergeix cap a $f(x)$? La resposta no sempre és afirmativa.

Hem vist que si $f(x)$ és la suma d'una sèrie de potències $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$, aquesta sèrie és precisament la sèrie de Taylor de f al voltant del punt c. En aquest cas, doncs, podem escriure

$$f(x) = f(c) + \frac{f'(c)}{1!}(x-c) + \frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2 + \frac{f'''(c)}{3!}(x-c)^3 + \cdots, \quad \text{si } |x-c| < R.$$

Però hi ha funcions ∞-derivables que no són la suma de la seva sèrie de Taylor i no són, per tant, la suma de cap sèrie de potències. Per exemple, la funció $f(x) = \exp(-1/x^2)$ és ∞-derivable a tota la recta real però totes les seves derivades a l'origen són 0 i la sèrie de Taylor al voltant de l'origen és 0.

La pregunta és, doncs, quan és una funció ∞-derivable expressable com a suma d'una sèrie de potències (= sèrie de Taylor)? La resposta ens la dona la *fórmula* de Taylor de $f(x)$ al voltant del punt c

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k + R_n^{(c)}(x).$$

Aquesta fórmula és vàlida a tota la recta real, ja que la resta $R_n^{(c)}(x)$ és, per definició, la diferència entre la funció $f(x)$ i el *polinomi* de Taylor (de grau n)

$$P_n^{(c)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k.$$

Els polinomis de Taylor són les sumes parcials de la sèrie de Taylor. Per tant, la *sèrie* de Taylor convergeix cap a $f(x)$ quan la successió de *polinomis* de Taylor convergeix cap a $f(x)$, i això succeeix si $R_n^{(c)}(x)$ tendeix a 0 quan $n \to \infty$.

Si $R_n^{(c)}(x) \not\to 0$ (llevat del punt c on $R_n^{(c)} = 0$), la sèrie de Taylor, tot i ser convergent dins del seu interval de convergència, no convergeix cap a la funció $f(x)$ i, per tant, aquesta funció no és expressable com a sèrie de potències.

Així doncs, dins el conjunt de les funcions ∞-derivables hi ha un subconjunt de funcions expressables, en determinades regions, com a sèrie de potències. Aquestes funcions s'anomenen *analítiques*. Les funcions ∞-derivables no expressables en forma de sèrie de potències són *no analítiques*.

EXEMPLE 1: Les funcions $E(x), S(x)$ i $C(x)$ de l'exemple de la pàgina 206 són analítiques a tota la recta real, ja que són sumes de sèries de potències de x amb radi de convergència ∞. Aquestes sèries són, per tant, les seves sèries de Taylor al voltant de $x = 0$, però també són les sèries de Taylor de les funcions e^x, $\sin x$ i $\cos x$, respectivament. Per concloure la igualtat entre unes i altres funcions cal comprovar que les restes de Taylor tendeixen a 0 quan $n \to \infty$.

En el cas de e^x, si fem servir la fórmula de Taylor tenim

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + R_n^{(0)}(x).$$

Per avaluar $R_n^{(0)}(x)$ usem la resta de Lagrange

$$R_n^{(0)}(x) = \frac{e^c x^{n+1}}{(n+1)!}, \quad \text{on } c \text{ està entre } 0 \text{ i } x.$$

Quan $x \le 0$ tenim $e^c \le 1$ i quan $x > 0$ tenim $e^c \le e^x$. En qualsevol cas,

$$|R_n^{(0)}(x)| \le \frac{\text{màx}\{1, e^x\}|x|^{n+1}}{(n+1)!} \xrightarrow{n\to\infty} 0\,, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Així doncs, $E(x) = e^x$.

En el cas de $\sin x$ o $\cos x$ passa el mateix. En tots dos casos tenim

$$|R_n^{(0)}(x)| \le \frac{|\cos c \ \text{ o } \ \sin c|\,|x|^{n+1}}{(n+1)!} \le \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \xrightarrow{n\to\infty} 0\,, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

i, per tant, $S(x) = \sin x$ i $C(x) = \cos x$.

Això ens permet *definir* analíticament aquestes tres funcions (per a tot x) a partir de les sèries de potències:

$$\begin{aligned} e^x &\stackrel{\text{def}}{=} 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots \\ \sin x &\stackrel{\text{def}}{=} x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \cdots \\ \cos x &\stackrel{\text{def}}{=} 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \cdots \end{aligned}$$

Exemple 2: De manera semblant podem definir:

$$\begin{aligned} \sinh x &\stackrel{\text{def}}{=} x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} + \cdots \\ \cosh x &\stackrel{\text{def}}{=} 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} + \cdots \end{aligned}$$

EXEMPLE 3: Si $a \in \mathbb{R}$, la sèrie de potències

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{a}{n} x^n,$$

on, per definició,

$$\binom{a}{0} \stackrel{\text{def}}{=} 1, \quad \binom{a}{n} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{a(a-1)\cdots(a-n+1)}{n!}, \quad n = 1, 2, 3\ldots$$

té radi de convergència $R = \lim \left\{ \binom{a}{n} / \binom{a}{n-1} \right\} = 1$ i, per tant defineix una funció analítica a $(-1, 1)$:

$$f(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{a}{n} x^n, \quad x \in (-1, 1).$$

Si la derivem terme a terme tenim

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \binom{a}{n} n x^{n-1}, \quad x \in (-1, 1),$$

i amb un càlcul senzill deduïm la igualtat

$$f'(x)(1 + x) = af(x).$$

D'altra banda, si derivem el quocient $f(x)/(1 + x)^a$ obtenim

$$\left(\frac{f(x)}{(1 + x)^a} \right)' = \frac{f'(x)(1 + x) - af(x)}{(1 + x)^{a+1}} = 0.$$

Per tant, $f(x)/(1+x)^a$ és constant i com que $f(0) = 1$, tenim $f(x) = (1 + x)^a$. Així doncs,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{a}{n} x^n = (1 + x)^a, \quad \forall x \in (-1, 1).$$

Irracionalitat del nombre e

Si fem $x = 1$ a l'expressió $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} x^n/n!$ tenim

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\,.$$

A la pàgina 38 hem vist que $2 < e \leq 3$, però, de fet, $e < 3$, ja que

$$\begin{aligned} e &= 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots \\ &= 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{4\cdot 3} + \cdots\right) \\ &< 2 + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \cdots\right) = \frac{11}{4} < 3. \end{aligned}$$

És clar, doncs, que e no és enter. Suposem que és racional, és a dir, $e = p/q$, amb p i q enters, i $q \geq 2$. Llavors tenim que $q!e = q!p/q = (q-1)!p$ és enter. Però, d'altra banda,

$$q!e = \left[q! + \frac{q!}{1!} + \frac{q!}{2!} + \frac{q!}{3!} + \cdots + \frac{q!}{q!}\right] + \left\{\frac{q!}{(q+1)!} + \frac{q!}{(q+2)!} + \frac{q!}{(q+3)!} + \cdots\right\}.$$

La part $[\cdots]$ és un nombre enter i com que $q!e$ també ho és, la part $\{\cdots\}$ també ho ha de ser. Però com que $q \geq 2$ tenim

$$\begin{aligned} \left\{\cdots\right\} &= \frac{q!}{(q+1)!} + \frac{q!}{(q+2)!} + \frac{q!}{(q+3)!} + \cdots \\ &= \frac{1}{(q+1)} + \frac{1}{(q+2)(q+1)} + \frac{1}{(q+3)(q+2)(q+1)} + \cdots \\ &< \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \cdots = \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

i, per tant, no pot ser enter. Això demostra que e no es pot expressar com p/q, és a dir, e no és racional (a l'apèndix B hi ha una altra demostració que no fa servir l'expressió de e en forma de sèrie numèrica).

8.4 Sèries de Fourier

Fem ara una breu descripció de les anomenades *sèries de Fourier*. Es tracta de sèries construïdes a partir de les funcions

$$\left\{1,\ \cos\frac{\pi x}{L},\ \sin\frac{\pi x}{L},\ \cos\frac{2\pi x}{L},\ \sin\frac{2\pi x}{L},\ \cos\frac{3\pi x}{L},\ \sin\frac{3\pi x}{L}, \cdots\right\},$$

on L és un nombre real positiu. Expressem aquesta sèrie en la forma següent:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k \cos\frac{k\pi x}{L} + b_k \sin\frac{k\pi x}{L}\right).$$

Aquesta sèrie funcional pot ser o no convergent (això dependrà dels coeficients a_k i b_k) i, en cas de convergir, pot fer-ho puntualment o uniformement. Com que les funcions $\cos(k\pi x/L)$ i $\sin(k\pi x/L)$ són periòdiques amb període $2L$ (és a dir, repeteixen els seus valors quan x s'incrementa en $2L$), si la sèrie convergeix cap a la funció $S(x)$, aquesta serà també periòdica, és a dir, $S(x) = S(x + 2L)$.

D'altra banda, com que $\cos x$ és una funció *parella* ($\cos x = \cos(-x)$), si totes les b_k són zero, la funció suma (si existeix) també serà parella: $S(x) = S(-x)$. Similarment, com que $\sin x$ és una funció *imparella* ($\sin x = -\sin(-x)$), si totes les a_k (inclosa a_0) són zero, la funció suma (si existeix) també serà imparella: $S(x) = -S(-x)$.

Si la sèrie convergeix cap a la funció $S(x)$, podem trobar la relació existent entre $S(x)$ i els coeficients a_k i b_k. En efecte, si tenim en compte que

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{L}\int_c^{c+2L} \cos\frac{k\pi x}{L}\cos\frac{\ell\pi x}{L}\,dx &= \begin{cases} \delta_{k\ell} & \text{si } k+\ell>0, \\ 2 & \text{si } k=\ell=0, \end{cases} \\
\frac{1}{L}\int_c^{c+2L} \sin\frac{k\pi x}{L}\sin\frac{\ell\pi x}{L}\,dx &= \delta_{k\ell}\,, \\
\frac{1}{L}\int_c^{c+2L} \cos\frac{k\pi x}{L}\sin\frac{\ell\pi x}{L}\,dx &= 0,
\end{aligned}
$$

i a les integrals següents substituïm $S(x)$ per la sèrie, tenim

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{L}\int_c^{c+2L} S(x)\cos\frac{k\pi x}{L}\,dx &= a_k \quad (k=0,1,2,\ldots), \\
\frac{1}{L}\int_c^{c+2L} S(x)\sin\frac{k\pi x}{L}\,dx &= b_k \quad (k=1,2,3,\ldots).
\end{aligned}
$$

El fet que les sèries de Fourier, quan convergeixen, ho facin cap a funcions periòdiques ens porta a considerar si, donada una funció periòdica $f(x)$ de període $2L$, es pot trobar una sèrie de Fourier convergent cap a ella. En general, això no passa. Tampoc no existeix cap condició *necessària i suficient* per a la funció f que si es compleix hi ha sèrie de Fourier convergent cap a ella i si no es compleix no n'hi ha. El que sí que hi ha són condicions necessàries i condicions suficients. Vegem-ne una de suficient.

Si $f(x)$ és una funció periòdica de període $2L$, calculem les integrals

$$
\begin{aligned}
a_k &= \frac{1}{L}\int_c^{c+2L} f(x)\cos\frac{k\pi x}{L}\,dx \quad (k=0,1,2,\ldots), \\
b_k &= \frac{1}{L}\int_c^{c+2L} f(x)\sin\frac{k\pi x}{L}\,dx \quad (k=1,2,3,\ldots),
\end{aligned}
$$

on c és un punt qualsevol. De fet, com que f és periòdica, podem prendre com a interval d'integració qualsevol interval de longitud $2L$ (són integrals "al llarg d'un període"). En particular, podem calcular les integrals sobre l'interval $[0, 2L]$ o $[-L, L]$. Pel que fa a l'existència de les integrals, n'hi ha prou que f sigui integrable al llarg d'un període.

Amb els a_k i b_k obtinguts construïm la sèrie de Fourier

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos \frac{k\pi x}{L} + b_k \sin \frac{k\pi x}{L} \right).$$

La pregunta òbvia és, aquesta sèrie convergeix? Si ho fa, cap a quina funció? El teorema següent dona una resposta.

TEOREMA: Si $f(x)$ i $f'(x)$ són contínues a trossos a l'interval $[-L, L]$ (és a dir, només tenen un nombre finit de discontinuïtats de salt o evitables), aleshores

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos \frac{k\pi x}{L} + b_k \sin \frac{k\pi x}{L} \right) \xrightarrow{\text{punt}} \frac{1}{2}\left[f(x+0) + f(x-0) \right],$$

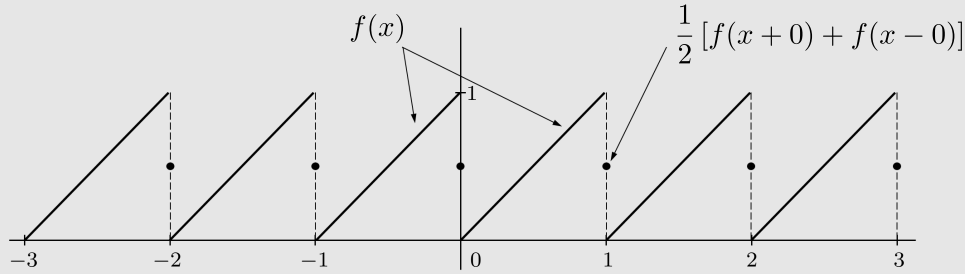
on $f(x \pm 0)$ són, respectivament, els límits per la dreta i per l'esquerra de la funció f en el punt x. Per tant, en els punts on f sigui contínua, la sèrie convergeix cap a $f(x)$.

Ometem la demostració, que és bastant laboriosa.

El teorema anterior només garanteix la convergència puntual. Una condició suficient per a la convergència uniforme (dins l'interval-període) és que $f(x)$ sigui contínua i que les sèries *numèriques* $\sum a_k$ i $\sum b_k$ siguin *absolutament* convergents.

