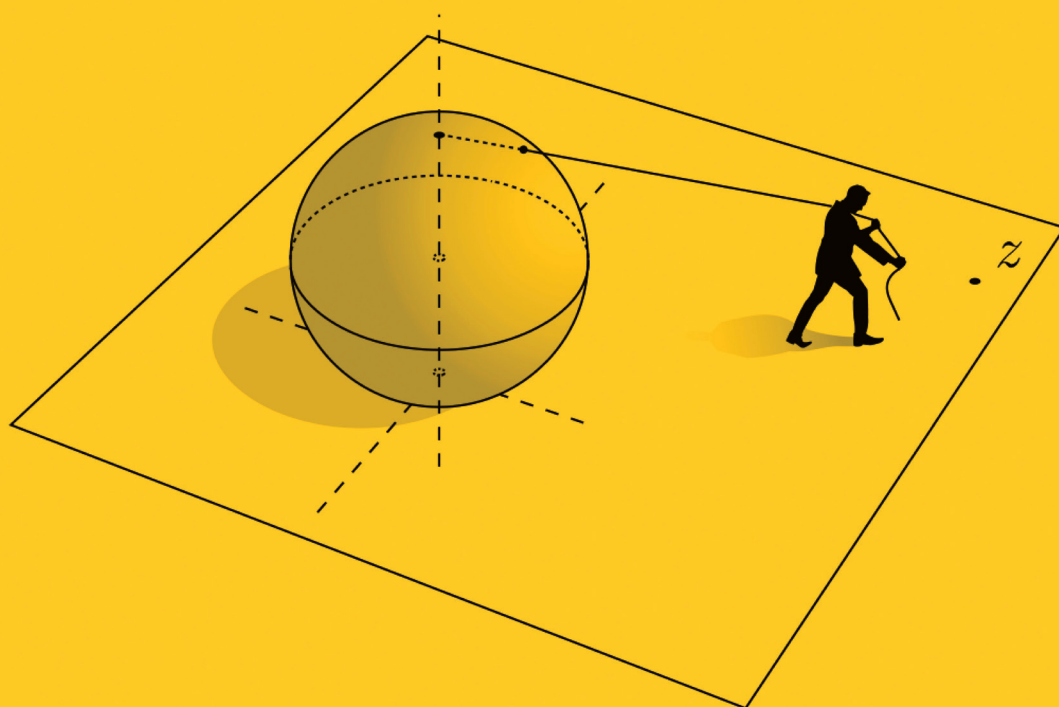




MATERIALS
243

EMILI BAGAN
ANTONI MÉNDEZ
ORIOl PUJOLÀS

Càlcul en variable complexa



UAB Universitat Autònoma
de Barcelona

Servei de
Publicacions

EMILI BAGAN
ANTONI MÉNDEZ
ORIOL PUJOLÀS

Càlcul en variable complexa



Generalitat de Catalunya
**Departament de Recerca
i Universitats**

Aquest llibre ha estat publicat amb el suport
del Departament de Recerca i Universitats
de la Generalitat de Catalunya

Primera edició: desembre de 2023
Primera edició revisada: novembre de 2025

© del text:

Emili Bagan, Antoni Méndez i Oriol Pujolàs

© d'aquesta edició

Servei de Publicacions de la UAB

Edició i impressió:

Servei de Publicacions

Universitat Autònoma de Barcelona

Edifici A. 08193 Bellaterra (Cerdanyola del Vallès). Spain

Tel. 93 581 10 22

sp@uab.cat

<https://publicacions.uab.cat>

ISBN 978-84-19333-92-6

Dipòsit legal: B-20812-2023

Imprès a Espanya. Printed in Spain



Aquest llibre està publicat amb una llicència Creative Commons CC-BY-NC-ND.
El titular de l'obra autoritza a utilitzar els continguts sempre que es reconegui l'autoria.
No es permet fer un ús comercial, ni la generació d'obres derivades.

Índex

Pròleg	iii
1 Nombres complexos	1
1.1 El cos $\mathbb{C}$ dels nombres complexos	1
1.2 Expressió dels nombres complexos	7
1.3 Topologia a $\mathbb{C}$	11
1.4 Problemes	17
2 Funcions	27
2.1 Funcions de variable complexa	27
2.2 Punt de l'infinit	29
2.3 Funcions multivaluades i superfícies de Riemann	31
2.4 Funcions elementals	34
2.5 Límit d'una funció	38
2.6 Continuitat	39
2.7 Derivació i analiticitat	40
2.8 Problemes	47
3 Integració	65
3.1 La integral al pla complex	65
3.2 Teorema de Cauchy-Goursat	68
3.3 Integrals independents del camí	73
3.4 Fórmules integrals de Cauchy	79
3.5 Problemes	90
4 Sèries	101
4.1 Successions i sèries de funcions	101
4.2 Sèries de Laurent i de Taylor	107
4.3 Sèries de potències	111
4.4 Operacions amb sèries de potències	119
4.5 Classificació de les singularitats aïllades	122
4.6 Zeros de les funcions analítiques	125
4.7 Problemes	131

5	Residus	153
5.1	Teorema dels residus	153
5.2	Càlcul dels residus	154
5.3	Càlcul d'integrals definides pel mètode dels residus	156
5.4	Suma de sèries numèriques pel mètode dels residus	171
5.5	Problemes	174
	Apèndix: Exàmens resolts	193
	Examen A	193
	Examen B	198
	Examen C	203
	Examen D	210
	Examen E	217
	Examen F	224
	Examen G	230
	Bibliografia	235

Pròleg

Aquest llibre tracta de funcions de variable complexa i és la continuació natural del càlcul en una o diverses variables reals. Està pensat principalment per a alumnes dels primers cursos de física i de matemàtiques.

El llibre té cinc capítols amb títols autoexplicatius. En el primer presentem els nombres complexos, les seves propietats, les formes d'expressió i els aspectes topològics del *pla complex*. No té requeriments previs llevat del coneixement dels nombres reals i de les seves propietats.

En el segon capítol presentem les funcions de variable complexa i els conceptes de límit, continuïtat i derivada, que són similars als del càlcul real. La part del capítol dedicada a la derivada requereix el coneixement previ de les derivades parcials d'una funció real de diverses variables reals. El capítol conclou amb el concepte de funció *analítica* (o *holomorfa*), que té un paper central en el càlcul complex.

El tercer capítol es dedica a la integració sobre *contorns* del pla complex i ens porta al teorema més important del càlcul complex, el *teorema de Cauchy*, del qual s'obtenen la major part dels resultats que es presenten a la resta del llibre. Com a prerrequisit només cal tenir un coneixement elemental de les integrals de línia i de superfície, de funcions reals de diverses variables.

En el quart capítol es tracten les sèries numèriques i de funcions. S'estudien en detall les sèries de potències (de Laurent i de Taylor), la seva relació amb les funcions analítiques i la seva utilitat per classificar les *singularitats* d'una funció.

Finalment, en el cinquè capítol arribem al concepte de *residu* d'una singularitat aïllada i mostrem la seva utilitat per al càlcul d'integrals definides *reals* i la suma de sèries.

Tots els teoremes estan demostrats i el final de cada demostració s'indica amb el símbol $\diamond$. Al llarg del text també hi ha exemples (destacats sobre fons gris). Quasi tots són aclariments o aplicacions directes de les definicions i teoremes que els precedeixen, però alguns són incursions breus a temes més avançats.

Al final de cada capítol hi ha una col·lecció de problemes amb les seves solucions. També s'ha inclòs un apèndix amb una col·lecció d'exàmens resolts realitzats a la UAB entre els anys 2000 i 2003.

Durant les moltes hores dedicades a escriure aquest text ho hem passat molt bé. Esperem que el trobeu útil.

Emili Bagan, Antoni Méndez i Oriol Pujolàs
UAB, octubre de 2023

A l'Ana, en Jofre i en Pol
A la Maite
A la Clàudia i la Susagna

1 Nombres complexos

El conjunt dels nombres reals, $\mathbb{R}$, és un cos ordenat, arquimedià i complet (és l'únic amb aquestes propietats), però té una limitació, els nombres reals negatius no tenen arrel quadrada o, equivalentment, l'equació $x^2 + 1 = 0$ no té solució dins $\mathbb{R}$. Aquest és un cas particular d'un problema més general, les equacions polinòmiques no sempre tenen solució real. Per aquest motiu cal una ampliació de $\mathbb{R}$: els nombres complexos.

1.1 El cos $\mathbb{C}$ dels nombres complexos

Sigui $\mathbb{C}$ el conjunt

$$\mathbb{C} = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}.$$

Designem els seus elements (seran els nombres complexos) per $z = (x, y)$ i definim les operacions *suma* $+$ i *producte* $\cdot$ mitjançant

$$z + z' = (x, y) + (x', y') \stackrel{\text{def}}{=} (x + x', y + y'), \quad (1.1)$$

$$z \cdot z' = (x, y) \cdot (x', y') \stackrel{\text{def}}{=} (xx' - yy', xy' + yx'). \quad (1.2)$$

És fàcil comprovar que $\mathbb{C}$, amb les operacions suma $+$ i producte $\cdot$, té l'estructura de cos, ja que

1) $\mathbb{C}$ amb l'operació $+$ és un *grup abelià*:

- (a) La suma $+$ és associativa: $z + (z' + z'') = (z + z') + z'', \forall z, z', z''$.
- (b) Hi ha un element neutre o *zero*, $\underline{0} \stackrel{\text{def}}{=} (0, 0)$, que compleix la relació $z + \underline{0} = \underline{0} + z = z, \forall z$.
- (c) Per a cada $z = (x, y)$ existeix l'element simètric, $-z = (-x, -y)$, tal que $z + (-z) = \underline{0}$.
- (d) La suma $+$ és commutativa: $z + z' = z' + z, \forall z, z'$.

2) $\mathbb{C} - \{\underline{0}\}$ amb l'operació $\cdot$ és un *grup abelià*:

- (a) El producte $\cdot$ és associatiu: $z \cdot (z' \cdot z'') = (z \cdot z') \cdot z'', \forall z, z', z''$.
- (b) Hi ha un element neutre o *unitat*, $\underline{1} \stackrel{\text{def}}{=} (1, 0)$, que compleix la relació $z \cdot \underline{1} = \underline{1} \cdot z = z, \forall z$.

(c) Per a cada $z = (x, y)$ *diferent del zero* ($z \neq \underline{0}$) existeix l'element invers

$$z^{-1} = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2} \right),$$

tal que $z \cdot z^{-1} = z^{-1} \cdot z = \underline{1}$.

(d) El producte $\cdot$ és commutatiu: $z \cdot z' = z' \cdot z, \forall z, z'$.

3) El producte $\cdot$ és distributiu respecte de la suma $+$, és a dir, satisfà la relació $z \cdot (z' + z'') = z \cdot z' + z \cdot z'', \forall z, z', z''$.

Normalment ometrem el símbol $\cdot$ i escriurem, per exemple, zz' en comptes de $z \cdot z'$. També usarem la notació $z - z' = z + (-z')$, $1/z = z^{-1}$ i $z/w = zw^{-1}$.

Definició 1.1 (Cos dels nombres complexos) *El conjunt $\mathbb{C}$ amb les operacions $(+, \cdot)$ és un cos que anomenem el cos dels nombres complexos.*

$\mathbb{C}$ conté a $\mathbb{R}$

Podem identificar els nombres complexos de la forma $(x, 0)$ amb els nombres reals, ja que $(x, 0) + (x', 0) = (x + x', 0)$ i $(x, 0) \cdot (x', 0) = (xx', 0)$, és a dir, l'aplicació $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ que transforma $x \rightarrow (x, 0)$ és un homomorfisme injectiu (figura 1.1). En altres paraules, $\mathbb{R}$ és subcòs de $\mathbb{C}$. En endavant escriurem x en comptes de $(x, 0)$ i, en particular, 0 i 1 en comptes de $\underline{0}$ i $\underline{1}$.

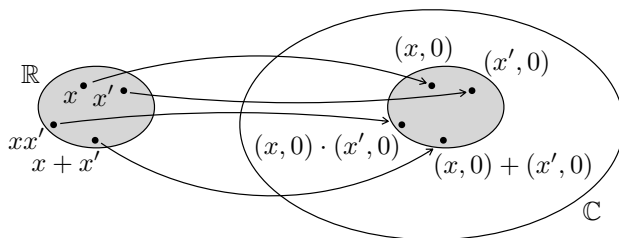


Figura 1.1: Representació abstracta de l'homomorfisme $x \rightarrow (x, 0)$ entre $\mathbb{R}$ i $\mathbb{C}$.

Producte d'un nombre real per un nombre complex

Si $\lambda \in \mathbb{R}$ i $z = (x, y) \in \mathbb{C}$, d'acord amb (1.2) tenim $\lambda z = (\lambda, 0)(x, y) = (\lambda x, \lambda y)$. Aquest fet, juntament amb la forma (1.1) de sumar dos nombres complexos, fa que el conjunt dels nombres complexos tingui també l'estructura d'espai vectorial de dimensió 2 sobre $\mathbb{R}$, i que puguem visualitzar el nombre complex (x, y) com un vector d'un pla que anomenem *pla complex* (figura 1.2). Els vectors d'aquest pla se sumen seguint la *regla del paral·lelogram*, però, a més a més, també es

poden multiplicar usant (1.2). Els nombres reals se situen sobre l'eix horitzontal (“eix real”) del pla complex (figura 1.3).

Representarem els nombres complexos com vectors (figura 1.2) o com punts (figura 1.3) segons ens convingui en cada cas.

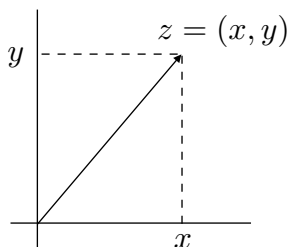


Figura 1.2: Representació d'un nombre complex com un vector de $\mathbb{R}^2$ (el pla complex).

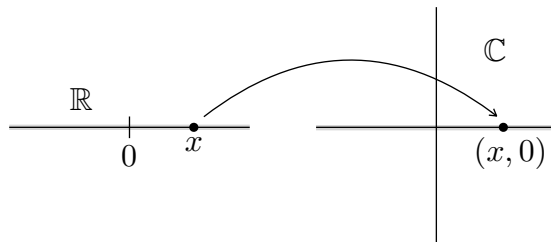


Figura 1.3: Inclusió de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{C}$. Concreció de la representació abstracta de la figura 1.1 al pla complex.

La “unitat imaginària”

Els nombres complexos de la forma $(0, y)$ s'anomenen *nombres imaginaris* i se situen sobre l'eix vertical (“eix imaginari”) del pla complex. A diferència del que passa amb els nombres reals, els imaginaris no tenen l'estructura de cos, ja que el producte no és intern (el producte de dos nombres imaginaris és un nombre real).

Definició 1.2 (Unitat imaginària i) *La unitat imaginària és el nombre complex*

$$i \stackrel{\text{def}}{=} (0, 1).$$

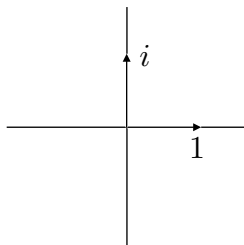


Figura 1.4: La unitat imaginària, i .

La unitat imaginària es representa a la figura 1.4. Observem que

$$i^2 = i \cdot i = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) = -1,$$

és a dir, i és l'arrel quadrada del nombre real -1 . Veiem, doncs, que el problema de l'arrel quadrada dels nombres reals negatius queda resolt. En efecte, si a és un nombre real positiu, $i\sqrt{a}$ és l'arrel quadrada de $-a$, ja que $(i\sqrt{a})^2 = i^2a = -a$. Veurem més endavant que el problema de l'arrel (no només quadrada) queda completament resolt a $\mathbb{C}$.

$\mathbb{C}$ no és un cos ordenat

Un *cos ordenat* és un cos amb una relació d'ordre total, $\leq$, compatible amb les operacions $+$ i $\cdot$ del cos. És a dir, que per a tot a, b i c es compleix

$$a \leq b \Rightarrow a + c \leq b + c, \quad (1.3)$$

$$0 \leq a, b \Rightarrow 0 \leq a \cdot b. \quad (1.4)$$

Comprovem ara que això no pot passar a $\mathbb{C}$.

Teorema 1.1 $\mathbb{C}$ no és un cos ordenat.

DEMOSTRACIÓ: En efecte, si aquesta ordenació existís, com que $i \neq 0$ tindríem $0 < i$ o $0 > i$. En ambdós casos arribaríem a una contradicció:

$$0 < i \xRightarrow{(1.4)} 0 < i^2 = -1 \quad \left\{ \begin{array}{l} \xRightarrow{(1.3)} 1 < 0 \\ \xRightarrow{(1.4)} 0 < (-1)^2 = 1 \end{array} \right\} \quad (\text{contradicció})$$

$$\begin{array}{l} 0 > i \xRightarrow{(1.3)} 0 < -i \\ \xRightarrow{(1.4)} 0 < (-i)^2 = -1 \end{array} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{com abans} \end{array} \right\} \quad (\text{contradicció})$$

◇

No existeix, doncs, cap ordenació de $\mathbb{C}$ compatible amb la suma i el producte que hem definit. No tenim, per tant, nombres complexos positius ni negatius. De fet, si z i z' són dos nombres complexos, *no* té cap sentit escriure, per exemple, $z < z'$. Aquestes expressions només tenen sentit en un cos ordenat, com $\mathbb{R}$.

Parts real i imaginària d'un nombre complex

Definició 1.3 (Part real i part imaginària) Si $z = (x, y)$, definim la part real i part imaginària de z per

$$\operatorname{Re} z \stackrel{\text{def}}{=} x, \quad \operatorname{Im} z \stackrel{\text{def}}{=} y.$$

Observem que tant $\operatorname{Re} z$ com $\operatorname{Im} z$ són nombres reals. Els nombres reals són nombres complexos amb la part imàginària nul·la, mentre que els nombres imaginaris són nombres complexos amb la part real nul·la. Notem també que un nombre complex s'escriu de manera única com la suma d'un nombre real i un nombre imaginari

$$(x, y) = (x, 0) + (0, y).$$

Complex conjugat

Definició 1.4 (Complex conjugat) *El complex conjugat de $z = (x, y)$ és¹*

$$z^* \stackrel{\text{def}}{=} (x, -y).$$

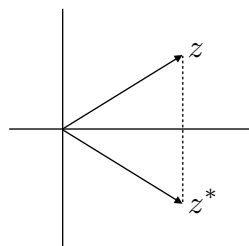


Figura 1.5: Un nombre complex, z , i el seu complex conjugat, z^* .

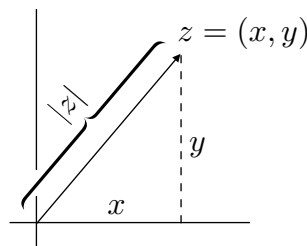


Figura 1.6: El mòdul d'un nombre complex z .

Geomètricament, z^* és el “vector” simètric de z respecte de l'eix real (vegeu la figura 1.5). Es comproven fàcilment les propietats següents:

$$\begin{aligned} (z^*)^* &= z, \\ (z + w)^* &= z^* + w^*, \\ (zw)^* &= z^* w^*, \\ z + z^* &= 2 \operatorname{Re} z, \\ z - z^* &= 2i \operatorname{Im} z, \\ z \in \mathbb{R} &\Leftrightarrow z = z^*, \\ z \text{ imaginari} &\Leftrightarrow z = -z^*. \end{aligned}$$

Mòdul d'un nombre complex

Definició 1.5 (Mòdul) *El mòdul del nombre complex z és el nombre real no negatiu*

$$|z| \stackrel{\text{def}}{=} +\sqrt{zz^*} = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2}.$$

¹També s'utilitza la notació $\bar{z}$ per designar el conjugat de z .

Quan z és real, el seu mòdul és el seu valor absolut. Per tant, el mòdul estén a tot $\mathbb{C}$ el concepte de valor absolut definit a $\mathbb{R}$. Geomètricament, el mòdul és la “llargada” del vector z (figura 1.6).

El mòdul compleix les propietats següents:

$$\begin{aligned} |z| &\geq 0, \\ |z| &= 0 \Leftrightarrow z = 0, \\ |zz'| &= |z||z'|, \\ |z^{-1}| &= |z|^{-1}, \\ |z^*| &= |z|, \\ |\operatorname{Re} z|, |\operatorname{Im} z| &\leq |z|, \\ |z| &\leq |\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z|. \end{aligned}$$

Teorema 1.2 (Desigualtats triangulars) *Per a tot $z, z' \in \mathbb{C}$ es compleix*

$$|z + z'| \leq |z| + |z'|, \quad (1.5)$$

$$|z - z'| \geq ||z| - |z'|||. \quad (1.6)$$

DEMOSTRACIÓ: Notem, primer, que si a i b són nombres reals no negatius, $a \leq b \Leftrightarrow a^2 \leq b^2$. Per tant, la desigualtat (1.5) equival a

$$|z + z'|^2 \leq (|z| + |z'|)^2. \quad (1.7)$$

Per demostrar-la desenvolupem els dos costats

$$\begin{aligned} |z + z'|^2 &= |z|^2 + |z'|^2 + 2 \operatorname{Re}(z^* z'), \\ (|z| + |z'|)^2 &= |z|^2 + |z'|^2 + 2|z||z'|. \end{aligned}$$

i com que $\operatorname{Re}(z^* z') \leq |\operatorname{Re}(z^* z')| \leq |z^* z'| = |z||z'|$, queden demostrades les desigualtats (1.7) i (1.5).

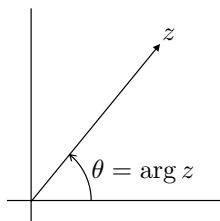
Pel que fa a la desigualtat (1.6), només cal observar que usant (1.5) tenim

$$\begin{aligned} |z| &= |z - z' + z'| \leq |z - z'| + |z'| \Rightarrow |z| - |z'| \leq |z - z'|, \\ |z'| &= |z' - z + z| \leq |z' - z| + |z| \Rightarrow |z'| - |z| \leq |z' - z| = |z - z'|. \end{aligned}$$

◇

Argument d'un nombre complex

Definició 1.6 (Argument) *L'argument, $\arg z$, d'un nombre complex $z = (x, y)$ és l'angle que forma el vector (x, y) amb l'eix real positiu, mesurat en el sentit positiu (“antihorari”).*

Figura 1.7: Argument d'un nombre complex, z .

L'argument d'un nombre complex z es representa a la figura 1.7. Un nombre complex té, de fet, una infinitat d'arguments que difereixen entre ells en múltiples enters de 2π , però únicament un d'ells, l'anomenat *argument principal*, $\text{Arg } z$ (amb majúscula), és a l'interval $(-\pi, \pi]$. La relació entre $\text{Arg } z$ i les components x i y de z és

$$\text{Arg } z = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + k\pi, \quad (1.8)$$

on $k = 0$ si z és al primer o quart quadrant, $k = 1$ si és al segon i $k = -1$ si és al tercer. Òbviament, es compleix que $\text{Arg } z^* = -\text{Arg } z$.

Exemple 1.1 L'argument principal de $z = (-1, 1)$ és

$$\text{Arg } z = \arctan\left(\frac{1}{-1}\right) + \pi = -\frac{\pi}{4} + \pi = \frac{3\pi}{4},$$

ja que z és al segon quadrant.

1.2 Expressió dels nombres complexos

A part de la forma *cartesiana* (x, y) , que suggereix la representació “vectorial” al pla complex, hi ha altres formes més còmodes d'expressar els nombres complexos que descrivim tot seguit.

Forma *binomial* d'un nombre complex

El nombre complex $z = (x, y)$ es pot expressar $(x, y) = x(1, 0) + y(0, 1) = x \cdot 1 + y \cdot i$, és a dir,

$$\boxed{z = x + iy} \quad (\text{forma binomial de } z).$$

Si tractem $x + iy$ com un polinomi real de primer grau en la variable i i recordem que $i^2 = -1$, tenim

$$\begin{aligned}(x, y) + (x', y') &= (x + iy) + (x' + iy') = (x + x') + i(y + y') = (x + x', y + y'), \\ (x, y)(x', y') &= (x + iy)(x' + iy') = xx' + i(xy' + x'y) + i^2 yy' \\ &= (xx' - yy') + i(xy' + x'y) = (xx' - yy', xy' + x'y),\end{aligned}$$

és a dir, reproduïm les definicions (1.1) i (1.2). Això mostra el bon funcionament de la “recepta” següent:

Recepta: Es pot tractar i com si fos una variable real però tenint en compte la propietat $i^2 = -1$.

Aquesta recepta ens servirà per definir les funcions elementals dels nombres complexos.

Forma *trigonomètrica* d'un nombre complex

Si utilitzem coordenades polars al pla complex, la forma binomial del nombre complex $z = x + iy$ es pot reexpressar en termes del mòdul r i de l'argument θ de z : $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$

$$\boxed{z = r(\cos \theta + i \sin \theta)} \quad (\text{forma } \textit{trigonomètrica} \text{ de } z).$$

La forma trigonomètrica ens dona una interpretació geomètrica del producte de dos nombres complexos. En efecte, si $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ i $z' = r'(\cos \theta' + i \sin \theta')$

$$\begin{aligned}zz' &= rr'(\cos \theta + i \sin \theta)(\cos \theta' + i \sin \theta') \\ &= rr'[(\cos \theta \cos \theta' - \sin \theta \sin \theta') + i(\sin \theta \cos \theta' + \cos \theta \sin \theta')] \\ &= rr'[\cos(\theta + \theta') + i \sin(\theta + \theta')].\end{aligned} \tag{1.9}$$

Tenim, doncs,

$$|zz'| = rr' = |z||z'|, \quad \arg(zz') = \theta + \theta' = \arg z + \arg z',$$

és a dir (figura 1.8),

El mòdul del producte és el *producte* dels mòduls.
L'argument del producte és la *suma* dels arguments.

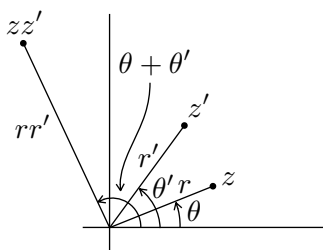


Figura 1.8: Interpretació geomètrica del producte de dos nombres complexos.

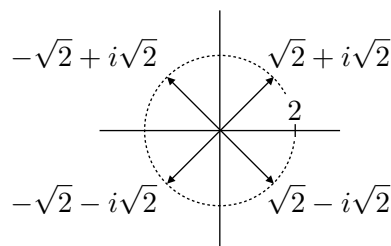


Figura 1.9: Representació vectorial de les arrels quartes de -16 .

En particular, si $n \in \mathbb{N}$ tenim

$$|z^n| = r^n, \quad \arg(z^n) = n\theta. \quad (1.10)$$

Per tant, si elevem a la potència n el nombre complex de mòdul $\sqrt[n]{r}$ i argument θ/n , obtenim z la qual cosa ens indica que no hi ha cap problema per trobar l'arrel n -èsima d'un nombre complex (ni, per tant, d'un nombre real). El problema de l'arrel queda, doncs, resolt a $\mathbb{C}$. Aquesta propietat és visualment més clara si expressem z en forma *polar*, una variant de la forma trigonomètrica molt més compacta i manipulable.

Forma *polar* d'un nombre complex

Comencem definint l'exponencial d'un nombre imaginari. Per fer-ho, usem la “recepta” (manipulant i com si fos real però recordant que $i^2 = -1$) a la sèrie de Taylor de $e^{i\theta}$,

$$\begin{aligned} e^{i\theta} &= 1 + \frac{i\theta}{1!} + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \dots \\ &= \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \dots\right) + i\left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \dots\right) = \cos \theta + i \sin \theta, \end{aligned}$$

la qual cosa suggereix la definició següent.

Definició 1.7 (Exponencial d'un nombre imaginari) *Si $\theta \in \mathbb{R}$, definim*

$$e^{i\theta} \stackrel{\text{def}}{=} \cos \theta + i \sin \theta. \quad (1.11)$$

Amb aquesta definició, la forma trigonomètrica de $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ es pot expressar

$$\boxed{z = re^{i\theta}} \quad (\text{forma } \textit{polar} \text{ de } z).$$

Observem que la forma polar és perfectament compatible amb la “recepta”, ja que si $z = re^{i\theta}$ i $z' = r'e^{i\theta'}$, i manipulem les exponencials com si fossin funcions exponencials reals, obtenim

$$\begin{aligned} zz' &= re^{i\theta} r'e^{i\theta'} = rr'e^{i(\theta+\theta')}, \\ z^n &= (re^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta}, \end{aligned} \quad (1.12)$$

d'acord amb (1.9) i (1.10).

Usant la forma polar s'obtenen fàcilment els resultats següents:

- i) **Arrels n -èsimes de z :** D'acord amb (1.12), donat un nombre complex $z = re^{i\theta}$, sempre en podem trobar un altre $w = \rho e^{i\alpha}$ tal que $w^n = z$. Només cal prendre $\rho = \sqrt[n]{r}$ i $\alpha = \varphi/n$. El nombre complex $w = \sqrt[n]{r} e^{i(\varphi/n)}$ és l'arrel n -èsima de z .