EXEMPLE: La "dent de serra".
Considerem la funció periòdica (de període 1) definida per

$$f(x) = x \quad \text{si } x \in (0, 1], \quad f(x+1) = f(x).$$



En aquest cas tenim $2L = 1$ (o $L = 1/2$) i, per tant,

$$a_0 = 2\int_0^1 x\,dx = 1,$$
$$a_k = 2\int_0^1 x\cos(2k\pi x)\,dx = 0 \quad (k = 1, 2, 3, \ldots),$$
$$b_k = 2\int_0^1 x\sin(2k\pi x)\,dx = -\frac{1}{k\pi} \quad (k = 1, 2, 3, \ldots).$$

La sèrie de Fourier de $f(x)$ és, doncs,

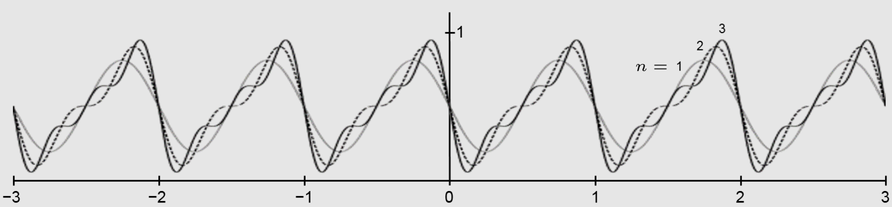
$$\frac{1}{2} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\pi}\sin(2k\pi x) = \frac{1}{2} - \frac{\sin(2\pi x)}{\pi} - \frac{\sin(4\pi x)}{2\pi} - \frac{\sin(6\pi x)}{3\pi} - \cdots$$

que convergeix puntualment cap a $f(x)$ a tot arreu, llevat dels punts de discontinuïtat de salt ($x = \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$) en els quals convergeix cap al valor $1/2$ que és la mitjana dels límits per la dreta (0) i per l'esquerra (1) de $f(x)$ en aquests punts.

La figura següent mostra algunes sumes parcials d'aquesta sèrie, les corresponents a

$$\frac{1}{2} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\pi}\sin(2k\pi x),$$

per als valors $n = 1, 2, 3$ (indicats a les diferents corbes).



Forma complexa de la sèrie de Fourier

Si fem servir les fórmules d'Euler (vegeu l'apèndix A)

$$\cos\frac{k\pi x}{L} = \frac{1}{2}\left(e^{ik\pi x/L} + e^{-ik\pi x/L}\right), \quad \sin\frac{k\pi x}{L} = \frac{1}{2i}\left(e^{ik\pi x/L} - e^{-ik\pi x/L}\right),$$

podem reexpressar la igualtat

$$S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos\frac{k\pi x}{L} + b_k\sin\frac{k\pi x}{L}\right)$$

en la forma

$$\boxed{S(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ik\pi x/L}}$$

on

$$c_0 = \frac{a_0}{2}\,, \quad c_k = \frac{a_k - ib_k}{2}\,, \quad c_{-k} = \frac{a_k + ib_k}{2} = c_k^* \qquad (k = 1, 2, 3, \dots)$$

i el sumatori $\sum_{k=-\infty}^{+\infty}$ s'ha d'entendre com $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=-n}^{n}$.

La relació entre $S(x)$ i els coeficients c_k és

$$\boxed{c_k = \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} e^{-ik\pi x/L} S(x)\, dx} \qquad (k \in \mathbb{Z}),$$

que és conseqüència directa de les expressions que relacionen $S(x)$ amb a_k i b_k o, també, del fet que

$$\frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} e^{-ik\pi x/L} e^{i\ell\pi x/L} dx = \delta_{k\ell} \qquad (k, \ell \in \mathbb{Z}).$$

Els coeficients c_k són, en general, complexos. Són reals quan $S(x)$ és parella ($b_k = 0$) i són imaginaris quan $S(x)$ és imparella ($a_k = 0$).

Exemple: En el cas de la "dent de serra" tenim $c_0 = 1/2$ i $c_k = i/(2k\pi)$ i la sèrie de Fourier s'expressa

$$\frac{1}{2} + \sum_{\substack{k=-\infty \\ (k\neq 0)}}^{+\infty} \frac{i}{2k\pi} e^{i2k\pi x} = \cdots - \frac{ie^{-i6\pi x}}{6\pi} - \frac{ie^{-i4\pi x}}{4\pi} - \frac{ie^{-i2\pi x}}{2\pi}$$
$$+ \frac{1}{2} + \frac{ie^{i2\pi x}}{2\pi} + \frac{ie^{i4\pi x}}{4\pi} + \frac{ie^{i6\pi x}}{6\pi} + \cdots$$

Notem que només hem reexpressat la sèrie de Fourier de manera diferent. Per tant, si $f(x)$ és periòdica amb període $2L$ i és contínua a trossos, amb derivada també contínua a trossos, $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ik\pi x/L}$, amb $c_k = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} e^{-ik\pi x/L} f(x)\, dx$, convergeix *puntualment* cap a la funció $[f(x+0)+f(x-0)]/2$. D'altra banda, si $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k|$ és convergent i $f(x)$ és contínua, la sèrie convergeix *uniformement* cap a $f(x)$.

Interpretació geomètrica de la sèrie de Fourier
Si $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ik\pi x/L} = S(x)$ i fem $\phi_k(x) \stackrel{\text{def}}{=} e^{ik\pi x/L}$, tenim

$$\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} \big[\phi_k(x)\big]^* \phi_\ell(x)\, dx = \delta_{k\ell}\,,$$

i, també

$$S(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \phi_k(x), \quad c_k = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} \big[\phi_k(x)\big]^* S(x)\, dx,$$

que expressa $S(x)$ com a combinació lineal de les infinites funcions $\phi_k(x)$ que anomenarem "ones planes de freqüència k" i que formen un sistema de "vectors" ortonormals respecte del "producte escalar"

$$\langle f(x)|g(x)\rangle \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} \big[f(x)\big]^* g(x)\, dx,$$

ja que es compleix que $\langle \phi_k(x)|\phi_\ell(x)\rangle = \delta_{k\ell}$. Les diferents "components" c_k són, llavors, les "projeccions" de $S(x)$ sobre les diferents "ones planes" $\phi_k(x)$, és a dir,

$$c_k = \langle \phi_k(x)|S(x)\rangle.$$

Igualtat de Parseval
Si la funció real $S(x)$ és la suma de la sèrie $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k\phi_k(x)$ (en el supòsit que sigui convergent) i fem el "producte escalar" $\langle S(x)|S(x)\rangle$ tenim, d'una banda,

$$\langle S(x)|S(x)\rangle = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} S(x)^2\, dx,$$

i de l'altra, si fem servir la condició d'ortonormalitat $\langle \phi_k|\phi_\ell\rangle = \delta_{k\ell}$, tenim

$$\langle S(x)|S(x)\rangle = \Big\langle \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k\phi_k \Big| \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} c_\ell\phi_\ell \Big\rangle = \sum_{k,\ell=-\infty}^{\infty} {c_k}^* c_\ell \,\langle \phi_k|\phi_\ell\rangle = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k|^2.$$

Arribem, per tant, a la igualtat

$$\boxed{\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} S(x)^2\, dx \;=\; \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k|^2}$$

anomenada *igualtat de Parseval* que també podem expressar així

$$\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} S(x)^2 dx = |c_0|^2 + 2\sum_{k=1}^{+\infty} |c_k|^2 = \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{+\infty}(a_k^2 + b_k^2).$$

Notem que la igualtat de Parseval es compleix si $S(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k\phi_k(x)$. Tanmateix, si $f(x)$ és periòdica i contínua a trossos, amb derivada també contínua a trossos, la sèrie $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k\phi_k(x)$ convergeix cap a $S(x) = [f(x-0)+f(x+0)]/2$. Com que les integrals (sobre un període) de $f(x)^2$ i de $S(x)^2$ coincideixen, ja que les funcions $f(x)$ i $S(x)$ només són diferents en els punts de discontinuïtat de $f(x)$, la igualtat de Parseval es compleix també per a la funció $f(x)$.

EXEMPLE: En el cas de la "dent de serra" tenim

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)^2dx &= \frac{1}{2L}\int_{0}^{2L} f(x)^2dx = \int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3}\,,\\
\frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{+\infty}(a_k^2 + b_k^2) &= \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{(\pi k)^2}\,,
\end{aligned}$$

i la igualtat de Parseval s'expressa

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{(\pi k)^2}\,,$$

de la qual obtenim $\sum_{k=1}^{+\infty}(1/k^2) = \pi^2/6$.

8.5 Transformada de Fourier

Les sèries de Fourier permeten expressar funcions periòdiques com una suma infinita d'ones planes i també són aplicables a funcions no periòdiques definides en un interval finit $[a, b]$, ja que podem considerar-les com a part d'una funció periòdica de període $b - a$.

En canvi, les funcions no periòdiques definides a tot $\mathbb{R}$ no admeten la descomposició en *sèrie* de Fourier, però en alguns casos es poden expressar com una suma "contínua" (integral) d'ones planes. Això ens porta al concepte de *transformada de Fourier* de la qual fem una presentació breu, tot seguit.

Espectre d'una funció periòdica
Si $S(x)$ és una funció periòdica de període $2L$ i es compleix

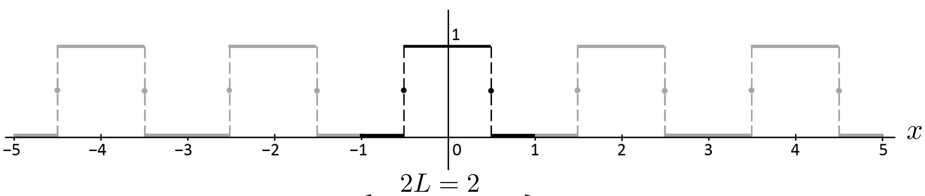
$$S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos\frac{k\pi x}{L} + b_k\sin\frac{k\pi x}{L}\right) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ik\pi x/L},$$

diem que la sèrie de Fourier anterior és la *descomposició espectral* de la funció $S(x)$, en analogia amb la descomposició espectral de la llum quan passa a través d'un prisma que la descompon en llums de diferents freqüències. El conjunt dels coeficients reals a_k i b_k (o, equivalentment, dels coeficients complexos c_k) s'anomena l'*espectre* de la funció $S(x)$. L'espectre és, doncs, el conjunt de les *amplituds* de les diferents ones planes en què es descompon la funció $S(x)$ i conté, per tant, tota la informació d'aquesta funció.

EXEMPLE: L'espectre de la "dent de serra" és $a_0 = 1$, $a_k = 0$ i $b_k = -1/k\pi$ (on $k = 1, 2, 3, \ldots$) o, també, $c_0 = 1/2$ i $c_k = i/2k\pi$ (on $k = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$).

Estudiem ara un altre exemple senzill. Considerem la funció

$$\begin{aligned} S(x) &= \begin{cases} 1 & \text{si } x \in (-1/2, 1/2), \\ 0 & \text{si } x \in (-1, -1/2) \cup (1/2, 1], \\ 1/2 & \text{en els punts } x = \pm 1/2, \end{cases} \\ S(x) &= S(x+2). \end{aligned}$$



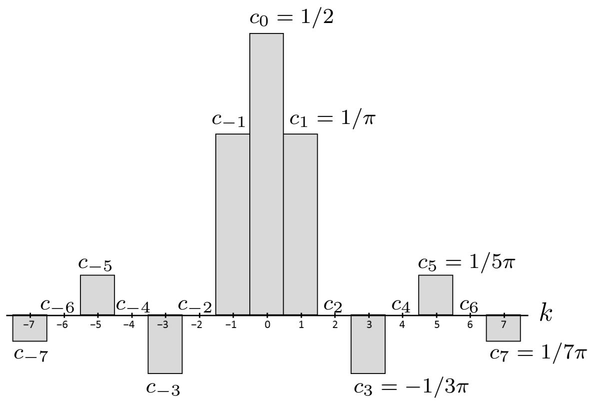
Aquesta funció coincideix amb la suma de la seva sèrie de Fourier, ja que el seu valor a les discontinuïtats és la mitjana dels límits laterals. És una funció parella, la qual cosa fa que les b_k siguin totes 0 i que les c_k siguin reals (i, també, que $c_k = c_{-k}$). El càlcul explícit dels coeficients de Fourier ens dona el seu espectre

$$c_0 = \frac{1}{2}, \qquad c_k = \frac{\sin(k\pi/2)}{k\pi} \quad (k = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots).$$

La sèrie de Fourier de $S(x)$ és, per tant,

$$\begin{aligned} S(x) = \cdots - \frac{e^{-i7\pi x}}{7\pi} + \frac{e^{-i5\pi x}}{5\pi} - \frac{e^{-i3\pi x}}{3\pi} + \frac{e^{-i\pi x}}{\pi} \\ + \frac{1}{2} + \frac{e^{i\pi x}}{\pi} - \frac{e^{i3\pi x}}{3\pi} + \frac{e^{i5\pi x}}{5\pi} - \frac{e^{i7\pi x}}{7\pi} + \cdots \end{aligned}$$

Podem representar gràficament l'espectre de $S(x)$ de la forma següent



on els diferents coeficients c_k (en aquest cas, reals) són les altures (i, també, les àrees) dels diferents rectangles.

Cal notar que, en general, encara que una $S(x)$ sigui real, si no és parella, els coeficients c_k són complexos i la representació gràfica de l'espectre requerirà dos gràfics, un per a les parts reals dels c_k i un altre per a les parts imaginàries (o, equivalentment, un per a les a_k i un altre per a les b_k).