Però, de fet, n'hi ha més d'arrels n -èsimes perquè el nombre z té infinits arguments $\theta + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Cada cop que augmentem (o disminuïm) θ en 2π , l'argument de w augmenta (o disminueix) en $2\pi/n$. Hi ha, doncs, n arrels n -èsimes de z

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} e^{i(\theta+2\pi k)/n}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1.$$

- ii) **Fórmules d'Euler:** De les igualtats $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ i $e^{-i\theta} = \cos \theta - i \sin \theta$ podem aïllar $\cos \theta$ i $\sin \theta$ i obtenim

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \quad \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \quad (\text{Fórmules d'Euler}). \quad (1.13)$$

- iii) **Fórmula de De Moivre:** Si $n \in \mathbb{N}$, elevat a n la igualtat (1.11) tenim $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$, és a dir,

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta \quad (\text{Fórmula de De Moivre}).$$

D'aquesta fórmula s'obtenen les expressions de $\cos n\theta$ i $\sin n\theta$ en termes de $\cos \theta$ i $\sin \theta$:

$$\cos n\theta = \operatorname{Re}[(\cos \theta + i \sin \theta)^n], \quad \sin n\theta = \operatorname{Im}[(\cos \theta + i \sin \theta)^n].$$

- iv) **Curiositat:** Si substituïm $\theta = \pi$ a (1.11) obtenim una igualtat que relaciona els nombres e , i , π , 1 i 0:

$$e^{i\pi} + 1 = 0.$$

Exemple 1.2 Busquem totes les arrels quartes de $z = -16$. Si expressem z en forma polar tenim $z = 16 e^{i(\pi+2\pi k)}$, on $k \in \mathbb{Z}$. Llavors,

$$(-16)^{1/4} = [16 e^{i(\pi+2\pi k)}]^{1/4} = \sqrt[4]{16} e^{i(\pi+2\pi k)/4} = 2 e^{i(\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2})},$$

on $k = 0, 1, 2, 3$. Les quatre arrels quartes de -16 són, doncs (vegeu figura 1.9),

$$\begin{aligned} 2e^{i\pi/4} &= \sqrt{2} + i\sqrt{2}, & 2e^{i3\pi/4} &= -\sqrt{2} + i\sqrt{2}, \\ 2e^{i5\pi/4} &= -\sqrt{2} - i\sqrt{2}, & 2e^{i7\pi/4} &= \sqrt{2} - i\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Exemple 1.3 Expressem $\cos 3\theta$ i $\sin 3\theta$ en funció de $\cos \theta$ i $\sin \theta$.

$$\begin{aligned} \cos 3\theta + i \sin 3\theta &= e^{i3\theta} = (e^{i\theta})^3 = (\cos \theta + i \sin \theta)^3 \\ &= (\cos \theta)^3 + 3i(\cos \theta)^2 \sin \theta + 3i^2 \cos \theta (\sin \theta)^2 + i^3 (\sin \theta)^3 \\ &= [(\cos \theta)^3 - 3 \cos \theta (\sin \theta)^2] + i [3(\cos \theta)^2 \sin \theta - (\sin \theta)^3]. \end{aligned}$$

Per tant,

$$\cos 3\theta = \cos^3 \theta - 3 \cos \theta \sin^2 \theta, \quad \sin 3\theta = 3 \cos^2 \theta \sin \theta - \sin^3 \theta.$$

1.3 Topologia a $\mathbb{C}$

Definició 1.8 (Distància) *La distància entre dos nombres complexos és*

$$d(z, z') \stackrel{\text{def}}{=} |z - z'|.$$

Notem que si $z = x + iy$ i $z' = x' + iy'$, aleshores

$$d(z, z') = \sqrt{|x - x'|^2 + |y - y'|^2} = \sqrt{d_{\mathbb{R}}^2(x, x') + d_{\mathbb{R}}^2(y, y')},$$

on $d_{\mathbb{R}}(x, x') = |x - x'|$ és la distància sobre la recta real. Observem que, com a

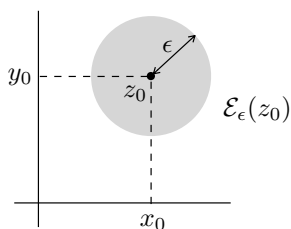


Figura 1.10: Representació gràfica de l'entorn obert $\mathcal{E}_\epsilon(z_0)$.

conseqüència de les propietats del mòdul, la distància té les propietats següents:

$$d(z, z') \geq 0,$$

$$d(z, z') = 0 \Leftrightarrow z = z',$$

$$d(z, z') = d(z', z),$$

$$d(z, z') \leq d(z, z'') + d(z'', z'),$$

$$d_{\mathbb{R}}(x, x'), d_{\mathbb{R}}(y, y') \leq d(z, z'), \quad (1.14)$$

$$d(z, z') \leq d_{\mathbb{R}}(x, x') + d_{\mathbb{R}}(y, y'). \quad (1.15)$$

Aquesta *distància* permet definir una topologia a $\mathbb{C}$.

Definició 1.9 (Entorn obert) *Un entorn obert de radi ϵ (on $\epsilon > 0$, no necessàriament petit) i centre z_0 es defineix com el conjunt dels nombres z que compleixen $d(z, z_0) < \epsilon$. El representarem per $\mathcal{E}_\epsilon(z_0)$, és a dir,*

$$\mathcal{E}_\epsilon(z_0) = \{z \in \mathbb{C} : d(z, z_0) < \epsilon\}.$$

L'entorn obert $\mathcal{E}_\epsilon(z_0)$ es representa a la figura 1.10. És convenient definir també un entorn “perforat” $\mathcal{E}_\epsilon^*(z_0)$ que *no* contingui el punt z_0 , és a dir,

$$\mathcal{E}_\epsilon^*(z_0) = \{z \in \mathbb{C} : 0 < d(z, z_0) < \epsilon\} = \mathcal{E}_\epsilon(z_0) - \{z_0\}.$$

Definició 1.10 (Successió) *Una successió de nombres complexos és una aplicació del conjunt dels nombres naturals $\mathbb{N}$ al dels complexos $\mathbb{C}$, que associa a cada nombre natural n un nombre complex que anomenem z_n . La successió es designa per $\{z_n\}$.*

Definició 1.11 (Límit d'una successió) *Diem que la successió $\{z_n\}$ té límit i que aquest límit és z si per a cada $\epsilon > 0$ existeix $N \in \mathbb{N}$ tal que $d(z_n, z) < \epsilon$ sempre que $n > N$. Una successió que tingui límit s'anomena successió convergent. Sovint es diu també que $\{z_n\}$ tendeix a z (o que convergeix cap a z) i ho expressem*

$$\lim\{z_n\} = z \quad \text{o també} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z,$$

o simplement

$$\{z_n\} \rightarrow z.$$

Les definicions següents són, òbviament, equivalents a la definició 1.11:

- 1) $\{z_n\} \rightarrow z$ si i només si $\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ tal que $z_n \in \mathcal{E}_\epsilon(z), \forall n > N$,
- 2) $\{z_n\} \rightarrow z$ si i només si $\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ tal que $|z_n - z| < \epsilon, \forall n > N$,

i les usarem indistintament.

Com en el cas de les successions de nombres reals, el límit, si existeix, és únic. També les regles de càlcul de límits són les mateixes que les regles habituals per a successions de nombres reals, ja que la definició de límit a $\mathbb{C}$ és formalment idèntica a la definició a $\mathbb{R}$. Així, per exemple,

$$\lim\{\lambda z_n + \mu w_n\} = \lambda \lim\{z_n\} + \mu \lim\{w_n\} \quad (\lambda, \mu \in \mathbb{C}),$$

$$\lim\{z_n w_n\} = (\lim\{z_n\})(\lim\{w_n\}), \text{ etc.}$$

si els límits dels termes de la dreta existeixen.

Teorema 1.3 *Sigui $z_n = x_n + iy_n$ el terme general d'una successió $\{z_n\}$ de nombres complexos i sigui $z = x + iy$. Aleshores*

$$\{z_n\} \rightarrow z \Leftrightarrow \begin{cases} \{x_n\} \rightarrow x \\ \{y_n\} \rightarrow y. \end{cases}$$

DEMOSTRACIÓ:

- ($\Rightarrow$) Per a tot $\epsilon > 0$, existeix $N \in \mathbb{N}$ tal que $d(z_n, z) < \epsilon$ si $n > N$. La desigualtat (1.14) ens assegura que també $d_{\mathbb{R}}(x_n, x) < \epsilon$ i $d_{\mathbb{R}}(y_n, y) < \epsilon$, si $n > N$. Per tant, $\{x_n\} \rightarrow x$ i $\{y_n\} \rightarrow y$.
- ($\Leftarrow$) Per a tot $\epsilon > 0$, existeix $N \in \mathbb{N}$ tal que $d_{\mathbb{R}}(x_n, x) < \epsilon/2$ i també $d_{\mathbb{R}}(y_n, y) < \epsilon/2$, si $n > N$. Com a conseqüència de la desigualtat (1.15) tenim $d(z_n, z) \leq d_{\mathbb{R}}(x_n, x) + d_{\mathbb{R}}(y_n, y) < \epsilon$, si $n > N$. Per tant, $\{z_n\} \rightarrow z$.

◇

Definició 1.12 (Successió de Cauchy) *La successió $\{z_n\}$ és una successió de Cauchy si $\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ tal que $d(z_n, z_m) < \epsilon$ si $n, m > N$.*

Teorema 1.4 *Sigui $z_n = x_n + iy_n$ el terme general d'una successió $\{z_n\}$ de nombres complexos. Aleshores*

$$\{z_n\} \text{ és de Cauchy } \Leftrightarrow \begin{cases} \{x_n\} \text{ és de Cauchy} \\ \{y_n\} \text{ és de Cauchy.} \end{cases}$$

DEMOSTRACIÓ: És idèntica a la del teorema 1.3.

◇

Es demostra molt fàcilment que tota successió convergent és de Cauchy, però la condició de ser de Cauchy no assegura, en general, la convergència. Recordem que en el cos dels nombres racionals $\mathbb{Q}$ hi ha successions de Cauchy que no tenen límit, i aquesta deficiència és la raó principal per a la construcció del cos dels nombres reals $\mathbb{R}$ en què tota successió de Cauchy és convergent. Aleshores diem que $\mathbb{R}$ és un cos *complet*.

Definició 1.13 (Cos complet) *Un cos on hi ha definida una distància és complet si tota successió de Cauchy és convergent.*

Teorema 1.5 *El cos $\mathbb{C}$ dels nombres complexos és complet.*

DEMOSTRACIÓ: Si $\{z_n\}$ és de Cauchy, també ho són les successions $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ de $\mathbb{R}$ (teorema 1.4). En ser $\mathbb{R}$ complet, $\{x_n\}$ i $\{y_n\}$ són convergents, amb la qual cosa $\{z_n\}$ és també convergent (teorema 1.3).

◇

La resta de conceptes topològics de $\mathbb{C}$ es defineixen de manera anàloga al cas de $\mathbb{R}$. A les definicions següents anomenem *punts* (del pla complex) els elements de $\mathbb{C}$.

Definició 1.14 (Punts interior, exterior i frontera) *Si $D \subset \mathbb{C}$, diem que:*

El punt z_0 és un punt interior a D si existeix algun entorn $\mathcal{E}_\epsilon(z_0) \subset D$.

El punt z_0 és un punt exterior a D si és interior al seu complementari $\bar{D} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{C} - D$.

El punt z_0 és un punt frontera de D si no és ni interior ni exterior a D (això vol dir que tots els seus entorns contenen punts de D i de $\bar{D}$).

Definició 1.15 (Punt d'acumulació) *El punt z_0 és un punt d'acumulació de D si tots els entorns perforats $\mathcal{E}_\epsilon^*(z_0)$ contenen punts de D (o, també, si z_0 és el límit d'una successió convergent de punts de D diferents de z_0).*

Definició 1.16 (Conjunts obert i tancat) *Si $D \subset \mathbb{C}$,*

D és un conjunt obert si tots els seus punts són interiors.

D és un conjunt tancat si conté tots els seus punts d'acumulació (o, també, si conté els límits de totes les seves successions convergents).

Teorema 1.6 Si $D \subset \mathbb{C}$ i $\bar{D}$ és el seu complementari, aleshores

$$D \text{ és tancat} \Leftrightarrow \bar{D} \text{ és obert.}$$

DEMOSTRACIÓ:

- ($\Rightarrow$) Si D és tancat, $\bar{D}$ ha de ser obert perquè si no ho fos, hi hauria algun element de $\bar{D}$ no interior (a $\bar{D}$). Això vol dir que tots els entorns d'aquest punt contindrien punts de D . Seria, per tant, punt d'acumulació de D i hauria de pertànyer a D (tancat).
- ($\Leftarrow$) Si $\bar{D}$ és obert, D ha de ser tancat perquè si no ho fos, hi hauria algun punt d'acumulació de D no contingut a D i, per tant, seria punt de $\bar{D}$ i hauria de ser interior a $\bar{D}$ (obert). Llavors, algun entorn d'aquest punt no contindria cap punt de D i no podria ser punt d'acumulació d'aquest conjunt.

◇

Així doncs, una definició alternativa de conjunt tancat és aquesta:

Definició 1.17 (Conjunt tancat) D és un conjunt tancat si i només si és el complementari d'un conjunt obert.

Cal notar que un conjunt pot no ser ni obert ni tancat. D'altra banda, el conjunt $\mathbb{C}$ i el conjunt buit $\emptyset$ són els únics alhora oberts i tancats.

Definició 1.18 (Conjunt fitat) D és un conjunt fitat si el conjunt dels mòduls dels seus elements és fitat superiorment (o, també, si està contingut en algun entorn de 0).

Definició 1.19 (Conjunt compacte) D és un conjunt compacte si totes les successions d'elements de D contenen alguna successió parcial convergent.

Teorema 1.7 Si $D \subset \mathbb{C}$,

$$D \text{ és compacte} \Leftrightarrow D \text{ és tancat i fitat.}$$

La demostració és similar al cas de $\mathbb{R}$ i és general a les topologies que deriven del concepte de distància.

Definició 1.20 (Conjunt connex) D és un conjunt connex si no és la unió de conjunts disjunts, no buits, cap dels quals conté punts de les fronteres dels altres.

Exemple 1.4 Considerem, dins del pla complex, el conjunt A format pels punts de l'interval $[0, 1]$ de l'eix real, excloent-ne el punt $z = 1/2$. El conjunt A no és connex perquè el podem expressar com $A = A_1 \cup A_2$, on $A_1 = [0, 1/2) \subset \mathbb{C}$ i $A_2 = (1/2, 1] \subset \mathbb{C}$ són disjunts. A més, la frontera de A_1 és l'interval tancat $[0, 1/2]$, que no comparteix cap punt amb A_2 , i anàlogament la frontera de A_2 és $[1/2, 1]$, que no comparteix cap punt amb A_1 .

Exemple 1.5 L'interval $[0, 1]$ de l'eix real de $\mathbb{C}$ és connex. Per demostra-ho suposarem que no ho és per arribar a una contradicció.

Si $[0, 1]$ no és connex, existeixen $B_1, B_2 \subset \mathbb{C}$ que compleixen les condicions:

- i. són no buits i disjunts
- ii. cap d'ells no conté punts de la frontera de l'altre
- iii. $[0, 1] = B_1 \cup B_2$.

De fet, $B_1, B_2 \subset B_1 \cup B_2 = [0, 1] \subset \mathbb{R}$ (condició iii) i, per tant, existeixen dos nombres reals x_1 i x_2 tals que $x_1 \in B_1$ i $x_2 \in B_2$ (condició i). Podem suposar que satisfan $0 \leq x_1 < x_2 \leq 1$ (amb l'ordenació de $\mathbb{R}$) sense pèrdua de generalitat (si $x_2 < x_1$ intercanviem els subíndexs 1 i 2). Sigui

$$x \stackrel{\text{def}}{=} \sup\{B_1 \cap [x_1, x_2]\},$$

és a dir, x és el suprem del conjunt de punts de B_1 que estan a $[x_1, x_2]$. Clarament, $x \in [x_1, x_2] \subset [0, 1]$, però $x \notin B_2$, ja que per la seva definició x pertany a la frontera de B_1 i se satisfà la condició ii. Aleshores $x \in B_1$, ja que tot element de $[0, 1]$ ha de ser de B_1 o de B_2 (condició iii). Com a conseqüència, x no pot pertànyer a la frontera de B_2 (condició ii) i ha de ser un punt exterior a aquest conjunt. Per tant, existeix algun entorn $\mathcal{E}_\delta(x)$ que no conté cap element de B_2 (definició 1.14). En particular, existeix $y \in \mathcal{E}_\delta(x)$, que satisfà $x < y$, amb la qual cosa $y \notin B_1$ (per la seva definició x és fita superior de B_1). Com que y tampoc pertany a B_2 , tenim $y \notin [0, 1]$, però $0 \leq x_1 < y < x_2 \leq 1$, que és una contradicció.