Per "etiquetar" els diferents coeficients de l'espectre hem utilitzat la variable discreta k que és un nombre enter. Per fer més explícita la dependència de l'espectre respecte del període $2L$ és convenient utilitzar com a "etiqueta" una altra variable discreta que anomenarem y_k. En efecte, si definim

$$y_k \stackrel{\text{def}}{=} \frac{k\pi}{L}\,, \quad \Delta y_k \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\pi}{L}\,,$$

tenim

$$c_k = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} e^{-ik\pi x/L} S(x)\,dx = \frac{2\pi}{2L}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-L}^{L} e^{-iy_k x} S(x)\,dx\right] = \Delta y_k C(y_k),$$

on

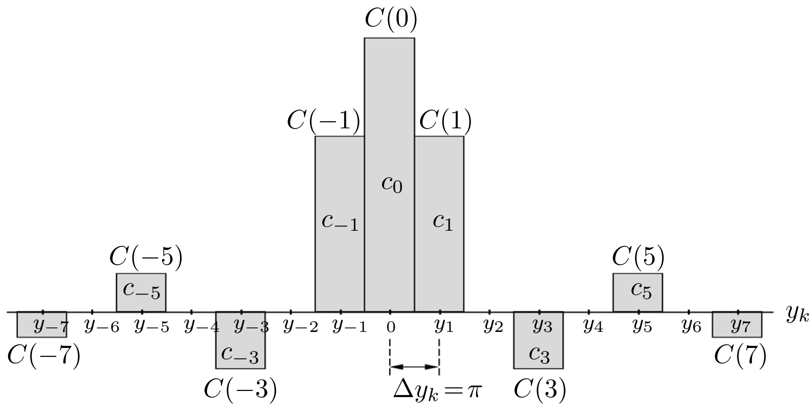
$$C(y_k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-L}^{L} e^{-iy_k x} S(x)\,dx.$$

La sèrie de Fourier de $S(x)$ es pot expressar en termes d'aquestes $C(y_k)$

$$S(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ik\pi x/L} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \Delta y_k C(y_k) e^{iy_k x},$$

i també podem expressar l'espectre en termes de la variable y_k. En l'exemple que estem considerant tenim $\Delta y_k = \pi$ (ja que $L = 1$). Per tant,

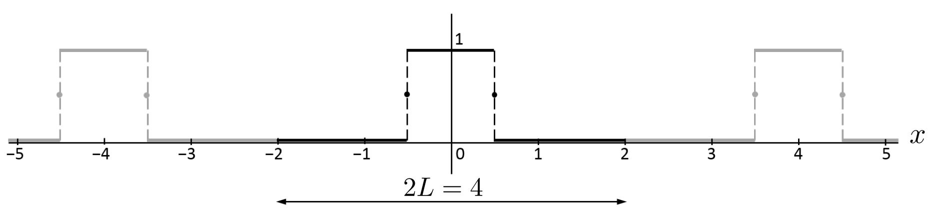
$$C(0) = \frac{1}{2\pi}\,, \qquad C(y_k) = \frac{\sin(k\pi/2)}{k\pi^2} \quad (k = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots)$$



Aquesta figura és molt semblant a l'anterior. La diferència és que ara els rectangles no tenen base 1 sinó Δy_k i les altures no són c_k sinó $C(y_k)$. No obstant això, les àrees no han canviat, ja que $c_k = \Delta y_k C(y_k)$.

L'avantatge de representar l'espectre així és que es fa més palesa la seva dependència respecte de L. A priori ja veiem que si L creix, els rectangles es fan més estrets. Observem-ho amb la següent modificació de l'exemple anterior: considerem la funció

$$
\begin{aligned}
S(x) &= \begin{cases} 1 & \text{si } x \in (-1/2, 1/2), \\ 0 & \text{si } x \in (-2, -1/2) \cup (1/2, 2], \\ 1/2 & \text{en els punts } x = \pm 1/2, \end{cases} \\
S(x) &= S(x+4).
\end{aligned}
$$



El període és ara el doble que abans ($L = 2$). El càlcul explícit dels coeficients de Fourier dona

$$
c_0 = \frac{1}{4}, \quad c_k = \frac{\sin(k\pi/4)}{k\pi} \qquad (k = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots)
$$

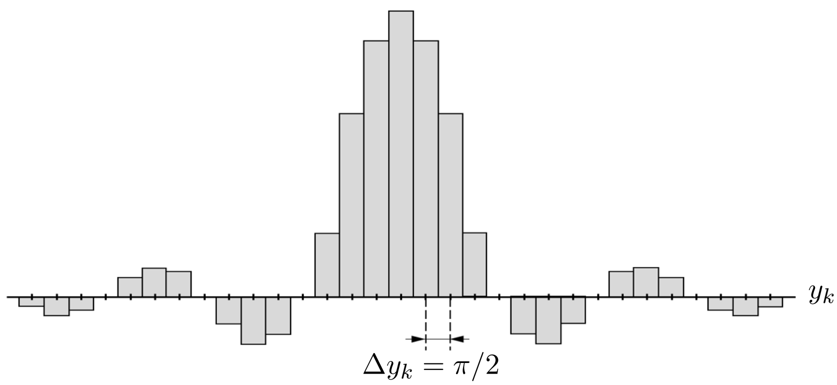
i la sèrie de Fourier de $S(x)$ és, per tant,

$$
\begin{aligned}
S(x) = \cdots &- \frac{e^{-i3\pi x}}{6\pi} - \frac{e^{-i5\pi x/2}}{5\sqrt{2}\pi} + \frac{e^{-i3\pi x/2}}{3\sqrt{2}\pi} + \frac{e^{-i\pi x}}{2\pi} + \frac{e^{-i\pi x/2}}{\sqrt{2}\pi} \\
&+ \frac{1}{4} + \frac{e^{i\pi x/2}}{\sqrt{2}\pi} + \frac{e^{i\pi x}}{2\pi} + \frac{e^{i3\pi x/2}}{3\sqrt{2}\pi} - \frac{e^{i5\pi x/2}}{5\sqrt{2}\pi} - \frac{e^{i3\pi x}}{6\pi} + \cdots
\end{aligned}
$$

Com que ara $\Delta y_k = \pi/2$, tenim

$$C(0) = \frac{1}{2\pi}, \qquad C(y_k) = \frac{2\sin(k\pi/4)}{k\pi^2} \quad (k = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots),$$

i l'espectre és



Els rectangles tenen ara la meitat de l'amplada, perquè el període s'ha doblat. D'això podem intuir que en el límit $L \to \infty$ (és a dir, $\Delta y_k \to 0$) la variable discreta y_k es convertirà en una variable contínua y.

L'espectre en el límit "període infinit"
Hem vist que

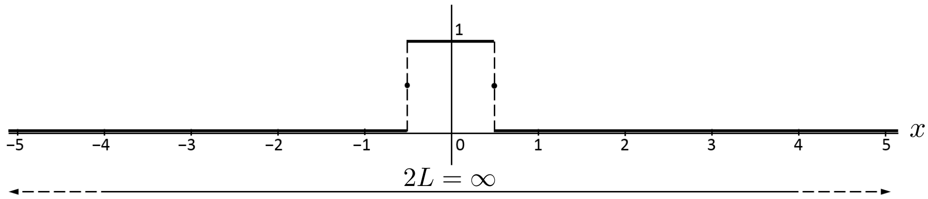
$$S(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \Delta y_k C(y_k) e^{i y_k x}, \quad C(y_k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-L}^{L} e^{-i y_k x} S(x)\, dx.$$

Si interpretem la sèrie de la primera igualtat com una suma de Riemann podem fer el límit $L \to \infty$ (és a dir, $\Delta y_k \to 0$) de les igualtats anteriors i obtenim

$$S(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} C(y) e^{iyx}\, dy, \quad C(y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iyx} S(x)\, dx.$$

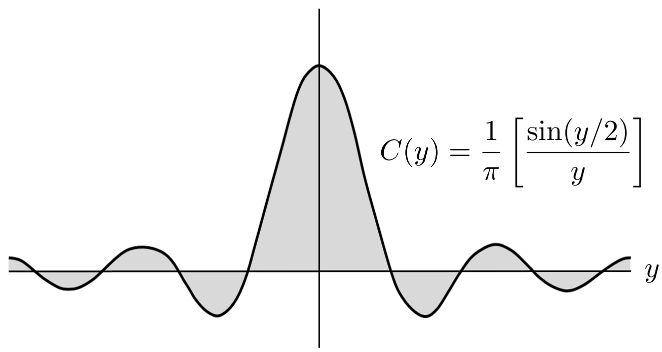
La primera igualtat expressa la funció $S(x)$ de període infinit (és a dir, no periòdica) com a combinació lineal *contínua* d'ones planes e^{iyx} etiquetades amb la variable contínua y. La segona igualtat ens dona els coeficients $C(y)$ d'aquesta combinació lineal contínua, en funció de $S(x)$. Observem-ho en l'exemple anterior reconvertit en una funció no periòdica. Considerem la funció

$$S(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in (-1/2, 1/2), \\ 0 & \text{si } x \in (-\infty, -1/2) \cup (1/2, \infty), \\ 1/2 & \text{en els punts } x = \pm 1/2. \end{cases}$$

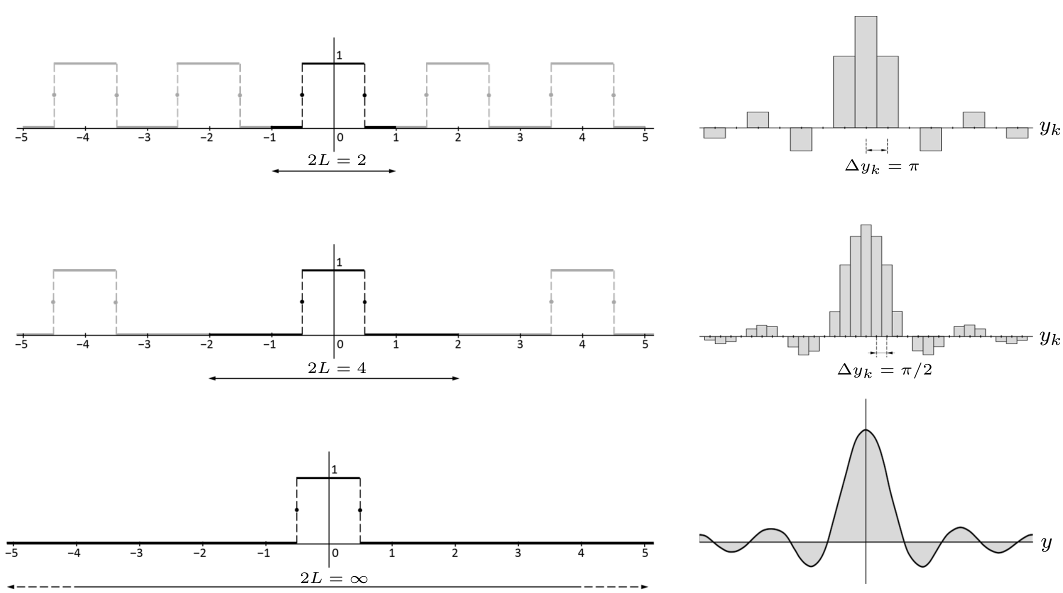


L'espectre de $S(x)$ és ara la funció

$$\begin{aligned} C(y) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iyx} S(x)\,dx \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-1/2}^{1/2} e^{-iyx}\,dx = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{e^{-iyx}}{-iy}\right]_{-1/2}^{1/2} = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin(y/2)}{y}\right]. \end{aligned}$$



Veiem, doncs, que l'espectre d'una funció no periòdica definida a tot $\mathbb{R}$ és *continu*. La figura següent resumeix l'exemple descrit



Notem que les igualtats

$$S(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} C(y)\, e^{iyx}\, dy, \quad C(y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iyx} S(x)\, dx,$$

es poden expressar d'una manera més simètrica si introduïm la funció

$$\widehat{S}(y) \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{2\pi}\, C(y),$$

ja que llavors tenim

$$S(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{S}(y)\, e^{iyx}\, dy\,, \quad \widehat{S}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} S(x)\, e^{-iyx}\, dx.$$

Aquestes igualtats ens porten a la definició de *transformada de Fourier*.

La transformada de Fourier

Si $f(x)$ és una funció no periòdica, localment integrable a $(-\infty, +\infty)$, s'anomena *transformada de Fourier* de $f(x)$ a la funció $\widehat{f}(y)$ definida per la integral impròpia (si existeix)

$$\boxed{\widehat{f}(y) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-iyx}\, dx \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{F}(f).}$$

Així doncs, la transformada de Fourier de f ens dona l'*espectre* de f (multiplicat per la constant $\sqrt{2\pi}$).

Cal notar que encara que $f(x)$ sigui una funció real, $\widehat{f}(y)$ és, en general, una funció de variable real que pren valors *complexos*. En altres paraules, l'espectre d'una funció real no periòdica és, en general, complex, en total analogia amb l'espectre, c_k, d'una funció periòdica. De fet, $\widehat{f}(y)$ és real quan $f(x)$ és parella, és imaginària quan $f(x)$ és imparella i és complexa en el cas general.

Com a aplicació entre funcions, la transformada de Fourier és lineal, és a dir,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(f+g) &= \mathcal{F}(f) + \mathcal{F}(g), \\ \mathcal{F}(kf) &= k\mathcal{F}(f), \qquad\qquad k \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Una condició suficient per a l'existència de $\widehat{f}(y)$ és que $f(x)$ sigui absolutament integrable a $(-\infty, +\infty)$, és a dir, que la integral (doblement impròpia) $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\, dx$ sigui convergent.

De manera similar, es defineix la *transformada de Fourier inversa* de $\widehat{f}(y)$ com la funció $\overline{f}(x)$ definida

$$\boxed{\overline{f}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(y) e^{iyx}\, dy \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{F}^{-1}(\widehat{f}).}$$

La funció $\overline{f}(x)$ és, per tant, una combinació lineal *contínua* d'ones planes $e^{iyx}/\sqrt{2\pi}$, etiquetades amb la variable contínua y, amb "components" (o "amplituds") donades per $\widehat{f}(y)$ i té, per tant, aquesta funció com a espectre.

L'exemple analitzat anteriorment i la paraula "inversa" semblen suggerir que les funcions $f(x)$ i $\overline{f}(x)$ són la mateixa funció, ja que tenen el mateix espectre $\widehat{f}(y)$, però no és exactament així. Encara que f tingui transformada de Fourier $\widehat{f}$, això no garanteix l'existència de $\overline{f}$ i, en cas d'existir, no necessàriament coincideix amb f. Quina relació es pot establir entre $\overline{f}$ i f? El teorema següent ens dona una resposta.

TEOREMA: Sigui $f(x)$ absolutament integrable a $(-\infty,+\infty)$ amb $f(x)$ i $f'(x)$ contínues a trossos (és a dir, només tenen un nombre finit de discontinuïtats de salt o evitables) i sigui $\widehat{f}(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-iyx}\,dx$, aleshores

$$\overline{f}(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\widehat{f}(y)e^{iyx}\,dy=\frac{1}{2}\big[f(x+0)+f(x-0)\big],$$

on $f(x\pm 0)$ són, respectivament, els límits per la dreta i per l'esquerra de la funció f en el punt x. Per tant, en els punts on f sigui contínua, tenim $\overline{f}(x)=f(x)$.

Ometem la demostració, que és bastant laboriosa.

Acabem amb algunes propietats de la transformada de Fourier:

- *Igualtat de Parseval:* Com en el cas de les sèries de Fourier, tenim la igualtat
$$\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|^2\,dx=\int_{-\infty}^{+\infty}|\widehat{f}(y)|^2\,dy.$$
- Si $\widehat{f}(y)$ és la transformada de Fourier de $f(x)$ i ho expressem $f(x)\xrightarrow{\mathcal{F}}\widehat{f}(y)$, tenim les correspondències següents:
$$\begin{aligned}
f(x+a) &\xrightarrow{\mathcal{F}} e^{iay}\widehat{f}(y),\\
e^{iax}f(x) &\to \widehat{f}(y-a),\\
f(\lambda x) &\to \frac{1}{|\lambda|}\widehat{f}\left(\frac{y}{\lambda}\right), \quad (\lambda\in\mathbb{R}),\\
f^*(x) &\to \widehat{f}^{\,*}(-y),\\
f'(x) &\to iy\widehat{f}(y),\\
xf(x) &\to i\widehat{f}^{\,\prime}(y),
\end{aligned}$$
que s'obtenen aplicant directament la definició.

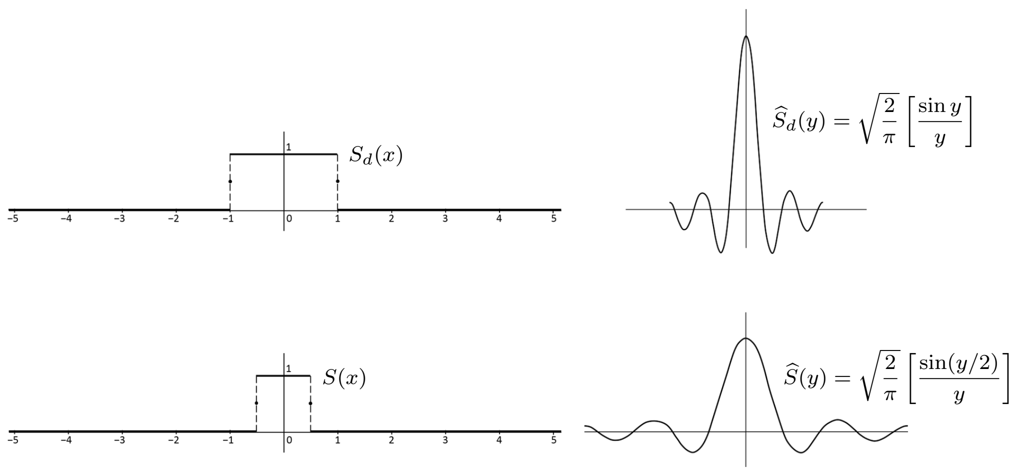
- Les amplades de les regions on $f(x)$ i $\widehat{f}(y)$ són “significativament” diferents de 0 són inversament proporcionals. En altres paraules, quan el gràfic de $f(x)$ està molt “localitzat”, el de la seva transformada de Fourier està molt “deslocalitzat” i a l’inrevés. Ho podem il·lustrar doblant l’amplada a l’exemple anterior. Si

$$S_d(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in (-1, 1), \\ 0 & \text{si } x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty), \\ 1/2 & \text{en els punts } x = \pm 1, \end{cases}$$

la transformada de Fourier d’aquesta funció és

$$\widehat{S}_d(y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[\frac{\sin y}{y} \right].$$

Gràficament,



Aquesta propietat és la base d’un important principi de la física, el *Principi d’incertesa* de Heisenberg.

8.6 Problemes

P8.1 Esbrineu si $\{f_n(x)\}$ convergeix puntualment o uniformement a $\mathbb{R}$ en els casos següents:

(a) $f_n(x) = \dfrac{x}{1 + nx^2}$ (b) $f_n(x) = \dfrac{1}{1 + nx^2}$

P8.2 Calculeu el radi de convergència de les sèries de potències següents:

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(2n)!}$

(b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^5 x^n}{n!}$

(c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(2x)^{2n+1}}{2n+1}$

(d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{5^n n^3}$

(e) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (\ln n)^{n/2} x^n$

(f) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt[3]{n}}$

P8.3 Si la sèrie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ té radi de convergència R, trobeu les regions on convergeixen absolutament les sèries següents:

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{x^n}$

(b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-1)^n$

(c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{(x-1)^n}$

(d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n (\ln x)^n$

(e) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n (\sin x)^n$

(f) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{nx}$

P8.4 Considereu la sèrie de potències $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{3^n n}$.

(a) Trobeu el seu radi de convergència.

(b) Determineu si també convergeix als extrems de l'interval de convergència.

(c) Trobeu la suma de la sèrie de les derivades.

(d) A partir del resultat anterior, trobeu la suma de la sèrie original.

P8.5 Considereu la funció periòdica

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 - |x|, \quad x \in [-1, 1), \\ f(x) &= f(x+2). \end{aligned}$$

(a) Trobeu la sèrie de Fourier associada.

(b) Feu-la servir al punt $x = 0$ per trobar la suma de la sèrie numèrica

$$1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \cdots$$

(c) Feu servir la igualtat de Parseval per obtenir la suma de

$$1 + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{7^4} + \cdots$$

P8.6 Calculeu la transformada de Fourier de $f(x) = e^{-x^2/2a^2}$.

Solucions

S8.1 (a) Tenim $f_n(x) \to 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Per tant, $f_n(x)$ convergeix punt a punt cap a la funció $f(x) = 0$. Per veure si també hi convergeix uniformement, notem que $f_n(x)$ pren els valors extrems a $x = \pm 1/\sqrt{n}$, on $f_n(\pm 1/\sqrt{n}) = \pm 1/(2\sqrt{n})$. Així doncs, donat $\varepsilon > 0$ tenim

$$|f_n(x) - f(x)| = \left| \frac{x}{1+nx^2} - 0 \right| \leq \frac{1}{2\sqrt{n}} < \varepsilon,$$

si $n > 1/(4\varepsilon^2)$, independentment del valor de x. Per tant, la convergència també és uniforme.

(b) Ara tenim $f_n(x) \to 0$, $\forall x \neq 0$, mentre que $f_n(0) \to 1$. Per tant, $f_n(x)$ convergeix punt a punt cap a la funció discontínua

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq 0, \\ 1 & \text{si } x = 0, \end{cases}$$

d'on ja podem deduir que la convergència no és uniforme, ja que les funcions $f_n(x)$ són contínues. Una altra manera de veure-ho és observant que donat $\varepsilon > 0$, sempre podem trobar un punt x en el qual

$$|f_n(x) - f(x)| = \left| \frac{1}{1+nx^2} - 0 \right| \geq \varepsilon.$$

Només cal que $x \leq \sqrt{\dfrac{1}{n}\left(\dfrac{1}{\varepsilon} - 1\right)}$.

S8.2 (a) $\left\{ \dfrac{|a_n|}{|a_{n+1}|} \right\} = \left\{ \dfrac{(2n+2)!}{(2n)!} \right\} = \{(2n+2)(2n+1)\} \to \infty.$
Per tant, $R = \infty$, és a dir, la sèrie convergeix $\forall x \in \mathbb{R}$.

(b) $\left\{ \dfrac{|a_n|}{|a_{n+1}|} \right\} = \left\{ \dfrac{n^5}{n!} \dfrac{(n+1)!}{(n+1)^5} \right\} = \left\{ (n+1) \left(\dfrac{n}{n+1} \right)^5 \right\} \to \infty.$
Per tant, $R = \infty$.

(c) Si fem $u = (2x)^2$ tenim

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(2x)^{2n+1}}{2n+1} = 2x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}u^n}{2n+1}.$$

El radi de convergència de la darrera sèrie és

$$R = \lim \left\{ \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} \right\} = \lim \left\{ \frac{2n+3}{2n+1} \right\} = 1,$$

i com que $|u| < 1 \Leftrightarrow |x| < 1/2$. La sèrie original té $R = 1/2$.

(d) $R = \lim \left\{ \dfrac{|a_n|}{|a_{n+1}|} \right\} = \lim \left\{ \dfrac{5^{n+1}(n+1)^3}{5^n n^3} \right\} = \lim \left\{ 5 \left(\dfrac{n+1}{n} \right)^3 \right\} = 5.$

(e) $R = \left[\lim \left\{ \sqrt[n]{|a_n|} \right\} \right]^{-1} = \left[\lim \left\{ (\ln n)^{1/2} \right\} \right]^{-1} = 0.$
Per tant, $R = 0$, és a dir, la sèrie només és convergent al punt $x = 0$.

(f) $R = \lim \left\{ \dfrac{|a_n|}{|a_{n+1}|} \right\} = \lim \left\{ \dfrac{\sqrt[3]{n+1}}{\sqrt[3]{n}} \right\} = 1.$

S8.3 (a) $|1/x| < R \Leftrightarrow |x| > 1/R$.

(b) $|x-1| < R \Leftrightarrow x \in (1-R, 1+R)$.

(c) $|x-1| > 1/R \Leftrightarrow x \in \left(-\infty, 1-\frac{1}{R}\right) \cup \left(1+\frac{1}{R}, +\infty\right)$.

(d) $|\ln x| < R \Leftrightarrow \ln x \in (-R, R) \Leftrightarrow x \in (e^{-R}, e^{R})$.

(e) $|\sin x| < R \Leftrightarrow \sin x \in (-R, R)$. A tot $\mathbb{R}$ si $R \geq 1$.

(f) $e^x < R \Leftrightarrow x < \ln R$.

S8.4 (a) $R = \lim \left\{ \dfrac{3^{n+1}(n+1)}{3^n n} \right\} = 3.$

(b) L'interval de convergència és $(-1-3, -1+3) = (-4, 2)$.
En el punt $x = -4$ tenim $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n}{3^n n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$, que és convergent (sèrie harmònica alternada).
En el punt $x = 2$ tenim $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{3^n n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, que és divergent (sèrie harmònica).

(c) La sèrie de les derivades és

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^{n-1}}{3^n} = \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{3^n}.$$

La sèrie del costat dret és la sèrie geomètrica, que és convergent quan $|(x+1)/3| < 1$, és a dir, quan x és dins de l'interval de convergència $(-4, 2)$. Com que $\sum_{n=0}^{\infty} r^n = 1/(1-r)$, si $|r| < 1$, tenim

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^{n-1}}{3^n} = \frac{1}{3} \frac{1}{1 - \left(\frac{x-1}{3}\right)} = \frac{1}{2-x}, \qquad x \in (-4, 2).$$

(d) Si integrem terme a terme des de $x = -1$ fins a x recuperem la sèrie original i, per tant, el mateix passa amb la seva suma. Així doncs,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{3^n n} = \int_{-1}^{x} \frac{1}{2-t}\, dt = [-\ln(2-t)]_{-1}^{x} = \ln\left(\frac{3}{2-x}\right).$$

S8.5 (a) Com que la funció és parella, tenim

$$
\begin{aligned}
b_k &= 0, \quad k = 1, 2, 3, \ldots \\
a_0 &= \int_{-1}^{1} f(x)\,dx = 2\int_0^1 f(x)\,dx = 2\int_0^1 (1-x)\,dx = 1, \\
a_k &= 2\int_0^1 (1-x)\,\cos(k\pi x)\,dx \\
&= \left[2(1-x)\,\frac{\sin(k\pi x)}{k\pi}\right]_0^1 - 2\int_0^1 \frac{\sin(k\pi x)}{k\pi}\,(-dx) \\
&= \left[2(1-x)\,\frac{\sin(k\pi x)}{k\pi} - 2\,\frac{\cos(k\pi x)}{(k\pi)^2}\right]_0^1 = 2\,\frac{1-(-1)^k}{k^2\pi^2}\,.
\end{aligned}
$$

La sèrie de Fourier és, doncs,

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2} + 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{[1-(-1)^k]}{k^2\pi^2}\,\cos(k\pi x) \\
&= \frac{1}{2} + \frac{4}{\pi^2}\sum_{k \text{ senar}} \frac{\cos(k\pi x)}{k^2} = \frac{1}{2} + \frac{4}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos[(2k-1)\pi x]}{(2k-1)^2} \\
&= \frac{1}{2} + \frac{4}{\pi^2}\left(\frac{\cos(\pi x)}{1^2} + \frac{\cos(3\pi x)}{3^2} + \frac{\cos(5\pi x)}{5^2} + \cdots\right) \\
&= f(x),
\end{aligned}
$$

ja que $f(x)$ és contínua a tot arreu.