Raonant de forma similar és possible demostrar que qualsevol corba contínua² de $\mathbb{C}$ és un conjunt connex.

²Una corba contínua de $\mathbb{C}$ és un conjunt de punts $z(t)$ descrits en forma paramètrica per $z(t) = x(t) + iy(t)$, on $x(t)$ i $y(t)$ són funcions reals *contínues* de la variable $t \in [a, b]$.

És habitual anomenar *domini* un conjunt obert i connex.

Teorema 1.8 Si D és un domini (obert i connex), dos punts de D sempre es poden connectar entre ells amb una poligonal de longitud finita, continguda a D .

DEMOSTRACIÓ: Sigui $z_0 \in D$ i siguin D_1 i D_2 els conjunts següents:

$$D_1 = \{z \in D, \text{ connectables a } z_0 \text{ amb una poligonal finita (de } D)\},$$

$$D_2 = \{z \in D, \text{ no connectables a } z_0 \text{ amb una poligonal finita}\}.$$

Òbviament es compleix que $D_1 \cup D_2 = D$ i que $D_1 \cap D_2 = \emptyset$. Demostrarem ara que D_1 i D_2 són oberts.

En efecte, si $z_1 \in D_1$, com que D és obert, hi ha algun entorn $\mathcal{E}_{r_1}(z_1) \subset D$. Tots els punts d'aquest entorn es poden connectar a z_0 amb una poligonal finita, ja que es poden connectar a z_1 amb un segment finit i z_1 és connectable a z_0 per hipòtesi. Això vol dir que $\mathcal{E}_{r_1}(z_1) \subset D_1$, és a dir, z_1 és interior a D_1 . Per tant, D_1 és obert.

Similarment, si $z_2 \in D_2$ existeix algun $\mathcal{E}_{r_2}(z_2) \subset D$ (obert). Cap dels punts d'aquest entorn és connectable a z_0 amb una poligonal finita, ja que si algun ho fos, a través d'ell també ho seria z_2 . Així doncs, $\mathcal{E}_{r_2}(z_2) \subset D_2$, és a dir, z_2 és interior a D_2 i, per tant, D_2 també és obert.

Així doncs, D_1 i D_2 són oberts i, per tant, cap d'ells no pot contenir punts frontera de l'altre. Llavors, d'acord amb la definició 1.20, D_2 ha de ser buit i $D = D_1$.

◇

Definició 1.21 (Conjunt simplement connex) Un conjunt connex D és simplement connex si l'interior de qualsevol corba tancada contínua de D pertany també a D (és a dir, si D no té “forats”).

Per tal que l'interior de les corbes tancades estigui ben definit cal que aquestes siguin simples, és a dir, que no es tallin a elles mateixes.

1.4 Problemes

P1.1 Feu les operacions següents:

$$(a) \quad (-1+2i)[(7-5i)+(-3+4i)] \qquad (c) \quad (1-i)^4$$

$$(b) \quad \frac{3-2i}{-1+i} \qquad (d) \quad \frac{3i^{30}-i^{19}}{2i-1}$$

$$(e) \frac{5}{(1-i)(2-i)(3-i)}$$

P1.2 Trobeu x, y reals tals que $3x + 2iy - ix + 5y = 7 + 5i$.

P1.3 Expressen en forma polar:

$$(a) 2 + 2\sqrt{3}i$$

$$(c) -\sqrt{6} - \sqrt{2}i$$

$$(b) -5 + 5i$$

$$(d) -3i$$

P1.4 Trobeu i localitzeu gràficament les arrels següents:

$$(a) (2\sqrt{3} - 2i)^{1/2}$$

$$(c) (-16i)^{1/4}$$

$$(b) (-4 + 4i)^{1/5}$$

$$(d) \sqrt{5 - 12i}$$

P1.5 Resoleu les equacions:

$$(a) z^2 + (2i - 3)z + (5 - i) = 0$$

$$(e) z^2 + (i - 2)z + 3 - i = 0$$

$$(b) z^2(1 - z^2) = 16$$

$$(f) z^4 + z^2 + 1 = 0$$

$$(c) z^2 - 3z + 6 + 2i = 0$$

$$(d) 5z^2 + 2z + 10 = 0$$

$$(g) z^6 + 1 = \sqrt{3}i$$

P1.6 Si $z_1 = 2 + i$, $z_2 = 3 - 2i$ i $z_3 = -1/2 + i\sqrt{3}/2$, calculeu:

$$(a) |3z_1 - 4z_2|$$

$$(d) \left| \frac{2z_2 + z_1 - 5 - i}{2z_1 - z_2 + 3 - i} \right|^2$$

$$(b) z_1^3 - 3z_1^2 + 4z_1 - 8$$

(e) Expressen $2z_3$ en forma polar

$$(c) (z_3^*)^4$$

(f) Expressen z_1 en forma polar

P1.7 Determineu les regions del pla complex següents:

$$(a) \operatorname{Im}(z) > 2$$

$$(b) \operatorname{Re}(z) < 0$$

$$(c) \left| \frac{z - 3}{z + 3} \right| < 2$$

$$(d) |z - 1| < |z + 1| \quad (\text{mostreu que és equivalent a } \operatorname{Re}(z) > 0)$$

P1.8 Representeu gràficament el conjunt de valors z que compleixen

$$(a) |z| > |z - 1|$$

$$(b) |z + 2| > 1 + |z - 2|$$

P1.9 Trobeu les expressions que determinen, en el pla complex:

- (a) un cercle de radi 1 centrat a $z_0 = i$,
- (b) una el·lipse amb focus $\pm 2i$ i eix major igual a 10,
- (c) una circumferència que passa per $z_1 = 1 - i$, $z_2 = 2i$, i $z_3 = 1 + i$.

P1.10 Si z és un nombre complex qualsevol, doneu una interpretació geomètrica del nombre $ze^{i\phi}$, on ϕ és un nombre real.

P1.11 Demostreu que si $z_1, z_2 \neq 0$ i $|z_1 + z_2| = |z_1 - z_2|$, llavors,

- (a) z_1/z_2 és imaginari,
- (b) l'angle que formen z_1 i z_2 amb l'origen és de $\pi/2$.

P1.12 Demostreu que $|x| + |y| \leq \sqrt{2}|x + iy|$. Feu-ho també en coordenades polars.

P1.13 Demostreu que si z és un punt d'una circumferència de radi 1 centrada a $z_0 = 1$, llavors

$$2 \operatorname{Arg}(z) = \operatorname{Arg}(z - 1) = \frac{2}{3} \operatorname{Arg}(z^2 - z).$$

Doneu-ne una interpretació geomètrica.

P1.14 Demostreu que $r_1 e^{i\theta_1} + r_2 e^{i\theta_2} = r e^{i\theta}$ on

$$r = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 + 2r_1 r_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)}, \quad \theta = \arctan \left(\frac{r_1 \sin \theta_1 + r_2 \sin \theta_2}{r_1 \cos \theta_1 + r_2 \cos \theta_2} \right).$$

P1.15 Demostreu que l'equació de la circumferència que passa pels tres punts z_1 , z_2 i z_3 és

$$\frac{(z - z_1)(z_3 - z_2)}{(z - z_2)(z_3 - z_1)} = \left[\frac{(z - z_1)(z_3 - z_2)}{(z - z_2)(z_3 - z_1)} \right]^*.$$

P1.16 Demostreu que si w és qualsevol arrel n -èsima de la unitat diferent d'1, llavors

$$1 + w + w^2 + \cdots + w^{n-1} = 0.$$

Suggeriment: considereu la suma d'una sèrie geomètrica.

P1.17 Demostreu les igualtats

$$1 + \cos \theta + \cos 2\theta + \cdots + \cos n\theta = \frac{\sin \left[\left(\frac{n+1}{2} \right) \theta \right]}{\sin(\theta/2)} \cos(n\theta/2),$$

$$\sin \theta + \sin 2\theta + \cdots + \sin n\theta = \frac{\sin \left[\left(\frac{n+1}{2} \right) \theta \right]}{\sin(\theta/2)} \sin(n\theta/2).$$

SOLUCIONS

S1.1 (a) $-2 + 9i$

(b) $-\frac{5}{2} - \frac{1}{2}i$

(c) -4

(d) $1 + i$

(e) $\frac{1}{2}i$

S1.2 $x = -1, y = 2$

S1.3 (a) $4e^{i\frac{\pi}{3}}$

(b) $5\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$

(c) $2\sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{6}}$

(d) $3e^{i\frac{3\pi}{2}}$

S1.4 (a) $2e^{-\frac{\pi}{12}i}, 2e^{\frac{11\pi}{12}i}$

(b) $\sqrt{2}e^{(\frac{3}{20} + \frac{2}{5}k)i\pi}, k = 0, 1, 2, 3, 4$

(c) $2e^{(-\frac{1}{8} + \frac{1}{2}k)i\pi}, k = 0, 1, 2, 3$

(d) $3 - 2i, -3 + 2i$

S1.5 (a) $z = \pm(1 - 4i)$

(b) $z = \pm(\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{7}}{2}i)$ o bé

$z = \pm(\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{7}}{2}i)$

(c) $2 - 2i$ o bé $1 + 2i$

(d) $(-1 \pm 7i)/5$

(e) $1 - 2i$ o bé $1 + i$

(f) $\frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{3}i)$ o bé $\frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{3}i)$

(g) $\sqrt[6]{2}e^{(k+\frac{1}{3})\frac{\pi i}{3}}$ amb $k = 0, 1, \dots, 5$

S1.6 (a) $\sqrt{157}$

(b) $-7 + 3i$

(c) $-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

(d) 1

(e) $2e^{\frac{2\pi}{3}i}$

(f) $\sqrt{5}e^{\arctan(1/2)i}$

S1.7 Vegeu la figura 1.11.

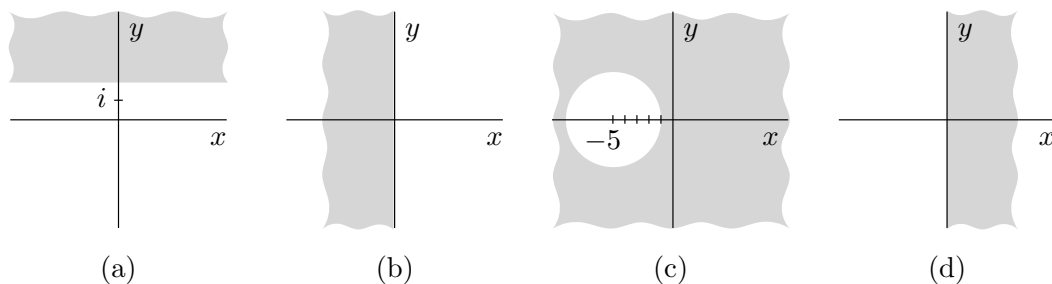


Figura 1.11: Regions corresponents al problema P1.7.

S1.8 Vegeu la figura 1.12. És útil recordar que $|z - z'|$ és la distància $d(z, z')$. A l'apartat (b) obtenim la regió definida pels punts que estan a la dreta

de la corba definida per

$$\frac{x^2}{(1/2)^2} - \frac{y^2}{(\sqrt{15}/2)^2} = 1,$$

que correspon a una hipèrbola de semieix menor $1/2$, semieix major $\sqrt{15}/2$ i centrada a l'origen, tal com indica la figura 1.12.

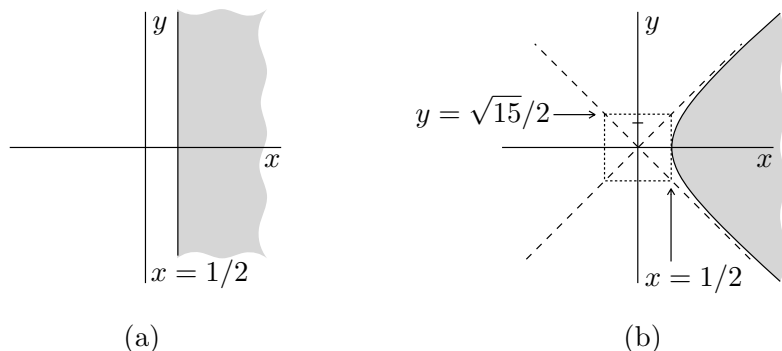


Figura 1.12: Regions corresponents al problema **P1.8**.

S1.9 (a) $|z - i| \leq 1$

(c) $|z + 1|^2 = 5$

(b) $|z + 2i| + |z - 2i| = 10$

S1.10 Si $z = re^{i\theta}$, el nombre $e^{i\phi}z = re^{i(\phi+\theta)}$ és el nombre z girat un angle ϕ al voltant de l'origen.

S1.11 (a) Traiem factor comú la z_1 dins dels mòduls a banda i banda i obtenim $|z_1(1 + z)| = |z_1(1 - z)|$, on definim $z = z_2/z_1$. Com que el mòdul del producte de nombres complexos és el producte de mòduls, $|z_1||1 + z| = |z_1||1 - z|$, és a dir, $|1 + z| = |1 - z|$, ja que $z_1 \neq 0$. Elevant al quadrat la banda esquerra obtenim $|1 + z|^2 = (1 + z^*)(1 + z) = 1 + |z|^2 + z + z^*$, i fent el mateix amb la dreta, $|1 - z|^2 = (1 - z^*)(1 - z) = 1 + |z|^2 - z - z^*$. Igualant, concloem que $\operatorname{Re} z = 0$, és a dir, $z = z_1/z_2$ és imaginari.

(b) Si z és imaginari, aleshores en forma polar $z = r e^{\pm i\pi/2}$ per a algun r i per tant, $z_2 = r e^{\pm i\pi/2} z_1$. És a dir, l'argument de z_2 difereix $\pm\pi/2$ del de z_1 .

S1.12 Notem que si a i b són dos nombres *reals positius*, $a \leq b \Leftrightarrow a^2 \leq b^2$. Per tant,

$$\begin{aligned} |x| + |y| \leq \sqrt{2}|x + iy| &\Leftrightarrow x^2 + y^2 + 2|x||y| \leq 2x^2 + 2y^2 \\ &\Leftrightarrow 0 \leq x^2 + y^2 - 2|x||y| = (|x| - |y|)^2, \end{aligned}$$

que és clarament cert.

En coordenades polars:

$$\begin{aligned} |r \cos \theta| + |r \sin \theta| \leq \sqrt{2}r &\Leftrightarrow r^2 + 2r^2 |\cos \theta \sin \theta| \leq 2r^2 \\ &\Leftrightarrow 0 \leq r^2 (1 - |\sin(2\theta)|), \end{aligned}$$

que també és clarament cert.