(b) Si fem $x = 0$ a la igualtat anterior tenim

$$
f(0) = 1 = \frac{1}{2} + \frac{4}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos 0}{(2k-1)^2}\,,
$$

és a dir,

$$
\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}\,.
$$

(c) En aquest cas, la igualtat de Parseval s'expressa $\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)^2\,dx = \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2$. D'una banda tenim

$$
\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)^2\,dx = \int_0^1 f(x)^2\,dx = \int_0^1 (1-x)^2\,dx = \frac{1}{3}\,,
$$

i de l'altra,

$$
\frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 = \frac{1}{4} + \frac{8}{\pi^4}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^4}\,.
$$

Per tant,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^4} = \frac{\pi^4}{96}\,.$$

S8.6

$$\widehat{f}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2a^2} e^{-ixy}\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(\frac{x^2}{2a^2}+ixy\right)}\, dx.$$

Si "completem quadrats" a l'exponent tenim

$$-\left(\frac{x^2}{2a^2} + ixy\right) = -\left(\frac{x}{\sqrt{2}a} + \frac{iay}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{iay}{\sqrt{2}}\right)^2.$$

Per tant,

$$\begin{aligned}\widehat{f}(y) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-a^2y^2/2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(\frac{x}{a\sqrt{2}}+\frac{iay}{\sqrt{2}}\right)^2} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-a^2y^2/2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\sqrt{2}a\, dt = \boxed{a\, e^{-a^2y^2/2}},\end{aligned}$$

on hem fet el canvi $t = \left(\frac{x}{a\sqrt{2}} + \frac{iay}{\sqrt{2}}\right) \Leftrightarrow x = a\sqrt{2}\left(t - \frac{iay}{\sqrt{2}}\right)$, $dx = a\sqrt{2}\, dt$, i hem fet servir que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$.

Veiem, doncs, que la transformada de Fourier d'una gaussiana és una altra gaussiana. El paràmetre a mesura l'amplada de la gaussiana $e^{-x^2/2a^2}$, ja que el seu valor és petit quan $|x| \gg a$ i és gran quan $|x| \simeq a$. Observem que la quantitat $1/a$ juga el mateix paper a la gaussiana transformada. Això vol dir que si a es fa petit, $f(x)$ s'estreny i $\widehat{f}(y)$ s'eixampla, i quan a es fa gran passa el contrari. En qualsevol cas, el producte de les "amplades" de $f(x)$ i $\widehat{f}(y)$ es manté fix.

En el límit $a \to \infty$ la funció $f(x)$ esdevé la funció constant 1 i la funció $\widehat{f}(y)$ esdevé infinitament estreta i alta (la "funció" δ de Dirac, que no és una funció sinó una *distribució*).

Finalment, notem que quan $a = 1$ la transformada de Fourier de $f(x)$ és ella mateixa

$$f(x) = e^{-x^2/2} \xrightarrow{\text{T. Fourier}} \widehat{f}(y) = e^{-y^2/2}.$$

A Nombres complexos

A.1 Cos $\mathbb{C}$ dels nombres complexos

El conjunt $\mathbb{R}$ dels nombres reals és un cos ordenat arquimedià complet (és l'únic amb aquestes propietats), però té una limitació, no existeixen les arrels quadrades (en general, les arrels d'índex parell) dels nombres reals negatius. La solució d'aquesta limitació requereix una ampliació de $\mathbb{R}$: els nombres complexos.

Cos dels nombres complexos
Considerem el conjunt $\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) \,|\, x, y \in \mathbb{R}\}$. Expressem els seus elements amb $z = (x, y)$ i definim les operacions

Suma: $z + z' = (x, y) + (x', y') \stackrel{\text{def}}{=} (x + x', y + y')$.
Producte: $z \cdot z' = (x, y) \cdot (x', y') \stackrel{\text{def}}{=} (xx' - yy', xy' + x'y)$.

Amb aquestes operacions $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ és un cos (el *cos dels nombres complexos*), ja que

- $(\mathbb{C}, +)$ és grup abelià:

  $+$ és associativa,

  $+$ és commutativa,

  hi ha un element neutre: $\mathbf{0} = (0, 0)$,

  cada element $z = (x, y)$ té simètric: $-z = (-x, -y)$.

- $(\mathbb{C} - \{\mathbf{0}\}, \cdot)$ és grup abelià:

  $\cdot$ és associativa,

  $\cdot$ és commutativa,

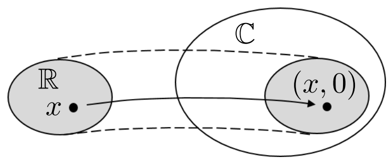
  hi ha un element neutre: $\mathbf{1} = (1, 0)$,

  cada element $z = (x, y) \neq \mathbf{0}$ té simètric: $z^{-1} = (\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2})$.

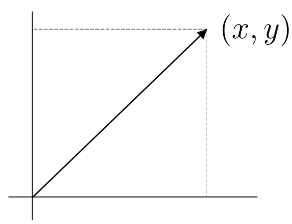
- $\cdot$ és distributiu respecte de $+$.

Normalment escrivim $0, 1, z' - z, zz', 1/z$ i z'/z en lloc de $\mathbf{0}, \mathbf{1}, z' + (-z), z \cdot z', z^{-1}$ i $z'z^{-1}$.

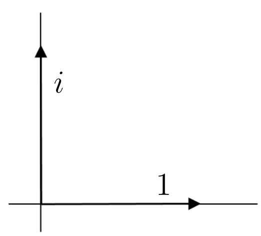
$\mathbb{C}$ conté $\mathbb{R}$
Podem identificar els nombres complexos de la forma $(x, 0)$ amb els nombres reals, ja que $(x, 0) + (x', 0) = (x + x', 0)$ i $(x, 0) \cdot (x', 0) = (xx', 0)$, és a dir, l'aplicació $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ que transforma $x \to (x, 0)$ és un homomorfisme injectiu. $\mathbb{R}$ és, per tant, un subcòs de $\mathbb{C}$.



Producte d'un nombre real per un nombre complex
Si $\lambda \in \mathbb{R}$ i $z = (x, y) \in \mathbb{C}$, tenim que $\lambda z = (\lambda, 0)(x, y) = (\lambda x, \lambda y)$. Aquest fet, juntament amb la forma com se sumen dos nombres complexos, fa que el conjunt $\mathbb{C}$ tingui també l'estructura d'espai vectorial de dimensió 2 sobre $\mathbb{R}$ i que puguem visualitzar el complex (x, y) com un vector d'un pla real que anomenem *pla complex*. Notem que la suma de complexos segueix la *regla del paral·lelogram*), però els vectors d'aquest pla també es poden multiplicar. Els nombres reals se situen a l'eix horitzontal ("eix real") del pla complex.



La "unitat imaginària"
Representem per i el complex $i = (0, 1)$ i l'anomenem unitat imaginària.



El nombre complex i té la propietat:

$$\boxed{i^2 = -1,}$$

ja que $i^2 = (0, 1)(0, 1) = (-1, 0) = -1$, és a dir, i és l'arrel quadrada del nombre real -1. El problema de l'arrel quadrada dels nombres reals negatius queda, doncs, resolt perquè si a és un nombre real positiu, $i\sqrt{a}$ és l'arrel quadrada de $-a$, ja que $(i\sqrt{a})^2 = i^2 a = -a$. Més endavant veurem que el problema de l'arrel (no només quadrada) queda resolt completament a $\mathbb{C}$.

$\mathbb{C}$ no és un cos ordenat

TEOREMA: El cos $\mathbb{C}$ no admet cap ordenació $\leq$ que compleixi

P1) $z \leq z' \Rightarrow z + w \leq z' + w$.

P2) $z, z' \geq \mathbf{0} \Rightarrow zz' \geq \mathbf{0}$.

DEMOSTRACIÓ: si aquesta ordenació existís, tindríem $i > \mathbf{0}$ o $i < \mathbf{0}$. En ambdós casos arribaríem a una contradicció:

$$i > \mathbf{0} \overset{P2)}{\Rightarrow} i^2 = -1 > \mathbf{0} \left\{ \begin{array}{ll} \overset{P1)}{\Rightarrow} & \mathbf{0} > 1 \\ \overset{P2)}{\Rightarrow} & (-1)^2 = 1 > \mathbf{0} \end{array} \right\} \text{(contradicció)}$$

$$i < \mathbf{0} \overset{P1)}{\Rightarrow} -i > \mathbf{0} \overset{P2)}{\Rightarrow} (-i)^2 = -1 > \mathbf{0} \Rightarrow \ldots \text{ (contradicció).} \quad \diamondsuit$$

$\mathbb{C}$ no és, doncs, un cos ordenat. No tenim, per tant, nombres complexos positius ni negatius. De fet, no podem posar els símbols $>, \geq, <$ o $\leq$ entre nombres complexos.

Parts real i imaginària d'un nombre complex

Si $z = (x, y)$, anomenem *part real* de z a la seva primera component x i *part imaginària* de z a la seva segona component y. Ho expressem

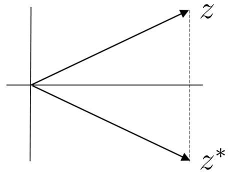
$$x = \mathrm{Re}(z), \quad y = \mathrm{Im}(z).$$

Tant $\mathrm{Re}(z)$ com $\mathrm{Im}(z)$ són nombres reals.

Els nombres reals són els complexos que tenen la part imaginària nul·la. D'altra banda, els nombres complexos que tenen la part real nul·la s'anomenen nombres complexos *imaginaris*. Són els de la forma $(0, y)$ i s'escriuen també iy, ja que $(0, y) = y(0, 1)$. A diferència del que passa amb els nombres reals, els imaginaris no tenen estructura de cos, ja que el producte no és intern (el producte de dos imaginaris és real). Els nombres imaginaris se situen a l'eix vertical ("eix imaginari") del pla complex.

Conjugat d'un nombre complex

Si $z = (x, y)$, el seu *conjugat* és $z^* = \overline{z} = (x, -y)$.



Es compleix

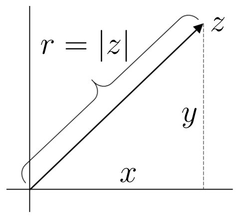
$$\begin{array}{llll} (z^*)^* = z, & (z \pm z')^* = z^* \pm z'^*, & (zz')^* = z^* z'^*, & (z/z')^* = z^*/z'^*, \\ z + z^* = 2\mathrm{Re}(z), & z - z^* = i2\mathrm{Im}(z), & zz^* = x^2 + y^2 = \mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2 \in \mathbb{R}, & \\ & z = z^* \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}, & z = -z^* \Leftrightarrow z \text{ és imaginari.} & \end{array}$$

Mòdul d'un nombre complex

El *mòdul* d'un nombre complex $z = (x, y)$ és el nombre real

$$r \equiv |z| \stackrel{\text{def}}{=} +\sqrt{zz^*} = +\sqrt{x^2 + y^2} = +\sqrt{\mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2}.$$

Quan z és real, el seu mòdul és el seu valor absolut. Per tant, el mòdul estén a tot $\mathbb{C}$ el concepte de valor absolut definit a $\mathbb{R}$. Geomètricament, el mòdul és la "llargada" del "vector" z.



Propietats del mòdul:

1) $|z| > 0$ si $z \neq \mathbf{0}$,
2) $|\mathbf{0}| = 0$,
3) $|zz'| = |z| \cdot |z'| \quad (\Rightarrow\ |1/z| = 1/|z|)$,
4) $|z + z'| \leq |z| + |z'|$.

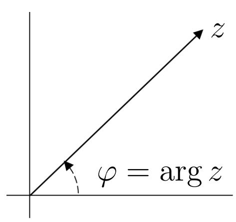
Tenim també

$$|\mathrm{Re}(z)|, |\mathrm{Im}(z)| \leq |z| \leq |\mathrm{Re}(z)| + |\mathrm{Im}(z)|,$$

ja que $|x|, |y| \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq |x| + |y|$.

Argument d'un nombre complex

L'*argument* d'un nombre complex $z = (x, y)$ és l'angle φ que forma el "vector" z amb l'eix real positiu, mesurat en el sentit trigonomètric positiu ("antihorari").



Un nombre complex té, de fet, una infinitat d'arguments que difereixen entre ells en múltiples enters de 2π, però només un d'ells, l'*argument principal* $\mathrm{Arg}\, z$ (amb majúscula), és a l'interval $(-\pi, \pi]$ (de vegades pot ser convenient definir-lo a l'interval $[0, 2\pi)$). Tenim

$$\mathrm{Arg}\, z = \arctan \frac{y}{x} + k\pi,$$

on $k = 0$ si z és al primer o quart quadrant, $k = 1$ si és al segon i $k = -1$ si és al tercer. Òbviament es compleix que $\mathrm{Arg}\, z^* = -\mathrm{Arg}\, z$.

Exemple: el mòdul i l'argument principal de $z = (-1, -\sqrt{3})$ són

$$\begin{aligned} |z| &= \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{-3})^2} = \sqrt{4} = 2, \\ \operatorname{Arg} z &= \arctan \frac{(-\sqrt{3})}{(-1)} - \pi = \frac{\pi}{3} - \pi = -\frac{2\pi}{3}, \end{aligned}$$

ja que z és al tercer quadrant.

Distància entre nombres complexos
La *distància* entre z i z' és

$$d(z, z') \stackrel{\text{def}}{=} |z - z'| = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2} = \sqrt{d(x, x')^2 + d(y, y')^2},$$

que coincideix amb la distància entre nombres reals quan z i z' són reals.

Propietats de la distància:

1) $d(z, z') > 0$ si $z \neq z'$,
2) $d(z, z) = 0$,
3) $d(z, z') = d(z', z)$,
4) $d(z, z') \leq d(z, z'') + d(z'', z')$.