S1.13 Recordem, equació (1.8), que l'argument principal d'un nombre complex w és $\text{Arg}(w) = \arctan(\text{Im } w / \text{Re } w) + k\pi$ on $k = 0, \pm 1$, depenent del quadrant on sigui w . Com que z pertany a la circumferència de radi 1 centrada a $z_0 = 1$, tenim que $|z - 1| = 1 \Rightarrow z - 1 = e^{i\theta}$. Així doncs, $\arg(z - 1) = \theta$, que és a l'interval $-\pi < \theta \leq \pi$. D'altra banda, si $z = re^{i\phi}$ tenim $\arg(z) = \phi$ amb $-\pi/2 < \phi \leq \pi/2$ (vegeu la figura 1.13). La relació entre θ i ϕ (arguments de $z - 1$ i z , respectivament) es pot trobar fàcilment, ja que $re^{i\phi} = z = 1 + \cos \theta + i \sin \theta$, i per tant,

$$\tan \phi = \tan[\arg(z)] = \frac{\text{Im } z}{\text{Re } z} = \frac{\sin \theta}{1 + \cos \theta} = \frac{2 \sin(\theta/2) \cos(\theta/2)}{2 \cos^2(\theta/2)} = \tan(\theta/2),$$

és a dir, $\phi = \theta/2 + k\pi$, amb $k = 0, \pm 1$ (ambigüïtat de la tangent), però de la figura es dedueix que $k = 0$, ja que quan θ es mou a l'interval $(-\pi, \pi]$, ϕ ho fa a l'interval $(-\pi/2, \pi/2]$. Per tant, $\phi = \theta/2$, és a dir, $2 \text{Arg}(z) = \text{Arg}(z - 1)$. Notem que la igualtat $\phi = \theta/2$ també es pot obtenir a partir de consideracions geomètriques, ja que el paral·lelogram de vèrtexs $0, 1, z, z - 1$ és un rombe amb els quatre costats iguals a 1. La segona igualtat s'obté observant que

$$\begin{aligned} \arg(z^2 - z) &= \arg z(z - 1) = \arg(z) + \arg(z - 1) \\ &= \phi + \theta = \frac{3}{2}\theta = \frac{3}{2} \arg(z - 1). \end{aligned}$$

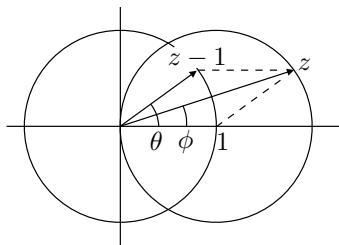


Figura 1.13: Relació entre els arguments de z i $z - 1$ del problema **P1.13**.

S1.14 En forma binomial,

$$(r_1 \cos \theta_1 + r_2 \cos \theta_2) + i(r_1 \sin \theta_1 + r_2 \sin \theta_2) = r \cos \theta + ir \sin \theta.$$

Si igualement els mòduls al quadrat obtenim

$$\begin{aligned} r^2 &= (r_1 \cos \theta_1 + r_2 \cos \theta_2)^2 + (r_1 \sin \theta_1 + r_2 \sin \theta_2)^2 \\ &= r_1^2 + r_2^2 + 2r_1 r_2 \cos(\theta_1 - \theta_2), \end{aligned}$$

on hem utilitzat la identitat $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$.

L'expressió per a θ s'obté trivialment, a partir de

$$\theta = \arctan \left[\frac{\operatorname{Im}(re^{i\theta})}{\operatorname{Re}(re^{i\theta})} \right].$$

S1.15 Si z_1, z_2 , i z_3 pertanyen a una circumferència amb un cert radi r i centrada en un cert z_0 , és a dir, definida per

$$|z - z_0|^2 = (z^* - z_0^*)(z - z_0) = r^2, \quad (1.16)$$

aleshores necessàriament es compleix

$$|z_1 - z_0|^2 = r^2, \quad (1.17)$$

$$|z_2 - z_0|^2 = r^2, \quad (1.18)$$

$$|z_3 - z_0|^2 = r^2. \quad (1.19)$$

Per trobar una equació de la circumferència on només intervinguin z_1, z_2 i z_3 , hem d'escriure les igualtats anteriors en la forma $z - z_0 = r^2/(z^* - z_0^*)$ i restar (1.17) de (1.16). D'aquesta manera obtenim

$$z - z_1 = r^2 \frac{z_1^* - z^*}{(z^* - z_0^*)(z_1 - z_0)} \Rightarrow \frac{z - z_1}{z^* - z_1^*} = \frac{-r^2}{(z^* - z_0^*)(z_1 - z_0)}.$$

Similarment, si restem (1.18) de (1.16) obtenim

$$\frac{z - z_2}{z^* - z_2^*} = \frac{-r^2}{(z^* - z_0^*)(z_2 - z_0)},$$

i si dividim les dues darreres equacions, arribem a

$$\frac{z - z_1}{(z - z_1)^*} \frac{(z - z_2)^*}{z - z_2} = \frac{z_2 - z_0}{z_1 - z_0}.$$

Observem que la banda dreta d'aquesta equació no depèn de z . Això vol dir que hauríem obtingut el mateix resultat usant z_3 en lloc de z , és a dir, (1.19) en lloc de (1.16). Així, arribem a l'equació següent, equivalent a la de l'enunciat:

$$\frac{z - z_1}{(z - z_1)^*} \frac{(z - z_2)^*}{z - z_2} = \frac{z_3 - z_1}{(z_3 - z_1)^*} \frac{(z_3 - z_2)^*}{z_3 - z_2}.$$

S1.16 Si $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} w^k = 1 + w + w^2 + \cdots + w^{n-1}$, tenim $wS_n - S_n = w^n - 1$. Aïllant S_n obtenim $S_n = (w^n - 1)/(w - 1)$. Com que $w^n = 1$ i $w \neq 1$, arribem a $S_n = 0$. La figura 1.14 mostra el cas $n = 6$.

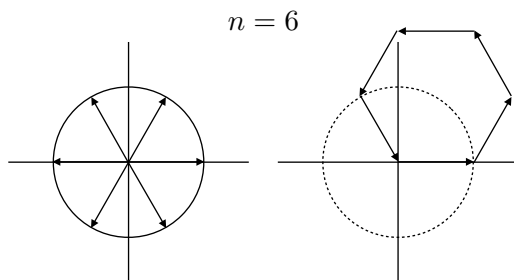


Figura 1.14: Les arrels sisenes de la unitat i la seva suma.

S1.17 Les igualtats corresponen a les parts real i imaginària de

$$S_{n+1}(w) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=0}^n w^k = 1 + w + w^2 + \cdots + w^n,$$

on $w = e^{i\theta}$. Procedint com en el problema anterior arribem a

$$S_{n+1}(w) = \frac{w^{n+1} - 1}{w - 1} = \frac{e^{i(n+1)\theta} - 1}{e^{i\theta} - 1}.$$

Així, doncs, només cal demostrar

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \left[\frac{1 - e^{i(n+1)\theta}}{1 - e^{i\theta}} \right] &= \frac{\sin \left[\left(\frac{n+1}{2} \right) \theta \right]}{\sin(\theta/2)} \cos(n\theta/2), \\ \operatorname{Im} \left[\frac{1 - e^{i(n+1)\theta}}{1 - e^{i\theta}} \right] &= \frac{\sin \left[\left(\frac{n+1}{2} \right) \theta \right]}{\sin(\theta/2)} \sin(n\theta/2). \end{aligned}$$

Notem que

$$\begin{aligned} \frac{1 - e^{i(n+1)\theta}}{1 - e^{i\theta}} &= \frac{1 - e^{i(n+1)\theta}}{1 - e^{i\theta}} \cdot \frac{1 + e^{-i\theta}}{1 + e^{-i\theta}} = \frac{1 + e^{-i\theta} - e^{i(n+1)\theta} - e^{in\theta}}{-2i \sin \theta} \\ &= \frac{1 + \cos \theta - \cos[(n+1)\theta] - \cos n\theta - i\{\sin \theta + \sin[(n+1)\theta] + \sin n\theta\}}{-2i \sin \theta}. \end{aligned}$$

Igualant les parts reals tenim

$$\begin{aligned}\operatorname{Re} \left[\frac{1 - e^{i(n+1)\theta}}{1 - e^{i\theta}} \right] &= \frac{\sin \theta + \sin[(n+1)\theta] + \sin n\theta}{2 \sin \theta} \\ &= \frac{2 \sin(\theta/2) \cos(\theta/2) + 2 \sin[(2n+1)\theta/2] \cos(\theta/2)}{2 \times 2 \sin(\theta/2) \cos(\theta/2)} \\ &= \frac{\sin(\theta/2) + \sin[(2n+1)\theta/2]}{2 \sin(\theta/2)} = \frac{\sin[(n+1)\theta/2] \cos(n\theta/2)}{\sin(\theta/2)},\end{aligned}$$

on hem usat les identitats trigonomètriques

$$\sin a = 2 \sin \left(\frac{a}{2} \right) \cos \left(\frac{a}{2} \right), \quad \sin a + \sin b = 2 \sin \left(\frac{a+b}{2} \right) \cos \left(\frac{a-b}{2} \right).$$

Similarment, igualant les parts imaginàries obtenim la segona igualtat.

2 Funcions

2.1 Funcions de variable complexa

Definició 2.1 (Funció univaluada) Una funció f univaluada d'una variable complexa és una aplicació d'un conjunt $D (\subset \mathbb{C})$ a $\mathbb{C}$,

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} \supset D & \xrightarrow{f} & \mathbb{C} \\ z & \longrightarrow & w = f(z). \end{array}$$

Habitualment, la variable es designa per $z = x + iy$, i la imatge per $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ o, simplement, $w = u + iv$. Les funcions u i v són funcions reals de les dues variables reals x i y , és a dir,

$$\begin{array}{ccc} u : \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longrightarrow & u = u(x, y) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} v : \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longrightarrow & v = v(x, y). \end{array}$$

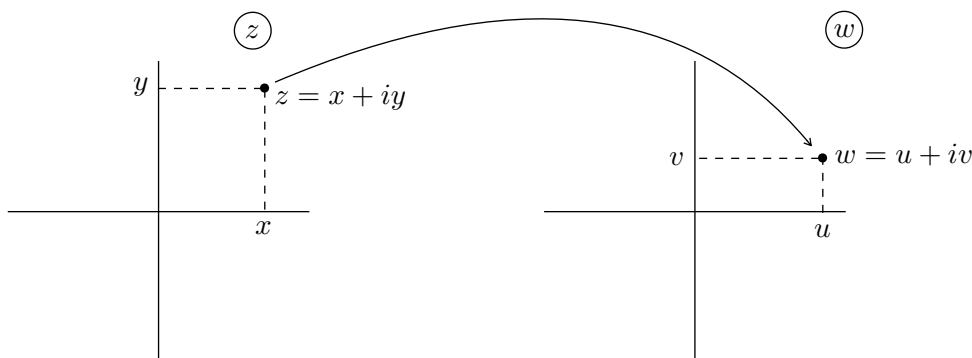


Figura 2.1: La funció f transforma el punt indicat del pla z en el corresponent $w = f(z)$ del pla w . La correspondència s'indica amb una fletxa.

El subconjunt $D (\subset \mathbb{C})$ s'anomena *domini de definició*¹ de f . Veiem, doncs, que una funció² f associa a punts del pla $\mathbb{C}$ original (és costum referir-s'hi com el “pla z ”) punts del pla $\mathbb{C}$ (habitualment anomenat “pla w ”). Podem visualitzar f com una aplicació del pla z al pla w assenyalant amb una fletxa la correspondència entre els diversos punts, tal com s'il·lustra a la figura 2.1.

¹Cal no confondre *domini* (conjunt obert i connex) amb *domini de definició* d'una funció.

²Per definició, una funció és univaluada perquè és una aplicació. Per aquest motiu, normalment ometrem el qualificatiu *univaluada*, llevat que pugui haver-hi confusió, ja que a la secció 2.3 definirem *funció multivaluada*.

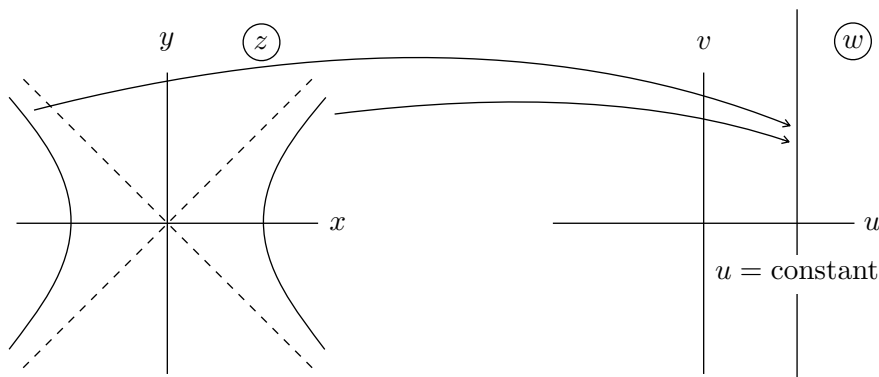


Figura 2.2: La funció $f(z) = z^2$ transforma les dues branques de la hipèrbola $x^2 - y^2 = \text{const.}$ en la recta $u = \text{const.}$

No és possible una representació gràfica d'aquesta associació que sigui una generalització del concepte de gràfica d'una funció real d'una variable real, ja que ens caldria un espai de dimensió quatre. Una possibilitat seria representar gràficament les funcions $u(x, y)$ i $v(x, y)$, però és molt més il·lustratiu representar línies en el pla z i les seves transformades per f en el pla w , com es mostra en l'exemple següent.

Exemple 2.1 Considerem la funció $f(z) = z^2$. Per a aquesta funció tenim $u = x^2 - y^2$ i $v = 2xy$, ja que

$$f(z) = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + i 2xy.$$

Les línies $u = \text{const.}$ en el pla w (vegeu-ne un exemple a la figura 2.2) corresponen a les hipèrboles $x^2 - y^2 = \text{const.}$ del pla z .

Una altra forma de visualitzar la funció és observar com f transforma regions (bidimensionals) del pla z en regions del pla w . Això s'il·lustra en l'exemple següent, que és una continuació de l'exemple 2.1.

Exemple 2.2 Per a la funció $f(z) = z^2$ veiem que les línies $v = \text{const.}$ són les hipèrboles $2xy = \text{const.}$, assenyalades amb traç puntejat ($\cdots$) a la figura 2.3. Així doncs, les regions ombrejades del pla z de la mateixa figura, els punts de les quals es caracteritzen per estar compresos entre dues línies del tipus $u = \text{const.}$ i dues del tipus $v = \text{const.}$, tenen per imatge la regió rectangular del pla w que s'indica.

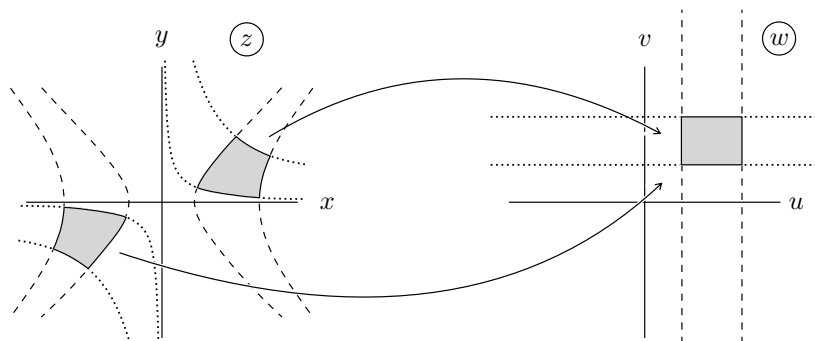


Figura 2.3: Les línies discontinües (---) són les hipèrboles $x^2 - y^2 = \text{const.} > 0$ i les línies de punts (.....), les hipèrboles $xy = \text{const.} > 0$. La funció $f(z) = z^2$ transforma aquestes línies del pla z en les rectes del pla w que s'indiquen amb el mateix tipus de traç. Les dues regions ombrejades del pla z es converteixen en l'únic rectangle ombrejat del pla w .

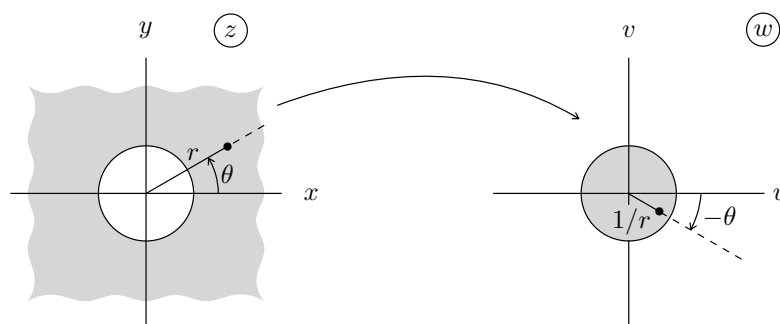


Figura 2.4: La funció $f(z) = 1/z$ transforma l'exterior de la circumferència $|z| = 1$ (regió ombrejada del pla z) en l'interior de la circumferència $|w| = 1$ (regió ombrejada del pla w). La figura també mostra un punt del pla z , de coordenades r i θ , i la seva imatge per f .

2.2 Punt de l'infinit

Considerem la funció

$$f(z) = \frac{1}{z} = \frac{1}{r}e^{-i\theta}, \quad \text{on } z = re^{i\theta}.$$

Veiem que f transforma la circumferència unitat $|z| = 1$ del pla z en ella mateixa $|w| = 1$. Els punts exteriors al cercle unitat ($|z| > 1$) es transformen per l'acció de f en punts del pla w interiors ($|w| < 1$) i a l'inrevés, punts interiors en exteriors (vegeu la figura 2.4). En particular, com més distant de $z = 0$ és un punt del pla z , més a prop de $w = 0$ és la seva imatge *independentment de la direcció en què ens allunyem de $z = 0$* . L'antiimatge de $w = 0$ és el punt de l'infinit ∞ . Notem, doncs, que hi ha un únic infinit al pla complex que podem descriure intuïtivament com l'horitzó “infinitament allunyat” del pla z . Aquest únic punt de l'infinit compactifica el pla complex i li dona l'estructura topològica

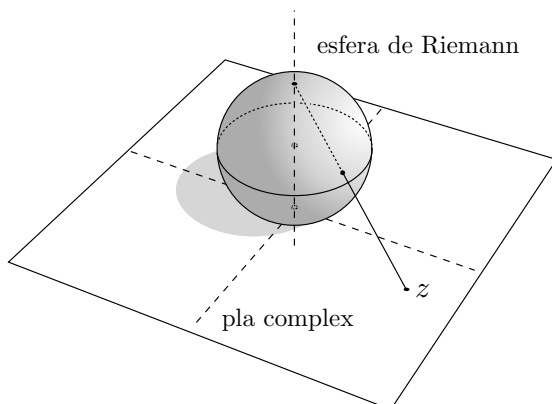


Figura 2.5: Els punts del pla complex es corresponen biunívocament amb els d'una esfera. El punt de l'infinit (és molt important observar que es tracta d'un únic punt) és el que es correspon amb el “pol nord”.

de l'esfera S^2 . Una forma de visualitzar-ho és a través de l'esfera de Riemann tal com es mostra a la figura 2.5. La línia recta que uneix el “pol nord” amb un punt del pla complex determina un únic punt de la superfície esfèrica i estableix una correspondència biunívoca entre els punts de la superfície esfèrica i els del pla, llevat del mateix “pol nord” que no té corresponent en el pla. De fet, el seu corresponent al pla és l'infinit ∞ . Notem que un “paral·lel” de l'esfera es correspon amb un cercle (centrat a l'origen) del pla. Els punts que estan al costat “sud” del “paral·lel” es corresponen amb els punts del pla interiors al cercle, mentre que els que estan al “nord” del “paral·lel” es corresponen amb els punts exteriors al cercle. D'altra banda, com més al “nord” se situa el “paral·lel” més gran és el radi del cercle associat del pla. Així, al “casquet polar” infinitament petit centrat al “pol nord” li correspon l'exterior d'un cercle infinitament gran del pla, és a dir, l'infinit ∞ del pla complex.

Podem preguntar-nos per què a $\mathbb{R}$ parlem de dos infinits ($-\infty$ i $+\infty$) en comptes d'un únic ∞ com en el pla complex. El motiu és que $\mathbb{R}$ és un cos ordenat i fusionar els dos infinits trencaria aquesta propietat (d'una manera intuïtiva, un únic infinit seria més gran i alhora més petit que tots els nombres reals). Com que $\mathbb{C}$ no és un cos ordenat només parlem d'un únic ∞ .

Així doncs, a $\mathbb{C}$, “tendir a ∞ ” vol dir “fer el mòdul més i més gran”. Una forma equivalent d'expressar-ho és que $z \rightarrow \infty$ quan $1/z \rightarrow 0$. Això ens porta a la definició següent.

Definició 2.2 *Diem que*

$$\lim\{z_n\} = \infty \quad \text{si} \quad \lim\left\{\frac{1}{z_n}\right\} = 0.$$

2.3 Funcions multivaluades i superfícies de Riemann

La multiplicitat d'arguments d'un nombre complex (diferint entre ells en múltiples enters de 2π) fa que algunes funcions prenguin més d'un valor en un mateix punt. Les anomenem funcions *multivaluades*. Però, per definició, una funció ha de ser univaluada (les funcions són aplicacions) i cal, per tant, convertir les funcions multivaluades en univaluades. Una manera de fer-ho és estendre el seu domini de definició combinant diverses còpies de $\mathbb{C}$, la qual cosa ens portarà al concepte de *superfície de Riemann*. L'altra manera de fer-ho és seleccionar un dels valors que pren la funció, però això ens obligarà a introduir un *tall de branca*. Normalment adoptarem aquest segon enfocament, però dedicarem aquesta secció a descriure de forma intuïtiva les superfícies de Riemann.

Un exemple senzill de funció multivaluada és la funció $w = \sqrt{z}$, que pren dos valors en cada punt (diem, en aquest cas, que la funció és *bivaluada*). En efecte, si $z = re^{i\theta}$ tenim

$$\begin{aligned} w = \sqrt{z} &= \sqrt{r} e^{i(\frac{\theta}{2} + k\pi)} \quad (\text{amb } k = 0, 1) \\ &= \pm \sqrt{r} e^{i\theta/2}. \end{aligned}$$

Podríem pensar que una manera d'obtenir una funció arrel quadrada univaluada és escollir un dels dos valors de k , per exemple $k = 0$ (en aquest cas, la imatge de z seria $w = \sqrt{r} e^{i\theta/2}$), però no és tan senzill. Si partim de z i recorrem una corba contínua tancada que torni a z , és clar intuïtivament que poden passar les dues coses esquematitzades a la figura 2.6:

- I. Si la corba no envolta l'origen, al final del recorregut l'argument de z ha tornat al seu valor inicial θ . Per tant, el valor de $\sqrt{z}$ no ha canviat. Segueix sent $w = \sqrt{r} e^{i\theta/2}$, consistentment amb l'elecció $k = 0$ que hem fet (corbes I sobre els plans z i w de la figura 2.6).
- II. Si la corba envolta l'origen, al final del recorregut l'argument de z s'ha incrementat en 2π i $\sqrt{z}$ ha passat a ser $w' = \sqrt{r} e^{i(\theta+2\pi)/2} = -\sqrt{r} e^{i\theta/2}$ (corbes II sobre els plans z i w de la figura 2.6), és a dir, hem passat de forma contínua de l'arrel quadrada corresponent a $k = 0$ a la corresponent a $k = 1$. Hem acabat amb dos valors diferents de $\sqrt{z}$.

Per tant, l'aparició del segon valor de $\sqrt{z}$ es produeix quan el camí envolta una vegada (o un nombre senar de vegades) l'origen i no es produeix quan no l'envolta (o ho fa un nombre parell de vegades). L'origen, $z = 0$, s'anomena el *punt d'embranchament* de la funció $\sqrt{z}$.

Si volem considerar només un dels valors mantenint la continuïtat al llarg del recorregut hem d'impedir que les corbes tancades puguin envoltar el punt d'embranchament. Això s'aconsegueix introduint un tall al llarg del semieix real

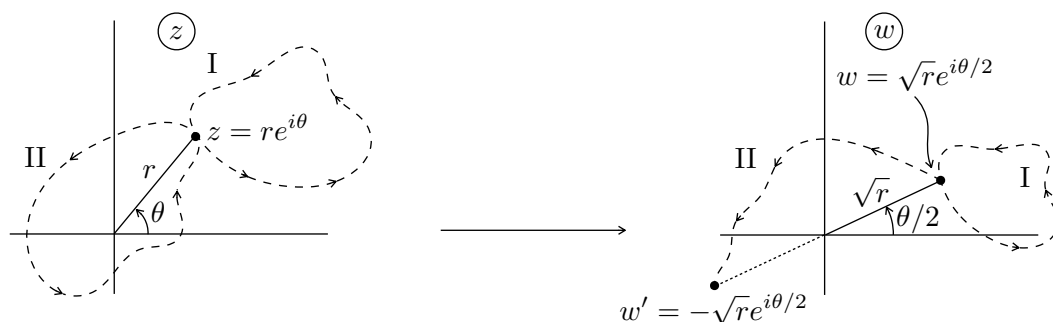


Figura 2.6: Seguint el camí I sobre el pla complex z el valor final de l'arrel quadrada, sobre el pla complex w , és igual a l'inicial (l'imatge del camí tancat I és també un camí tancat), mentre que seguint el camí II, trobem un segon valor (la imatge de II és un camí obert). La diferència rau en el fet que el camí I no envolta el punt d'embranchament $z = 0$, mentre que el II sí que ho fa.

positiu, que anomenem *tall de branca* (de fet, el tall es pot fer des de $z = 0$ en qualsevol direcció). La funció es torna univaluada si considerem que el seu domini de definició són dos plans complexos que etiquetem amb els diferents valors de k . Cadascun d'aquests plans té el mateix tall de branca (que hem escollit al llarg del semieix real positiu). Ens podem moure sobre els plans sense que aparegui un segon valor per a $\sqrt{z}$ perquè el tall de branca impedeix envoltar l'origen (vegeu la figura 2.7).

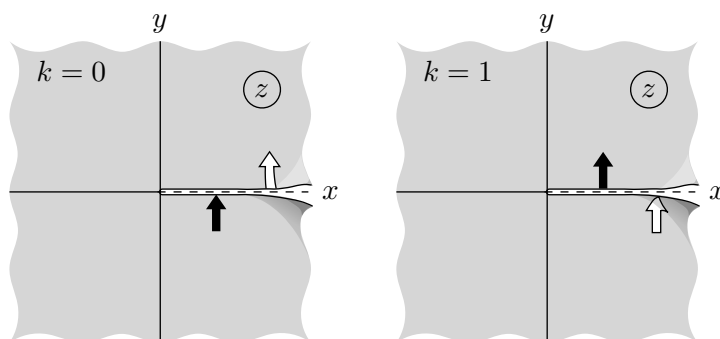


Figura 2.7: La funció $\sqrt{z}$ és univaluada sobre el domini de definició format pels dos plans complexos. Els *talls de branca* impedeixen envoltar el punt $z = 0$ i que $\sqrt{z}$ prengui dos valors sobre un mateix pla. Si enganxem els costats dels talls dels dos plans com indiquen les fletxes obtenim la superfície de Riemann de la figura 2.8, sobre la qual $\sqrt{z}$ segueix sent univaluada.

Evidentment, aquesta funció univaluada és discontinua als talls de branca de cada pla; no obstant això, podem evitar la discontinuïtat si permetem travessar els talls però canviant de pla i passant del costat inferior del tall del pla $k = 0$ al costat superior del corresponent tall del pla $k = 1$ (fletxes negres de la figura 2.7) i del costat inferior del tall del pla $k = 1$ al superior del tall del $k = 0$ (fletxes blanques de la figura 2.7).

Amb els dos plans podem construir un únic domini de definició on la funció $w = \sqrt{z}$ és univaluada, tot i que pren tots els seus possibles valors. Per fer-ho, superposem els dos plans complexos i enganxem els costats dels talls de branca com s'indica al paràgraf anterior: el costat inferior del pla $k = 0$ amb el superior del pla $k = 1$ i l'inferior del pla $k = 1$ amb el superior del pla $k = 0$, tal com es mostra a la figura 2.8. Anomenem *superfície de Riemann* la superfície resultant i *fulls de Riemann* cadascun dels plans que la componen. Sobre la superfície de Riemann, la funció $w = \sqrt{z}$ no té discontinuïtats i és univaluada perquè els dos valors que prenia al punt z els pren en els punts z dels diferents fulls de Riemann.

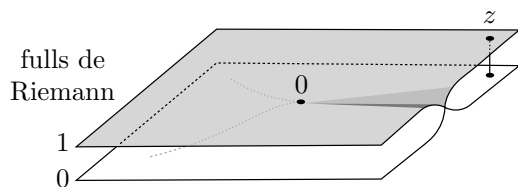


Figura 2.8: Superfície de Riemann de la funció $w = \sqrt{z}$. El punt z de $\mathbb{C}$ ara correspon a dos punts de la superfície de Riemann. Un en el full 0 i l'altre en el full 1. L'origen ($z = 0$) és comú als dos fulls.

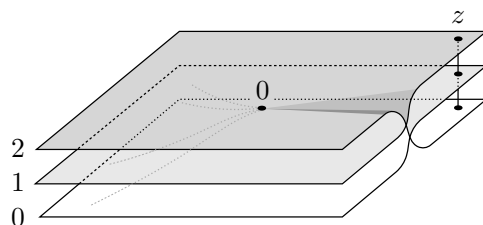


Figura 2.9: Superfície de Riemann de la funció $w = \sqrt[3]{z}$. Cada punt $z \in \mathbb{C}$, llevat de l'origen ($z = 0$), esdevé tres punts diferents de la superfície de Riemann.

Totes aquestes consideracions es poden fer en altres funcions multivaluades. Per exemple, la funció $w = \sqrt[n]{z}$ és n -valuada, el punt d'embranchament és també $z = 0$ i la superfície de Riemann té n fulls amb els costats dels talls de branca enganxats com es mostra, per al cas $n = 3$, a la figura 2.9. La funció $w = \sqrt[n]{z - i}$ té una superfície de Riemann semblant, però amb el punt d'embranchament desplaçat a $z = i$. Hi ha també funcions ∞ -valuades com $\log z$ que veurem a la secció següent.

Normalment, l'elecció $k = 0$ va lligada a l'elecció de l'*argument principal* com a argument de z i la funció univaluada que en resulta se sol anomenar *branca principal* de la funció. Altres eleccions de l'argument principal donen lloc a altres *branques*. Deixem, però, la definició precisa de branca d'una funció multivaluada per a la secció 2.7, un cop definides la continuïtat i la derivabilitat.

Com ja s'ha esmentat, no treballarem amb superfícies de Riemann (o, dit d'una altra manera, ens mourem en un únic full de Riemann). Això ens obligarà a excloure del domini de definició de les branques els seus talls i punts d'embranchament (on no són contínues) i quedar-nos amb els dominis oberts corresponents.