Tenim també

$$d(x, x'), d(y, y') \leq d(z, z') \leq d(x, x') + d(y, y'),$$

i, per tant,

$$d(z, z') \to 0 \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} d(x, x') \to 0, \\ d(y, y') \to 0. \end{cases}$$

A.2 Expressió dels nombres complexos

Forma *binomial* d'un nombre complex
El nombre complex $z = (x, y)$ es pot expressar $(x, y) = x(1, 0) + y(0, 1) = x1 + yi$, és a dir,

$$\boxed{z = x + iy} \qquad \text{(forma } \textit{binomial} \text{ de } z\text{)}.$$

Notem que

$$(x, y) + (x', y') = (x + iy) + (x' + iy') = (x + x') + i(y + y') = (x + x', y + y'),$$

$$\begin{aligned} (x, y)(x', y') &= (x + iy)(x' + iy') = xx' + i(xy' + x'y) + i^2 yy' \\ &= (xx' - yy') + i(xy' + x'y) = (xx' - yy', xy' + x'y). \end{aligned}$$

Veiem, doncs, que funciona la "recepta" següent:

Recepta: Es pot tractar i com si fos una variable real, però tenint en compte la "propietat" $i^2 = -1$.

Aquesta recepta ens servirà per definir les funcions elementals dels nombres complexos.

Forma *trigonomètrica* d'un nombre complex

Si fem servir coordenades polars, la forma binomial del nombre complex $x+iy$ es pot reexpressar en termes del mòdul r i de l'argument φ de z, ja que $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$

$$\boxed{z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} \qquad \text{(forma } \textit{trigonomètrica} \text{ de } z).$$

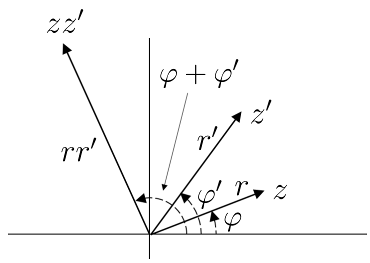
La forma trigonomètrica ens dona una interpretació geomètrica del producte de dos nombres complexos. En efecte, si $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ i $z' = r'(\cos\varphi' + i\sin\varphi')$ tenim

$$\begin{aligned} zz' &= rr'(\cos\varphi + i\sin\varphi)(\cos\varphi' + i\sin\varphi') \\ &= rr'[(\cos\varphi\cos\varphi' - \sin\varphi\sin\varphi') + i(\sin\varphi\cos\varphi' + \cos\varphi\sin\varphi')] \\ &= rr'[\cos(\varphi+\varphi') + i\sin(\varphi+\varphi')], \end{aligned}$$

és a dir,

$$|zz'| = rr' = |z|\,|z'|, \quad \arg\,(zz') = \varphi + \varphi' = \arg(z) + \arg(z').$$

El mòdul del producte és el *producte* dels mòduls.
L'argument del producte és la *suma* dels arguments.



En particular, si $n \in \mathbb{N}$ tenim

$$|z^n| = r^n, \quad \arg(z^n) = n\varphi.$$

Per tant, si elevem a la potència n el nombre complex de mòdul $\sqrt[n]{r}$ i argument φ/n, obtenim z la qual cosa ens indica que no hi ha cap problema en trobar l'arrel n-èsima d'un nombre complex (ni, per tant, d'un nombre real). El problema de l'arrel queda, doncs, completament resolt a $\mathbb{C}$. Aquesta propietat és visualment més clara si expressem z en forma *polar*, una variant molt més compacta, manipulable i útil de la forma trigonomètrica.

Forma *polar* d'un nombre complex
Comencem definint l'exponencial d'un nombre imaginari, $e^{i\varphi}$, on $\varphi \in \mathbb{R}$. Per fer-ho, apliquem la "recepta" (manipular i com si fos real però recordant que $i^2 = -1$) a la sèrie de potències de $e^{i\varphi}$

$$\begin{aligned} e^{i\varphi} &= 1 + \frac{i\varphi}{1!} + \frac{(i\varphi)^2}{2!} + \frac{(i\varphi)^3}{3!} + \cdots \\ &= \left(1 - \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^4}{4!} - \cdots\right) + i\left(\varphi - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} - \cdots\right) = \cos\varphi + i\sin\varphi. \end{aligned}$$

Llavors *definim*

$$\boxed{e^{i\varphi} \stackrel{\text{def}}{=} \cos\varphi + i\sin\varphi.}$$

Amb aquesta definició el nombre complex $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ s'expressa

$$\boxed{z = re^{i\varphi}} \qquad \text{(forma } \textit{polar} \text{ de } z).$$

Notem que la forma polar és perfectament compatible amb la "recepta", ja que si $z = re^{i\varphi}$ i $z' = r'e^{i\varphi'}$, i manipulem les exponencials com si fossin reals, obtenim

$$zz' = re^{i\varphi}r'e^{i\varphi'} = rr'e^{i(\varphi+\varphi')}, \quad z^n = \left(re^{i\varphi}\right)^n = r^n e^{in\varphi}.$$

Amb la forma polar arribem als resultats següents:

1) Les arrels n-èsimes d'un nombre complex
D'acord amb l'última igualtat, donat un nombre complex $z = re^{i\varphi}$, sempre en podem trobar un altre $w = \rho e^{i\alpha}$ tal que $w^n = z$. Només cal prendre $\rho = \sqrt[n]{r}$ i $\alpha = \varphi/n$. El nombre complex $w = \sqrt[n]{r}e^{i(\varphi/n)}$ és l'arrel n-èsima de z.

Però, de fet, n'hi ha més d'arrels n-èsimes perquè z té infinits arguments $\varphi + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Cada cop que augmentem o disminuïm φ en 2π, l'argument de w augmenta o disminueix en $2\pi/n$. Hi ha, doncs, n arrels n-èsimes de z diferents

$$\boxed{\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}e^{i(\varphi+2\pi k)/n}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1.}$$

Exemple: Busquem les arrels cúbiques de $z = -8$. Si expressem z en forma polar tenim $z = 8e^{i(\pi+2\pi k)}$ i, per tant,

$$(-8)^{1/3} = \left[8e^{i(\pi+2\pi k)}\right]^{1/3} = 2e^{i(\pi+2\pi k)/3},$$

on $k = 0, 1, 2$. Les tres arrels cúbiques de $z = -8$ són, doncs,

$$\begin{aligned} &2e^{i(\pi/3)} = 2\left(\cos(\pi/3) + i\sin(\pi/3)\right) = 1 + i\sqrt{3}, \\ &2e^{i(3\pi/3)} = 2e^{i\pi} = -2, \\ &2e^{i(5\pi/3)} = 2e^{i(-\pi/3)} = 1 - i\sqrt{3}. \end{aligned}$$

2) Fórmules d'Euler

Si aïllem $\cos\varphi$ i $\sin\varphi$ a les igualtats $e^{\pm i\varphi} = \cos\varphi \pm i\sin\varphi$ obtenim

$$\boxed{\cos\varphi = \frac{e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}}{2}, \quad \sin\varphi = \frac{e^{i\varphi}-e^{-i\varphi}}{2i}} \qquad \text{(Fórmules d'Euler).}$$

3) Fórmula de De Moivre

Si elevem a n ($n \in \mathbb{N}$) la igualtat $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$ tenim

$$\boxed{(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \left(e^{i\varphi}\right)^n = e^{in\varphi} = \cos n\varphi + i\sin n\varphi} \quad \text{(F. de De Moivre).}$$

Aquesta fórmula ens dona $\cos n\varphi$ i $\sin n\varphi$ en termes de $\cos\varphi$ i $\sin\varphi$:

$$\cos n\varphi = \operatorname{Re}[(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n], \quad \sin n\varphi = \operatorname{Im}[(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n].$$

EXEMPLE: Expressem $\cos(3\varphi)$ i $\sin(3\varphi)$ en funció de $\cos\varphi$ i $\sin\varphi$.

$$\begin{aligned}\cos(3\varphi) + i\sin(3\varphi) &= e^{i3\varphi} = (e^{i\varphi})^3 = (\cos\varphi + i\sin\varphi)^3 \\ &= \cos^3\varphi + 3i\cos^2\varphi\sin\varphi + 3i^2\cos\varphi\sin^2\varphi + i^3\sin^3\varphi \\ &= \left[\cos^3\varphi - 3\cos\varphi\sin^2\varphi\right] + i\left[3\cos^2\varphi\sin\varphi - \sin^3\varphi\right]\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \ \cos(3\varphi) = \cos^3\varphi - 3\cos\varphi\sin^2\varphi\,; \ \sin(3\varphi) = 3\cos^2\varphi\sin\varphi - \sin^3\varphi.$$

4) Curiositat

Si fem $\varphi = \pi$ obtenim $\boxed{e^{i\pi} + 1 = 0}$ que relaciona e, i, π, 1 i 0.

A.3 Successions de nombres complexos

Una successió de nombres complexos és una aplicació de $\mathbb{N}$ sobre $\mathbb{C}$

$$\begin{array}{ccc}\mathbb{N} & \to & \mathbb{C} \\ n & \to & z_n = x_n + iy_n\end{array}$$

que representem per $\{z_n\} = \{z_1, z_2, z_3, \ldots\} = \{x_1 + iy_1, x_2 + iy_2, x_3 + iy_3, \ldots\}$.

Successió convergent

La successió $\{z_n\}$ és convergent i escriurem $\lim\{z_n\} = w$ o, també, $\{z_n\} \to w$ si

$$\forall\varepsilon > 0 \ (\varepsilon \in \mathbb{R}),\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tal que } d(z_n, w) < \varepsilon,\ \forall n > n_0,$$

o, equivalentment, $\{z_n\} \to w$ si $\lim\{d(z_n, w)\} = 0$. Notem que

$$\{z_n\} \to w \ \Leftrightarrow \ \left\{\begin{array}{l}\{x_n\} \to \operatorname{Re}(w), \\ \{y_n\} \to \operatorname{Im}(w),\end{array}\right.$$

és a dir, una successió de nombres complexos és convergent si i només si les successions de les parts reals i la de les parts imaginàries són convergents.

Successió de Cauchy
La successió $\{z_n\}$ és de Cauchy si

$$\forall\varepsilon > 0\ (\varepsilon \in \mathbb{R}),\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tal que } d(z_n, z_m) < \varepsilon,\ \forall n, m > n_0.$$

Notem que

$$\{z_n\} \text{ de Cauchy} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \{x_n\} \text{ de Cauchy} \\ \{y_n\} \text{ de Cauchy} \end{cases}$$

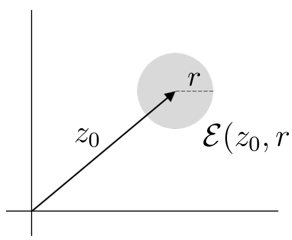
és a dir, una successió de nombres complexos és de Cauchy si i només si les successions de les seves parts reals i la de les seves parts imaginàries també ho són. Però aquestes són successions de Cauchy de nombres reals i són, per tant, convergents, ja que $\mathbb{R}$ és complet. Això fa que les successions de Cauchy de nombres complexos siguin també convergents, és a dir, $\mathbb{C}$ també és complet.

A.4 Topologia de $\mathbb{C}$

Les definicions i propietats són idèntiques que en el cas de $\mathbb{R}$:

· *Entorn* de centre z_0 i radi r: $\mathcal{E}(z_0, r) = \{z \mid d(z, z_0) < r\}$.

· *Entorn perforat*: $\mathcal{E}(z_0, r) - \{z_0\} = \{z \mid 0 < d(z, z_0) < r\}$.



· Punt z_0 *interior* a un conjunt A: si hi ha *algun* entorn $\mathcal{E}(z_0, r) \subset A$.

· Punt z_0 *exterior* a A: si és interior al complementari de A ($\overline{A} = \mathbb{C} - A$).

· Punt z_0 *frontera* de A: si no és interior ni exterior ($\Leftrightarrow$ *tot* entorn de z_0 conté elements de A i elements de $\overline{A}$).

· Punt z_0 d'*acumulació* de A: si *tot* entorn *perforat* de z_0 conté elements de A.

· Conjunt *obert*: si tots els seus punts són interiors.

· Conjunt *tancat*: si conté els seus punts d'acumulació ($\Leftrightarrow$ el seu complementari és obert).

· Conjunt *fitat*: si està contingut en algun entorn de $\mathbf{0}$ ($\Leftrightarrow$ el conjunt dels mòduls dels seus elements és fitat superiorment).

· Conjunt *compacte*: si tota successió conté alguna successió parcial convergent ($\Leftrightarrow$ és tancat i fitat).

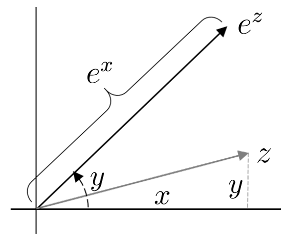
A.5 Funcions elementals

Estenem a $\mathbb{C}$ les funcions elementals definides a $\mathbb{R}$. Les definicions es fan sempre forçant la validesa de la "recepta".

Funció exponencial
Si $z = x + iy$ i usem la "recepta" tenim $e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$. Així doncs, *definim*

$$\boxed{e^z \stackrel{\text{def}}{=} e^x(\cos y + i \sin y).}$$

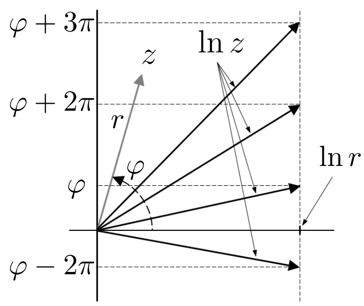
Tenim, doncs, $|e^z| = e^x = e^{\mathrm{Re}(z)}$, $\arg(e^z) = y = \mathrm{Im}(z)$.



Funció logarítmica
Si $z = e^{i\varphi}$ i usem la "recepta" tenim $\ln z = \ln(re^{i\varphi}) = \ln r + \ln(e^{i\varphi}) = \ln r + i\varphi$. Així doncs, *definim*

$$\boxed{\ln z \stackrel{\text{def}}{=} \ln|z| + i\arg(z)} = \ln r + i(\varphi + 2\pi k)$$
$$= \ln\sqrt{x^2+y^2} + i\left(\arctan\frac{y}{x} + 2\pi k\right), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

El fet que z tingui una infinitat d'arguments fa que tingui també una infinitat de logaritmes, tots amb la mateixa part real ($\ln r$) però amb diferents parts imaginàries ($\varphi + 2\pi k$), amb $k \in \mathbb{Z}$. És un exemple de funció *multivaluada*. S'anomena logaritme *principal* el que té com a part imaginària l'argument principal de z.



D'altra banda, el fet que tots els nombres complexos (llevat del **0**) tinguin logaritme fa que també sigui així per als nombres reals negatius. Per exemple, $\ln(-2) = \ln 2 + i\pi$ $(+i2\pi k)$.

És fàcil comprovar que $e^{\ln z} = z$, i també que $\ln(e^z) = z$ $(+i2\pi k)$.

Potència d'exponent complex i exponencial de base complexa
Si a i b són nombres reals (amb $a > 0$), tenim $a^b = e^{b \ln a}$. Si mantenim aquesta igualtat quan a i b són nombres complexos, arribem a les definicions següents:

1) **Potència d'exponent complex**
   Si $a \in \mathbb{C}$, definim
   $$\boxed{z^a \stackrel{\text{def}}{=} e^{a \ln z}.}$$
   En general, la funció és multivaluada, ja que $\ln z$ ho és. És univaluada quan $a \in \mathbb{Z}$ i n-valuada quan $a = 1/n$, amb $n \in \mathbb{N}$ (les n arrels n-èsimes de z).

2) **Exponencial de base complexa**
   Si $a \in \mathbb{C}$, definim
   $$\boxed{a^z \stackrel{\text{def}}{=} e^{z \ln a}.}$$
   És univaluada un cop es fixa la determinació de l'argument de a (i, per tant, del seu logaritme).

Funcions trigonomètriques
Si a les fórmules d'Euler $\sin \varphi = (e^{i\varphi} - e^{-i\varphi})/2i$ i $\cos \varphi = (e^{i\varphi} + e^{-i\varphi})/2$, substituïm el nombre real φ pel complex z, arribem a les definicions següents:

$$\boxed{\sin z \stackrel{\text{def}}{=} \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad \cos z \stackrel{\text{def}}{=} \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}}$$

i també,

$$\boxed{\tan z \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\sin z}{\cos z} = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{i(e^{iz} + e^{-iz})}; \ \cot z \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\tan z}; \ \sec z \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\cos z}; \ \csc z \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\sin z}.}$$

Són funcions univaluades, ja que l'exponencial també ho és, i tenen periodicitat 2π en la direcció paral·lela a l'eix real, és a dir,

$$\sin z = \sin(z + 2\pi), \quad \cos z = \cos(z + 2\pi), \text{ etc.}$$

Compleixen les mateixes relacions que les corresponents funcions de variable real

$$\cos^2 z + \sin^2 z = 1, \quad \cos(-z) = \cos z, \quad \sin(-z) = -\sin z,$$
$$\sin(z + z') = \sin z \cos z' + \cos z \sin z', \ \cos(z + z') = \cos z \cos z' - \sin z \sin z', \text{ etc.}$$

Les funcions $\sin z$ i $\cos z$ únicament s'anul·len, respectivament, als punts $k\pi$ i $(k + \frac{1}{2})\pi$ de l'eix real.

Funcions hiperbòliques
La substitució, a les definicions $\sinh x = (e^x - e^{-x})/2$ i $\cosh x = (e^x + e^{-x})/2$, del nombre real x pel complex z, ens porta a les definicions següents:

$$\boxed{\sinh z \stackrel{\text{def}}{=} \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \quad \cosh z \stackrel{\text{def}}{=} \frac{e^z + e^{-z}}{2}}$$

i, també,

$$\boxed{\tanh z \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\sinh z}{\cosh z} = \frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}}, \quad \coth z \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\tanh z}.}$$

Són, també, funcions univaluades i tenen periodicitat $2\pi i$ en la direcció paral·lela a l'eix imaginari, és a dir,

$$\sinh z = \sinh(z + 2\pi i), \quad \cosh z = \cosh(z + 2\pi i), \text{ etc.}$$

Compleixen les mateixes relacions que les corresponents funcions de variable real

$$\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1, \quad \cosh(-z) = \cosh z, \quad \sinh(-z) = -\sinh z,$$
$$\sinh(z + z') = \sinh z \cosh z' + \cosh z \sinh z',$$
$$\cosh(z + z') = \cosh z \cosh z' + \sinh z \sinh z', \text{ etc.}$$

Les funcions $\sinh z$ i $\cosh z$ únicament s'anul·len, respectivament, als punts $k\pi i$ i $(k + \frac{1}{2})\pi i$ de l'eix imaginari.

Les funcions trigonomètriques i les hiperbòliques es relacionen entre elles de la manera següent:

$$\cos z = \cosh(iz), \quad \sin z = -i \sinh(iz) \text{ o, també, } i \sin z = \sinh(iz),$$
$$\cosh z = \cos(iz), \quad \sinh z = -i \sin(iz) \text{ o, també, } i \sinh z = \sin(iz).$$

Aquestes relacions, òbviament, també es compleixen quan z és real.

Funcions trigonomètriques i hiperbòliques inverses
Les podem calcular. Si $w = \arcsin z \Rightarrow z = \sin w = (e^{iw} - e^{-iw})/2i \Rightarrow e^{iw} - 2iz - e^{-iw} = 0 \Rightarrow (e^{iw})^2 - 2iz(e^{iw}) - 1 = 0 \Rightarrow e^{iw} = iz \pm \sqrt{1 - z^2} \Rightarrow w = -i \ln\left(iz \pm \sqrt{1 - z^2}\right)$. Un càlcul semblant ens porta a $\arccos z$ i a $\arctan z$:

$$\boxed{\begin{gathered}\arcsin z = -i \ln\left(iz \pm \sqrt{1 - z^2}\right), \quad \arccos z = -i \ln\left(z \pm \sqrt{z^2 - 1}\right), \\ \arctan z = \frac{i}{2} \ln\left(\frac{i + z}{i - z}\right).\end{gathered}}$$

Similarment,

$$\boxed{\begin{gathered}\sinh^{-1} z = \ln\left(z \pm \sqrt{z^2 + 1}\right), \quad \cosh^{-1} z = \ln\left(z \pm \sqrt{z^2 - 1}\right), \\ \tanh^{-1} z = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1 + z}{1 - z}\right).\end{gathered}}$$

A.6 Trigonometria circular i trigonometria hiperbòlica

A partir de les igualtats

$$\begin{aligned} \cos x &= \cosh(ix), & \cosh x &= \cos(ix), \\ \sin x &= -i\sinh(ix), & \sinh x &= -i\sin(ix), \end{aligned}$$

podem trobar per a cada relació trigonomètrica circular la corresponent hiperbòlica

Trigonometria circular	**Trigonometria hiperbòlica**
$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$	$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$
Suma:	
$\sin(x+y) = \sin x\cos y + \cos x\sin y$	$\sinh(x+y) = \sinh x\cosh y + \cosh x\sinh y$
$\cos(x+y) = \cos x\cos y - \sin x\sin y$	$\cosh(x+y) = \cosh x\cosh y + \sinh x\sinh y$
$\tan(x+y) = \dfrac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x\tan y}$	$\tanh(x+y) = \dfrac{\tanh x + \tanh y}{1 + \tanh x\tanh y}$
Angle doble:	
$\sin(2x) = 2\sin x\cos x$	$\sinh(2x) = 2\sinh x\cosh x$
$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$	$\cosh(2x) = \cosh^2 x + \sinh^2 x$
$\tan(2x) = \dfrac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$	$\tanh(2x) = \dfrac{2\tanh x}{1+\tanh^2 x}$
Angle meitat:	
$\sin\left(\dfrac{x}{2}\right) = \sqrt{\dfrac{1-\cos x}{2}}$	$\sinh\left(\dfrac{x}{2}\right) = \sqrt{\dfrac{-1+\cosh x}{2}}$
$\cos\left(\dfrac{x}{2}\right) = \sqrt{\dfrac{1+\cos x}{2}}$	$\cosh\left(\dfrac{x}{2}\right) = \sqrt{\dfrac{1+\cosh x}{2}}$
$\tan\left(\dfrac{x}{2}\right) = \sqrt{\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}}$	$\tanh\left(\dfrac{x}{2}\right) = \sqrt{\dfrac{-1+\cosh x}{1+\cosh x}}$
Conversió de suma a producte:	
$\sin x + \sin y = 2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$	$\sinh x + \sinh y = 2\sinh\left(\frac{x+y}{2}\right)\cosh\left(\frac{x-y}{2}\right)$
$\sin x - \sin y = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$	$\sinh x - \sinh y = 2\cosh\left(\frac{x+y}{2}\right)\sinh\left(\frac{x-y}{2}\right)$
$\cos x + \cos y = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$	$\cosh x + \cosh y = 2\cosh\left(\frac{x+y}{2}\right)\cosh\left(\frac{x-y}{2}\right)$
$\cos x - \cos y = -2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$	$\cosh x - \cosh y = 2\sinh\left(\frac{x+y}{2}\right)\sinh\left(\frac{x-y}{2}\right)$
$\tan x \pm \tan y = \dfrac{\sin(x\pm y)}{\cos x\cos y}$	$\tanh x \pm \tanh y = \dfrac{\sinh(x\pm y)}{\cosh x\cosh y}$
Conversió de producte a suma:	
$\sin x\cos y = [\sin(x+y) + \sin(x-y)]/2$	$\sinh x\cosh y = [\sinh(x+y) + \sinh(x-y)]/2$
$\cos x\sin y = [\sin(x+y) - \sin(x-y)]/2$	$\cosh x\sinh y = [\sinh(x+y) - \sinh(x-y)]/2$
$\cos x\cos y = [\cos(x+y) + \cos(x-y)]/2$	$\cosh x\cosh y = [\cosh(x+y) + \cosh(x-y)]/2$
$\sin x\sin y = -[\cos(x+y) - \cos(x-y)]/2$	$\sinh x\sinh y = [\cosh(x+y) - \cosh(x-y)]/2$
Derivades:	
$(\sin x)' = \cos x$	$(\sinh x)' = \cosh x$
$(\cos x)' = -\sin x$	$(\cosh x)' = \sinh x$

A.7 Sèries de nombres complexos

Si $\{z_n\} = \{x_n + iy_n\}$ és una successió de nombres complexos, diem que la sèrie $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ és *convergent* i que la seva suma és $Z = X + iY$ si $\lim\{Z_n\} = Z$, on $Z_n = \sum_{k=1}^{n} z_k$ és la suma parcial n-èsima. Si $X_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$ és la suma parcial n-èsima de les parts reals de z_n i $Y_n = \sum_{k=1}^{n} y_k$ és la suma parcial n-èsima de les parts imaginàries, tenim

$$\sum_{k=1}^{\infty} z_k = Z \Leftrightarrow \{Z_n\} \to Z \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \{X_n\} \to X \\ \{Y_n\} \to Y \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \sum_{k=1}^{\infty} x_k = X \\ \sum_{k=1}^{\infty} y_k = Y \end{array} \right\}.$$

És a dir,

una sèrie de nombres complexos és convergent si i només si la sèrie de les parts reals i la de les parts imaginàries (ambdues de nombres reals) són convergents.

Per tant, tindrem també

$$\sum_{k=1}^{\infty} z_k \text{ convergent } \Rightarrow \lim\{z_n\} = \mathbf{0}.$$

Diem que la sèrie de nombres complexos $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ és *absolutament convergent* si la sèrie de nombres reals $\sum_{k=1}^{\infty} |z_k|$ és convergent. És fàcil veure que

$$\boxed{\sum_{k=1}^{\infty} z_k \text{ absolutament convergent } \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} x_k \text{ i } \sum_{k=1}^{\infty} y_k \text{ absolutament convergents.}}$$

Demostració: notem que $|x_k|, |y_k| \leq |z_k| \leq |x_k| + |y_k|$ i apliquem el criteri de comparació per a sèries reals de termes no negatius. $\diamondsuit$

Com en el cas de les sèries reals, també es compleix que

Si $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ és absolutament convergent, aleshores $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ és convergent.

Demostració:

$$\sum_{k=1}^{\infty} |z_k| \text{ conv.} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \sum |x_k| \text{ conv.} \\ \sum |y_k| \text{ conv.} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} \sum x_k \text{ conv.} \\ \sum y_k \text{ conv.} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} z_k \text{ conv. } \diamondsuit$$

Els criteris de convergència absoluta per a sèries de nombres reals són, òbviament, aplicables a la sèrie $\sum_{k=1}^{\infty} |z_k|$ i, en particular, podem utilitzar els criteris de l'arrel i del quocient:

$$\left. \begin{array}{c} \text{Si } \lim\{\sqrt[n]{|z_n|}\} = \alpha \\ \text{o} \\ \lim\left\{\frac{|z_{n+1}|}{|z_n|}\right\} = \alpha \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Si } \alpha < 1\text{: } \sum_{k=1}^{\infty} z_k \text{ és absolutament convergent,} \\ \text{si } \alpha > 1\text{: } \sum_{k=1}^{\infty} z_k \text{ no és convergent,} \\ \text{si } \alpha = 1\text{: no es conclou res.} \end{array} \right.$$

A.8 Sèries de potències complexes

Són sèries del tipus $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$, on $a_n, c \in \mathbb{C}$ i z és una variable complexa. Com en el cas de les sèries de potències reals, només cal estudiar la sèrie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, relacionada amb l'anterior pel canvi $z \to z - c$.

És fàcil demostrar (la demostració és idèntica a la del cas de les sèries de potències reals) el teorema de la convergència absoluta de les sèries de potències.

> Teorema: Si $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ és convergent en el punt $z = z_0$, aleshores $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ és *absolutament* convergent (i, per tant, convergent) en tot punt z tal que $|z| < |z_0|$.