2.4 Funcions elementals

Hem vist que la “recepta” del final de la secció 1.1 sempre funciona, podem manipular els nombres complexos amb les mateixes regles que els nombres reals substituint a tot arreu i^2 per -1 . De fet, el criteri per definir $e^{i\theta}$ ha estat justament mantenir la validesa d’aquesta “recepta”. Utilitzarem ara aquest mateix criteri per definir les altres funcions elementals.

Funció exponencial

Si $z = x + iy$ i utilitzem la “recepta” tenim

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y).$$

Així doncs, *definim*

$$e^z \stackrel{\text{def}}{=} e^x (\cos y + i \sin y)$$

Tenim, per tant (figura 2.10),

$$|e^z| = e^x = e^{\operatorname{Re}(z)}, \quad \arg(e^z) = y = \operatorname{Im}(z).$$

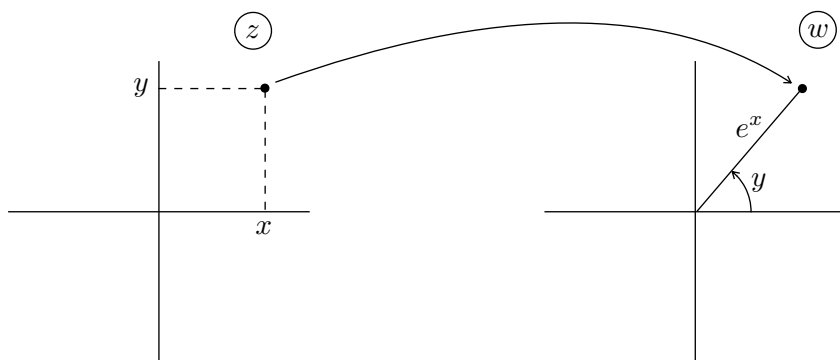


Figura 2.10: Funció e^z .

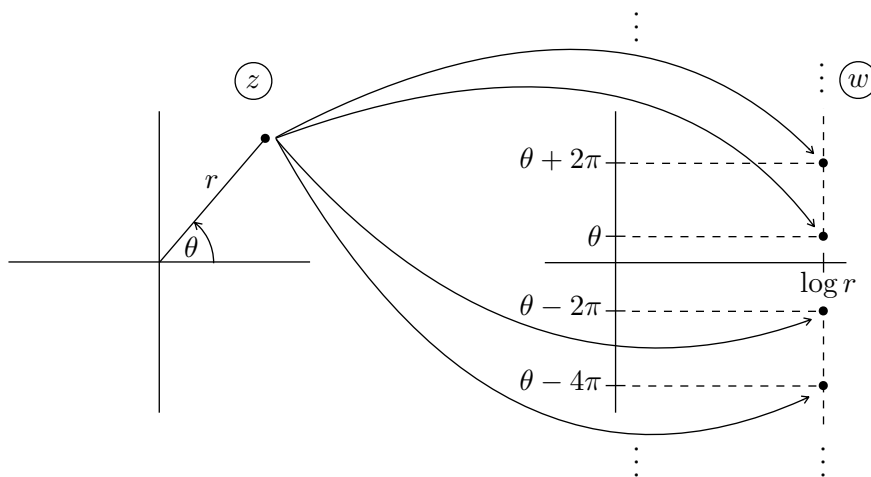
Funció logarítmica

Si ara fem $z = re^{i\theta}$ i utilitzem la “recepta” tenim

$$\log z = \log(re^{i\theta}) = \log r + i\theta.$$

Així doncs, *definim*

$$\log z \stackrel{\text{def}}{=} \log |z| + i \arg z$$

Figura 2.11: Valors de $\log z$.

i tenim, per tant,

$$\operatorname{Re}(\log z) = \log |z|, \quad \operatorname{Im}(\log z) = \arg z.$$

En les expressions anteriors, $\log r = \log |z|$ és el logaritme habitual d'un nombre real positiu. Notem que la indeterminació de l'argument de z en múltiples de 2π addicionals fa que la part imaginària de $\log z$ tingui una infinitat de valors possibles que difereixen entre ells en múltiples de 2π (figura 2.11). La funció logarítmica és, doncs, multivaluada (de fet, és ∞ -valuada). Tal com hem fet amb l'argument, podem parlar de la *branca* (o *determinació*) *principal* de $\log z$ restringint $\arg z$ a l'argument principal, $\operatorname{Arg} z$.

És fàcil comprovar que $\log z$ és la funció inversa de e^z :

$$e^{\log z} = z \quad \text{i, també,} \quad \log(e^z) = z \quad (+2\pi ik).$$

També es pot definir el logaritme de base complexa. Si $a \in \mathbb{C}$ definim

$$\log_a z \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\log z}{\log a}$$

que, òbviament, es compleix quan a i z són reals. Cal, però, fixar prèviament la determinació de $\log a$ (o, equivalentment, l'argument de a). La funció $\log_a z$ és ∞ -valuada.

Potència d'exponent complex i exponencial de base complexa

Si a i b són nombres reals ($a > 0$) tenim $a^b = e^{b \log a}$. Si mantenim aquesta expressió quan a i b són complexos tindrem

$$z^b \stackrel{\text{def}}{=} e^{b \log z}, \quad a^z \stackrel{\text{def}}{=} e^{z \log a}$$

La primera funció (potència d'exponent complex) és, en general, multivaluada³, mentre que la segona (exponencial de base complexa) és univaluada un cop fixada la determinació de l'argument de a (i, per tant, del seu logaritme).

Funcions trigonomètriques

A les fórmules d'Euler (1.13)

$$\sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}, \quad \cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2},$$

substituïm el nombre real θ pel complex z i *definim*

$$\sin z \stackrel{\text{def}}{=} \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad \cos z \stackrel{\text{def}}{=} \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

Definim també

$$\tan z \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\sin z}{\cos z} = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{i[e^{iz} + e^{-iz}]}$$

i, similarment, $\cot z$, $\sec z$ i $\csc z$

$$\cot z \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\tan z}, \quad \sec z \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\cos z}, \quad \csc z \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\sin z}$$

Totes les funcions trigonomètriques són univaluades, ja que la funció exponencial també ho és. Totes tenen periodicitat 2π en la direcció paral·lela a l'eix real, és a dir,

$$\sin z = \sin(z + 2\pi), \quad \cos z = \cos(z + 2\pi), \quad \text{etc.}$$

Compleixen les mateixes relacions que les corresponents funcions de variable real

$$(\cos z)^2 + (\sin z)^2 = 1, \quad \cos(-z) = \cos z, \quad \sin(-z) = -\sin z,$$

$$\sin(z + z') = \sin z \cos z' + \cos z \sin z', \quad \cos(z + z') = \cos z \cos z' - \sin z \sin z', \quad \text{etc.}$$

Les funcions $\sin z$ i $\cos z$ únicament s'anul·len, respectivament, als punts $n\pi$ i $(n + 1/2)\pi$ de l'eix real ($n \in \mathbb{Z}$).

³Però si $b \in \mathbb{Z}$, z^b és univaluada i $z^{1/b}$ és b -valuada.

Funcions hiperbòliques

Novament, substituïm x per z a les funcions hiperbòliques reals

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \text{etc.}$$

i *definim*

$$\sinh z \stackrel{\text{def}}{=} \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \quad \cosh z \stackrel{\text{def}}{=} \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

i també

$$\tanh z \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\sinh z}{\cosh z} = \frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}}, \quad \text{etc.}$$

Les funcions hiperbòliques són també univaluades. Totes tenen periodicitat $2\pi i$ en la direcció paral·lela a l'eix imaginari, és a dir,

$$\sinh z = \sinh(z + 2\pi i), \quad \cosh z = \cosh(z + 2\pi i), \quad \text{etc.}$$

Compleixen les mateixes relacions que les corresponents funcions de variable real

$$(\cosh z)^2 - (\sinh z)^2 = 1, \quad \cosh(-z) = \cosh z, \quad \sinh(-z) = -\sinh z,$$

$$\begin{aligned} \sinh(z + z') &= \sinh z \cosh z' + \cosh z \sinh z', \\ \cosh(z + z') &= \cosh z \cosh z' + \sinh z \sinh z', \quad \text{etc.} \end{aligned}$$

Les funcions $\sinh z$ i $\cosh z$ únicament s'anul·len, respectivament, als punts $n\pi i$ i $(n + 1/2)\pi i$ de l'eix imaginari ($n \in \mathbb{Z}$).

Les funcions trigonomètriques i les hiperbòliques estan relacionades, com fàcilment s'infereix de les seves definicions. Així, tenim

$$\begin{aligned} \cosh z &= \cos(iz), & \cos z &= \cosh(iz), \\ i \sinh z &= \sin(iz), & i \sin z &= \sinh(iz). \end{aligned}$$

Funcions trigonomètriques inverses

Aquestes funcions les podem expressar en termes del logaritme. Veiem-ho amb detall per al cas de la funció $\arcsin z$. Si $w = \arcsin z$, tenim que $\sin w = z$, és a dir,

$$\frac{e^{iw} - e^{-iw}}{2i} = z, \quad \text{o també} \quad e^{iw} - 2iz - e^{-iw} = 0,$$

i si multipliquem per e^{iw} tenim

$$(e^{iw})^2 - 2iz(e^{iw}) - 1 = 0.$$

D'aquí podem aïllar e^{iw} (és una equació de segon grau)

$$e^{iw} = iz \pm \sqrt{1 - z^2},$$

d'on podem fàcilment obtenir w . Tenim, doncs,

$$\arcsin z = -i \log \left(iz \pm \sqrt{1 - z^2} \right)$$

Aquesta funció és multivaluada a causa del logaritme (multivaluat) i de l'arrel (bivaluada). Un càlcul similar ens porta a

$$\arccos z = -i \log \left(z \pm \sqrt{z^2 - 1} \right), \quad \arctan z = \frac{i}{2} \log \left(\frac{i + z}{i - z} \right)$$

Funcions hiperbòliques inverses

Procedint com en el cas anterior tenim

$$\begin{aligned} \operatorname{arsinh} z &= \log \left(z \pm \sqrt{z^2 + 1} \right), & \operatorname{arccosh} z &= \log \left(z \pm \sqrt{z^2 - 1} \right), \\ \operatorname{arctanh} z &= \frac{1}{2} \log \left(\frac{1 + z}{1 - z} \right). \end{aligned}$$

2.5 Límit d'una funció

Definició 2.3 *Diem que el límit de $f(z)$ quan z tendeix a z_0 és w_0 , i ho expressem*

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_0,$$

si $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ tal que $d(f(z), w_0) < \epsilon$ sempre que $0 < d(z, z_0) < \delta$.

Una definició equivalent és aquesta:

Definició 2.4 $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_0$ si per a tota successió $\{z_n\}$ tal que $\{z_n\} \rightarrow z_0$ es compleix que $\{f(z_n)\} \rightarrow w_0$.

Si el límit existeix és únic. Intuïtivament això és evident, ja que cap successió (i, en particular, tampoc la successió $\{f(z_n)\}$) pot acostar-se *arbitràriament* a dos punts w_0 i w'_0 diferents, separats per una distància estrictament més gran que zero.

Les regles del càlcul de límits són les que coneixem del càlcul en variable real, ja que la definició de límit és formalment idèntica al cas real, com ja s'ha esmentat al capítol 1 en referència als límits de successions.

La definició 2.4 i el teorema 1.3 ens porten al resultat següent:

Teorema 2.1 Sigui $z = x + iy$, $f = u + iv$, $z_0 = x_0 + iy_0$ i $w_0 = a + ib$. Aleshores

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} u(x, y) = a, \\ \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} v(x, y) = b. \end{cases}$$

D'acord amb la definició 2.2, el significat de “tendir a infinit” i de “límit quan z tendeix a infinit” és:

Definició 2.5 (Límit ∞ i límit quan $z \rightarrow \infty$)

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty \quad & \text{si} \quad \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{f(z)} = 0, \\ \lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = w \quad & \text{si} \quad \lim_{z \rightarrow 0} f\left(\frac{1}{z}\right) = w. \end{aligned}$$

2.6 Continuïtat

Definició 2.6 (Continuïtat) La funció $f(z)$ és contínua a z_0 si es compleix

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0).$$

Aquesta definició pressuposa que tant $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ com $f(z_0)$ existeixen (és a dir, z_0 pertany al domini de definició de f). El teorema 2.1 ens porta al resultat següent:

Teorema 2.2 Amb la notació del teorema 2.1, la funció $f(z)$ és contínua a z_0 si i només si les funcions $u(x, y)$ i $v(x, y)$ són contínues a (x_0, y_0) .

Diem que $f(z)$ és contínua en un subconjunt obert D de $\mathbb{C}$ si ho és en tots els punts de D .

Definició 2.7 (Continuïtat uniforme) La funció $f(z)$ és uniformement contínua a D ($D \subset \mathbb{C}$) si $\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ dependent només de ϵ , tal que $d[f(z), f(z')] < \epsilon$ sempre que $d(z, z') < \delta$, on z i z' són punts qualssevol de D .

Teorema 2.3 Si D és compacte i $f(z)$ és contínua a D , aleshores $f(z)$ és uniformement contínua a D .

La demostració és idèntica al cas de les funcions de variable real.

2.7 Derivació i analiticitat

Definició 2.8 (Derivada) *La funció $f(z)$ és derivable a z_0 si existeix el límit*

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \stackrel{\text{def}}{=} f'(z_0). \quad (2.1)$$

Si $f'(z_0)$ existeix, s'anomena la derivada de f a z_0 .

L'expressió anterior també es pot escriure

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta z},$$

on $\Delta z \stackrel{\text{def}}{=} z - z_0$ i $\Delta f \stackrel{\text{def}}{=} f(z) - f(z_0) = f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)$.

Teorema 2.4 *Si $f(z)$ és derivable a z_0 , aleshores és contínua a z_0 .*

DEMOSTRACIÓ: Si $f'(z_0)$ existeix, el numerador de (2.1) ha de tendir a 0 quan $z \rightarrow z_0$, és a dir, $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$.

◇

Les regles de derivació que coneixem del càlcul en una variable real són també vàlides en una variable complexa, ja que, com passa amb els límits de successions i funcions, les definicions que hem donat són formalment idèntiques a les corresponents al cas real. Això inclou la derivada de la suma, del producte, etc., i les regles de la cadena i de L'Hôpital (per resoldre límits indeterminats).

Exemple 2.3 Calculem el límit

$$\lim_{z \rightarrow i\pi} \frac{\sinh(2z)}{e^z + 1}.$$

Observem primer que el límit és una indeterminació del tipus 0/0

$$\lim_{z \rightarrow i\pi} \frac{\sinh(2z)}{e^z + 1} = \frac{\sinh(2\pi i)}{e^{i\pi} + 1} = \frac{i \sin(2\pi)}{-1 + 1} = \frac{0}{0}.$$

Usem la regla de L'Hôpital

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow i\pi} \frac{\sinh(2z)}{e^z + 1} &= \lim_{z \rightarrow i\pi} \frac{[\sinh(2z)]'}{(e^z + 1)'} = \lim_{z \rightarrow i\pi} \frac{2 \cosh(2z)}{e^z} \\ &= \frac{2 \cosh(2\pi i)}{e^{i\pi}} = \frac{2 \cos(2\pi)}{-1} = -2, \end{aligned}$$

on hem suposat sense demostrar-ho que $(e^z)' = e^z$ i $(\sinh z)' = \cosh z$, com passa en el cas real. La demostració és a l'exemple 2.4.