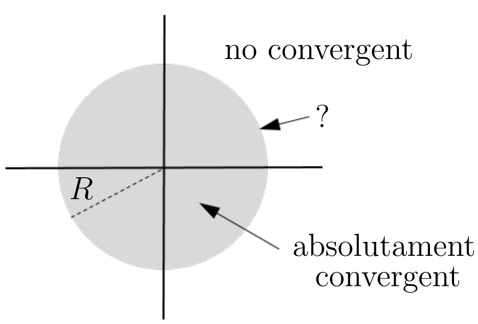
Consegüentment, si $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ no convergeix quan $z = z_0$, tampoc no pot convergir quan $|z| > |z_0|$. Hi ha, doncs, un nombre real no negatiu, R, tal que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ convergeix absolutament quan $|z| < R$ i no convergeix quan $|z| > R$. Quan $|z| = R$ no es pot, en general, afirmar ni una cosa ni l'altra (la sèrie pot convergir en alguns punts o en cap, depenent dels coeficients a_n). R és el *radi de convergència* de la sèrie i la regió $|z| < R$ és el seu *disc de convergència.*

Com en el cas de les sèries de potències reals, tenim

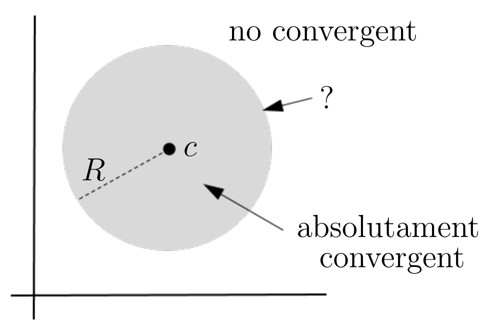
$$\boxed{R = \left[\lim \left\{ \sqrt[n]{|a_n|} \right\}\right]^{-1} = \lim \left\{ \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} \right\}.}$$

Evidentment, la sèrie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$ té el mateix radi de convergència que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ però el seu disc de convergència és la regió $|z - c| < R$, és a dir, és un disc de radi R centrat en el punt c del pla complex.

$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n}$



$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n}$



A.9 Problemes

PA.1 Expresseu en forma polar, $re^{i\varphi}$, els nombres complexos següents:

(a) $z = 4\sqrt{2}(-1+i)$ (b) $z = -e^{i\pi/4}$

PA.2 Trobeu tots els valors (si n'hi ha més d'un) de:

(a) $z = \ln i$ (e) $z = i^i$

(b) $z = \sin(2i)$ (f) $z = \cosh(i\pi)$

(c) $z = 1^i$ (g) $z = \ln(1+i)$

(d) $z = i^1$ (h) $z = \tanh^{-1}(0)$

PA.3 Calculeu:

(a) Les arrels cúbiques de $z = -27$

(b) Les arrels quartes de $z = 8\sqrt{2}(1-i)$

PA.4 Resoleu les equacions

(a) $e^{\sqrt{z}} + 1 = 0$ (b) $\sin z = 0$ (c) $\cos z = 2$

PA.5 Identifiqueu les regions del pla complex que compleixen

(a) $|z| < 2$ (c) $|z-1| = |z-2|$

(b) $1 \leq |z-i| \leq 3$ (d) $|z-1| + |z-2| = 4$

Solucions

SA.1 (a) $|z| = \sqrt{(4\sqrt{2})^2 + (4\sqrt{2})^2} = 8$, $\text{Arg}(z) = \arctan(-1) = 3\pi/4$, ja que z és al segon quadrant. Per tant, $z = 8e^{i3\pi/4}$.

(b) $z = -e^{i\pi/4} = e^{i\pi}e^{i\pi/4} = e^{i5\pi/4} = e^{-i3\pi/4}$ (si prenem l'argument principal a l'interval $(-\pi, \pi]$).

SA.2 (a) $\ln i = \ln|i| + i\text{arg}(i) = i\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right)$, $k \in \mathbb{Z}$.

(b) $\sin(2i) = \dfrac{e^{i(2i)} - e^{-i(2i)}}{2i} = \dfrac{e^{-2} - e^{2}}{2i} = i\dfrac{e^2 - e^{-2}}{2} = i\sinh 2$.

(c) $1^i = e^{i\ln 1} = e^{i(i2\pi k)} = e^{-2\pi k}$, $k \in \mathbb{Z}$.

(d) $i^1 = e^{\ln i} = e^{i(\frac{\pi}{2}+2\pi k)} = i$.

(e) $i^i = e^{i\ln i} = e^{i[i(\frac{\pi}{2}+2\pi k)]} = e^{-(\frac{\pi}{2}+2\pi k)}$, $k \in \mathbb{Z}$.

(f) $\cosh(i\pi) = \dfrac{e^{i\pi}+e^{-i\pi}}{2} = \cos\pi = -1$.

(g) $\ln(1+i) = \ln\sqrt{2} + i\left(\dfrac{\pi}{4}+2\pi k\right)$, $k \in \mathbb{Z}$.

(h) Si $z = \tanh^{-1}(0)$, tenim $0 = \tanh z = \dfrac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}} \Rightarrow e^z = e^{-z}$, és a dir, $e^{2z} = 1$. Per tant, $\tanh^{-1}(0) = z = \dfrac{1}{2}\ln 1 = i\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

SA.3 (a) $\sqrt[3]{-27} = \left[27e^{i(\pi+2\pi k)}\right]^{1/3} = 3e^{i\frac{\pi+2\pi k}{3}}$, $k = 0, 1, 2$. Tenim, per tant, tres valors de $\sqrt[3]{-27}$:

$$z_0 = 3e^{i\frac{\pi}{3}}, \qquad z_1 = 3e^{i\frac{3\pi}{3}} = -3, \qquad z_2 = 3e^{i\frac{5\pi}{3}} = 3e^{-i\frac{\pi}{3}}.$$

(b) $\sqrt[4]{8\sqrt{2}(1-i)} = \left[16e^{i\left(-\frac{\pi}{4}+2\pi k\right)}\right]^{1/4} = 2e^{i\left(-\frac{\pi}{16}+\frac{2\pi k}{4}\right)}$, $k = 0, 1, 2, 3$.

Tenim, doncs, quatre valors de $\sqrt[4]{8\sqrt{2}(1-i)}$:

$$z_0 = 2e^{-i\frac{\pi}{16}}, \qquad z_1 = 2e^{i\frac{7\pi}{16}}, \qquad z_2 = 2e^{i\frac{15\pi}{16}}, \qquad z_3 = 2e^{i\frac{23\pi}{16}} = 2e^{-i\frac{9\pi}{16}}.$$

SA.4 (a) $e^{\sqrt{z}} + 1 = 0 \Rightarrow z = [\ln(-1)]^2 = [i(\pi+2\pi k)]^2 = -\pi^2(1+2k)^2$, $k \in \mathbb{Z}$.

(b) $\sin z = 0 \Rightarrow \dfrac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i} = 0 \Rightarrow e^{iz} = e^{-iz} \Leftrightarrow e^{i2z} = 1$. Per tant,

$$z = \frac{\ln(1)}{2i} = \frac{i2\pi k}{2i} = \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

(c) $(e^{iz}+e^{-iz})/2 = 2 \Rightarrow e^{iz}+e^{-iz} = 4 \Rightarrow (e^{iz})^2 - 4(e^{iz}) + 1 = 0 \Rightarrow e^{iz} = 2 \pm \sqrt{3} \Rightarrow iz = \ln(2\pm\sqrt{3}) + i2\pi k \Rightarrow z = -i\ln(2\pm\sqrt{3}) + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

SA.5 Recordem que $|z - z'|$ és la distància entre els punts z i z'.

(a) Conjunt de punts de l'interior del disc de radi 2 centrat en l'origen.

(b) Conjunt de punts de la corona circular de radi extern 3 i radi intern 1, centrada en el punt $z = i$.

(c) Conjunt dels punts equidistants de $z = 1$ i de $z = 2$, és a dir, la recta paral·lela a l'eix imaginari que passa per $z = 3/2$.

(d) Punts de l'el·lipsi de focus $z = 1$ i $z = 2$ que talla l'eix real en els punts $x = -\frac{1}{2}$ i $x = \frac{7}{2}$. El semieix major, a, és la meitat de la distància entre aquests dos punts, és a dir, $a = 2$. Amb el teorema de Pitàgores tenim $a^2 = b^2 + d^2$, on a és el semieix major $(= 2)$, b és el semieix menor i d és la semidistància focal $(= 1/2)$. D'aquí trobem $b = \sqrt{3}/2$.

B Irracionalitat de π i de e

A partir de la sèrie de Taylor de e^x hem vist al capítol 8 que el nombre e és irracional. Presentem aquí dues demostracions senzilles que només fan servir la derivació i la integració, de la irracionalitat dels nombres π i e.

B.1 El nombre π és irracional

DEMOSTRACIÓ:[1] suposem, per arribar a una contradicció, que $\pi \in \mathbb{Q}$ i que, per tant, es pot escriure $\pi = p/q$, on p i q són enters positius. Construïm el polinomi

$$f(x) = \frac{x^n(p-qx)^n}{n!} = \frac{\sum_{k=n}^{2n} c_k x^k}{n!},$$

on n és un nombre natural que especificarem més endavant. Notem que els coeficients c_k són enters i que $f(x)$ només conté termes x^k amb $n \le k \le 2n$. Això fa que f i les seves derivades de tot ordre $f^{(j)}$ prenguin valors enters a $x = 0$. En efecte, f i les seves derivades d'ordre $< n$ s'anul·len a $x = 0$, les d'ordre $> 2n$ s'anul·len a tot arreu i quan $n \le j \le 2n$ tenim $f^{(j)}(0) = j!c_j/n!$ que és enter. Com que $f(x) = f((p/q) - x)$ i, per tant, $f^{(j)}(x) = (-1)^j f^{(j)}((p/q) - x)$, les funcions f i $f^{(j)}$ també prenen valors enters a $x = \pi$. Construïm ara el polinomi

$$F(x) = f(x) - f''(x) + f''''(x) - \cdots + (-1)^n f^{(2n)}(x),$$

que, òbviament, també pren valors enters a $x = 0$ i $x = \pi$. Notem que

$$\frac{d}{dx}\left[F'(x)\sin x - F(x)\cos x\right] = \left[F''(x) + F(x)\right]\sin x = f(x)\sin x.$$

Per tant,

$$\int_0^\pi f(x)\sin x\,dx = \left[F'(x)\sin x - F(x)\cos x\right]_0^\pi = F(\pi) + F(0) \in \mathbb{Z}.$$

D'altra banda, com que a l'interval $[0,\pi]$ es compleix $0 < f(x)\sin x < \pi^n p^n/n!$, tenim les desigualtats

$$0 < \int_0^\pi f(x)\sin x\,dx < \frac{\pi^{n+1}p^n}{n!} < 1 \text{ (per a } n \text{ suficientment gran).}$$

Així, si prenem n prou gran arribem a la contradicció

$$F(\pi) + F(0) \in \mathbb{Z}, \quad 0 < F(\pi) + F(0) < 1.$$

Per tant, $\pi \notin \mathbb{Q}$. $\diamondsuit$

[1] NIVEN, I. 1947. "A simple proof that π is irrational". *Bulletin of the American Mathematical Society*, vol. 53, pàg. 509.

B.2 El nombre e és irracional

Demostració:[2] novament, per arribar a una contradicció, suposem que $e \in \mathbb{Q}$ i que, per tant, $e = p/q$, on p i q són enters positius. Considerem la integral

$$\int_0^1 e^{-x}\,dx = 1 - \frac{1}{e}\,.$$

Si integrem per parts n vegades obtenim

$$1 - \frac{1}{e} = \frac{1}{e}\left(1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right) + \int_0^1 \frac{x^n}{n!} e^{-x}\,dx.$$

Si ara multipliquem la igualtat anterior per $n!e$ i aïllem el terme de la integral, obtenim

$$n!(e-1) - n!\left(1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right) = e\int_0^1 x^n e^{-x}\,dx.$$

Si prenem $n \geq q$, el costat esquerre de la igualtat anterior és un nombre enter. D'altra banda, si $n \geq e$ tenim

$$0 < e\int_0^1 x^n e^{-x}\,dx \leq e\int_0^1 x^n\,dx = \frac{e}{n+1} < 1.$$

Així doncs, si prenem $n \geq \max\{q, e\}$ arribem a la contradicció

$$e\int_0^1 x^n e^{-x}\,dx \in \mathbb{Z}, \quad 0 < e\int_0^1 x^n e^{-x}\,dx < 1.$$

Per tant, $e \notin \mathbb{Q}$. $\diamondsuit$

[2] Kifowit, S. 2009. "A remarkably elementary proof of the irrationality of e". https://stevekifowit.com/pubs/e.pdf (no publicat).

Bibliografia

Incloem aquí una llista no exhaustiva dels textos més utilitzats en la preparació d'aquest llibre:

APOSTOL, T. M. 1967. *Calculus (vol. I).* 2nd ed. John Wiley & Sons. Hi ha traducció al castellà: *Calculus (vol. I).* 2a ed. Editorial Reverté (1972).

APOSTOL, T. M. 1974. *Mathematical analysis.* 2nd ed. Addison Wesley Publishing Company. Hi ha traducció al castellà: *Análisis matemático.* 2a ed. Editorial Reverté (2024).

BARTLE, R. G.; SHERBERT, D. R. 2011. *Introduction to real analysis.* 4th ed. John Wiley & Sons. Hi ha traducció al castellà: *Introducción al análisis matemático de una variable.* 3a ed. Limusa (2010).

ORTEGA, J. M. 2002. *Introducció a l'anàlisi matemàtica.* 2a ed. Servei de publicacions de la UAB.

RUDIN, W. 1976. *Principles of Mathematical Analysis.* 3rd ed. McGraw-Hill. Hi ha traducció al castellà: *Principios de análisis matemático.* 3a ed. McGraw-Hill de México (1980).

SPIVAK, M. 2008. *Calculus.* 4th ed. Publish or Perish. Hi ha traducció al castellà: *Calculus.* 3a ed. Editorial Reverté (2012).