Teorema 2.5 (Condicions de Cauchy-Riemann) *Si la funció $f(z)$ és derivable a $z_0 = x_0 + iy_0$, aleshores les funcions $u(x, y)$ i $v(x, y)$ satisfan les condicions següents:*

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}u(x, y)\Big|_{(x_0, y_0)} &= \frac{\partial}{\partial y}v(x, y)\Big|_{(x_0, y_0)}, \\ -\frac{\partial}{\partial x}v(x, y)\Big|_{(x_0, y_0)} &= \frac{\partial}{\partial y}u(x, y)\Big|_{(x_0, y_0)}.\end{aligned}$$

Aquestes condicions s'anomenen condicions de Cauchy-Riemann.

DEMOSTRACIÓ: En ser $f(z)$ derivable a z_0 tenim

$$f'(z_0) = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{\Delta u + i \Delta v}{\Delta x + i \Delta y}.$$

El límit és independent del camí escollit per acostar $(\Delta x, \Delta y)$ a $(0, 0)$. Fem-ho de dues maneres:

1) Mantenint $\Delta x = 0$, aleshores

$$\begin{aligned}f'(z_0) &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta u + i \Delta v}{i \Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta y} - i \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta y} \\ &= \frac{\partial v}{\partial y}\Big|_0 - i \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_0,\end{aligned}$$

on el subíndex 0 indica que les derivades parcials s'han d'avaluar en el punt (x_0, y_0) .

2) Mantenint $\Delta y = 0$, aleshores

$$\begin{aligned}f'(z_0) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u + i \Delta v}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + i \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} \\ &= \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_0 + i \frac{\partial v}{\partial x}\Big|_0.\end{aligned}$$

Si igualem les dues expressions de $f'(z_0)$ obtenim les condicions de Cauchy-Riemann.

◇

Quan no hi hagi confusió escriurem

$$u_x \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial u}{\partial x}, \quad u_y \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial u}{\partial y}, \quad v_x \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial v}{\partial x}, \quad v_y \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial v}{\partial y}.$$

Les condicions de Cauchy-Riemann en el punt z_0 són, per tant, necessàries per tal que f sigui derivable a z_0 . No són, però, suficients, llevat que exigim també la continuïtat de les derivades parcials de primer ordre de u i v en el punt (x_0, y_0) .

Teorema 2.6 *Si $u(x, y)$ i $v(x, y)$ tenen derivades parcials de primer ordre contínues a (x_0, y_0) i satisfan les condicions de Cauchy-Riemann en aquest punt, aleshores $f(z) \stackrel{\text{def}}{=} u(x, y) + iv(x, y)$ és derivable a $z_0 \stackrel{\text{def}}{=} x_0 + iy_0$.*

DEMOSTRACIÓ: Hem de demostrar l'existència del límit

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta z} = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{\Delta u + i \Delta v}{\Delta x + i \Delta y}.$$

Per fer-ho, observem que

$$\Delta u = u(x, y) - u(x_0, y_0) = [u(x, y) - u(x_0, y)] + [u(x_0, y) - u(x_0, y_0)].$$

Aplicant el teorema del valor mitjà als dos darrers termes d'aquesta expressió tenim

$$\Delta u = (x - x_0) u_x(\xi, y) + (y - y_0) u_y(x_0, \eta),$$

on ξ és un nombre real comprès entre x_0 i x , i η és un nombre real comprès entre y_0 i y . Òbviament, quan $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$ (és a dir, $\Delta x, \Delta y \rightarrow 0$) també $(\xi, \eta) \rightarrow (x_0, y_0)$. La continuïtat de u_x i u_y en el punt (x_0, y_0) ens assegura que

$$u_x(\xi, y) = u_x(x_0, y_0) + \epsilon_x^u, \quad u_y(x_0, \eta) = u_y(x_0, y_0) + \epsilon_y^u,$$

on $\epsilon_x^u, \epsilon_y^u \rightarrow 0$ quan $\Delta x, \Delta y \rightarrow 0$. Tenim, doncs,

$$\Delta u = \Delta x [u_x(x_0, y_0) + \epsilon_x^u] + \Delta y [u_y(x_0, y_0) + \epsilon_y^u].$$

De manera anàloga arribem a

$$\Delta v = \Delta x [v_x(x_0, y_0) + \epsilon_x^v] + \Delta y [v_y(x_0, y_0) + \epsilon_y^v],$$

on també $\epsilon_x^v, \epsilon_y^v \rightarrow 0$ quan $\Delta x, \Delta y \rightarrow 0$. Tenim doncs,

$$\frac{\Delta f}{\Delta z} = \frac{(u_x + \epsilon_x^u)\Delta x + (u_y + \epsilon_y^u)\Delta y + i[(v_x + \epsilon_x^v)\Delta x + (v_y + \epsilon_y^v)\Delta y]}{\Delta x + i \Delta y},$$

on hem suprimit (x_0, y_0) en totes les derivades parcials per alleugerir la notació. Usant les condicions de Cauchy-Riemann tenim

$$\frac{\Delta f}{\Delta z} = \frac{(\Delta x + i \Delta y)(u_x + iv_x)}{\Delta x + i \Delta y} + \frac{\Delta x(\epsilon_x^u + i \epsilon_x^v) + \Delta y(\epsilon_y^u + i \epsilon_y^v)}{\Delta x + i \Delta y},$$

d'on es dedueix que

$$\left| \frac{\Delta f}{\Delta z} - (u_x + iv_x) \right| \leq \left| \frac{\Delta x(\epsilon_x^u + i\epsilon_x^v)}{\Delta x + i\Delta y} \right| + \left| \frac{\Delta y(\epsilon_y^u + i\epsilon_y^v)}{\Delta x + i\Delta y} \right|.$$

Com que $|\Delta x| \leq |\Delta x + i\Delta y|$ i $|\Delta y| \leq |\Delta x + i\Delta y|$, tenim finalment que per a qualsevol $\epsilon > 0$, si escollim Δx i Δy prou petits, podem aconseguir que

$$\left| \frac{\Delta f}{\Delta z} - (u_x + iv_x) \right| \leq |\epsilon_x^u| + |\epsilon_x^v| + |\epsilon_y^u| + |\epsilon_y^v| < \epsilon,$$

és a dir,

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta z} = u_x + iv_x \quad (= u_x - i u_y = v_y + iv_x = v_y - i u_y).$$

L'existència de $f'(z_0)$ queda, per tant, demostrada.

◇

Exemple 2.4 Comprovem que la funció $f(z) = e^z$ és derivable a tot el pla complex i que $f'(z) = e^z$.

De la definició de e^z tenim

$$u = e^x \cos y, \quad v = e^x \sin y,$$

i, per tant,

$$u_x = e^x \cos y, \quad u_y = -e^x \sin y, \quad v_x = e^x \sin y, \quad v_y = e^x \cos y.$$

Totes aquestes derivades són contínues a qualsevol $z \in \mathbb{C}$ i observem que $u_x = v_y$, $-v_x = u_y$, és a dir, se satisfan les condicions de Cauchy-Riemann. Així doncs, el teorema 2.6 ens garanteix que $f(z) = e^z$ és derivable a tot $\mathbb{C}$. A més,

$$f'(z) = u_x + iv_x = e^x \cos y + ie^x \sin y = e^z.$$

A partir d'aquest resultat també podem demostrar que $f(z) = \sinh z$ és derivable i que $f'(z) = \cosh z$ a tot el pla complex. Si partim de la definició $\sinh z = (e^z - e^{-z})/2$ i usem les regles elementals de derivació, que, com s'ha esmentat, són aplicables a funcions d'una variable complexa, trobem

$$f'(z) = \left(\frac{e^z - e^{-z}}{2} \right)' = \frac{(e^z)' - (e^{-z})'}{2} = \frac{e^z - (-e^{-z})}{2} = \cosh z.$$

Teorema 2.7 Una funció $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ és constant en un domini D (obert i connex) si i només si $f'(z) = 0$, $\forall z \in D$.

DEMOSTRACIÓ: A partir de (2.1) és evident que, si $f(z)$ és constant a D , la seva derivada és zero en tots els punts de D . Per demostrar el recíproc notem que si $f'(z) = 0$ tenim $u_x + iv_x = v_y - iu_y = 0$, és a dir, $u_x = u_y = v_x = v_y = 0$ a tot D . Aquestes derivades parcials són contínues a D , ja que són nul·les a tot arreu. Això implica que les funcions $u(x, y)$ i $v(x, y)$ són diferenciables a tot D i que els seus gradients són $\nabla u = \nabla v = (0, 0)$. Per tant, totes les derivades direccionals de u i de v són 0 (recordem que la derivada direccional de u en la direcció $\mathbf{n}$ és $\mathbf{n} \cdot \nabla u$). Això fa que les funcions u i v siguin constants al llarg de qualsevol segment rectilini de D . El teorema 1.8 ens garanteix que dos punts qualssevol del conjunt obert i connex D es poden connectar amb un nombre finit d'aquests segments i, per tant, $f = u + iv$ és constant a tot D .

◇

Definició 2.9 (Analiticitat) Diem que la funció $f(z)$ és analítica (o holomorfa⁴) a z_0 si és derivable a z_0 i en algun entorn $\mathcal{E}_\epsilon(z_0)$ de z_0 .

Exemple 2.5 Considerem la funció $f(z) = |z|^2$. Volem veure que $f'(z)$ només existeix per a $z = 0$. Comencem observant que:

$$\frac{\Delta f}{\Delta z} = \frac{(z + \Delta z)(z^* + \Delta z^*) - zz^*}{\Delta z} = z^* + \Delta z^* + z \frac{\Delta z^*}{\Delta z}.$$

Considerem separatament els casos $z = 0$ i $z \neq 0$.

Si $z = 0$ tenim $f'(0) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta z} = 0$, ja que $|\Delta z^*/\Delta z| = 1$.

Si $z \neq 0$, el límit $\lim_{\Delta z \rightarrow 0} (\Delta z^*/\Delta z)$ no existeix perquè si $\Delta y = 0$ tenim

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta z^*}{\Delta z} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1,$$

mentre que si $\Delta x = 0$, tenim

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta z^*}{\Delta z} = \lim_{i \Delta y \rightarrow 0} \frac{-i \Delta y}{i \Delta y} = -1.$$

⁴Estrictament, aquesta és la definició de funció *holomorfa* a z_0 . La definició de funció *analítica* (també vàlida per a funcions de variable real) és que sigui la suma d'una sèrie de potències de $z - z_0$. Tanmateix, al capítol 4 veurem que $f(z)$ és holomorfa a z_0 si i només si és analítica en aquest punt. En altres paraules, per a les funcions de variable complexa els termes *holomorfa* i *analítica* són sinònims. En endavant, usarem únicament el terme *analítica*.

Així doncs, el límit

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta z} = z^* + z \left(\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta z^*}{\Delta z} \right)$$

no existeix i, per tant, tot i que $f(z) = |z|^2$ és derivable a $z = 0$, *no* és analítica en aquest punt.

Definició 2.10 La funció $f(z)$ és analítica a $D (\subset \mathbb{C})$ si ho és en tots els punts de D . Direm que $f(z)$ és entera si és analítica a tot el pla complex.

Notem que si D és un conjunt obert, $f(z)$ és analítica a D si i només si és derivable a D , és a dir, en un conjunt obert analiticitat i derivabilitat són conceptes equivalents. Si el conjunt D no és obert, llavors $f(z)$ és analítica a D si i només si és derivable en algun conjunt obert que contingui D .

Ara estem en condicions de donar una definició precisa de branca d'una funció multivaluada.

Definició 2.11 (Branca d'una funció multivaluada) Una branca d'una funció multivaluada $f(z)$ és qualsevol funció univaluada $F(z)$ analítica en algun domini (obert) D en cada punt del qual $F(z)$ pren algun dels valors possibles de $f(z)$.

Sovint s'utilitza “branca” de manera més informal, incloent el tall de branca en el domini de definició, amb la qual cosa la “branca” és discontinua. Per exemple, una branca del logaritme és $\log z = \log r + i\theta$ amb $\theta \in (0, 2\pi)$, però també parlem de la “branca” amb $\theta \in [0, 2\pi)$, que és discontinua sobre l'eix real positiu.

Exemple 2.6 Sigui $z = re^{i\theta}$,

- 1) La funció $F(z) \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{r}e^{i\theta/2}$ és univaluada i analítica en el domini

$$D = \{z \in \mathbb{C} : r > 0, -\pi < \theta < \pi\}$$

(D no conté ni el tall de branca, la semirecta $(-\infty, 0]$, ni el punt d'embranchament, $z = 0$). És, per tant, una branca de la funció multivaluada $f(z) = \sqrt{z}$. Informalment, també parlem de “branca” quan $-\pi < \theta \leq \pi$, tot i que aquesta és discontinua a l'eix real negatiu.

- 2) La funció $F(z) \stackrel{\text{def}}{=} \log |z| + i \operatorname{Arg}(z)$ és analítica en el mateix domini D . És, doncs, una branca (la branca principal) de $\log z$.

- 3) En el capítol 4 estudiarem les sèries de potències i veurem (problema **P4.8**) que

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} z^n$$

és la sèrie de Taylor de $f(z) = 1/\sqrt{1-z}$. També veurem que $F(z)$ és analítica a $|z| < 1$. Per tant, $F(z)$ és una branca de $f(z) = 1/\sqrt{1-z}$ en aquesta regió.

- 4) La funció

$$F(z) = \begin{cases} \sqrt{r}e^{i\theta/2}, & \text{si } r \in \mathbb{Q} \\ -\sqrt{r}e^{i\theta/2}, & \text{si } r \notin \mathbb{Q}, \end{cases}$$

tot i que pren un dels valors possibles de $\sqrt{z}$ a qualsevol punt de D , no és cap branca de $\sqrt{z}$ perquè ni tan sols és contínua (en cap domini).

Definició 2.12 (Singularitat aïllada) *El punt z_0 és una singularitat aïllada de la funció $f(z)$ si existeix $\epsilon > 0$ tal que f és analítica a $\mathcal{E}_\epsilon^*(z_0)$, però $f'(z_0)$ no existeix.*

Teorema 2.8 *Si $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ és analítica en un domini D (obert i connex), aleshores $f(z)$ és constant a D si, i només si, $|f(z)|$ és constant a D .*

DEMOSTRACIÓ: És evident que si $f(z)$ és constant, també ho és el seu mòdul. Per demostrar el recíproc, observem que si $f(z)$ i $f^*(z)$ són ambdues analítiques a D , llavors han de ser constants. Això és conseqüència de les condicions de Cauchy-Riemann aplicades a f i a f^*

$$\begin{aligned} f = u + iv \text{ analítica} &\Rightarrow u_x = v_y, u_y = -v_x \\ f^* = u - iv \text{ analítica} &\Rightarrow u_x = -v_y, u_y = v_x, \end{aligned}$$

d'on deduïm que $u_x = u_y = v_x = v_y = 0$ a tot D . Així doncs, $f'(z) = 0$ a tot D i, d'acord amb el teorema 2.7, $f(z)$ és constant.

Suposem ara que $|f(z)| = K$ (constant) a D . Si $K = 0$, el teorema es compleix trivialment, ja que també $f(z) = 0$. Si $K \neq 0$, les funcions $f(z)$ i $f^*(z)$ no s'anul·len enlloc i tenim

$$f^*(z) = \frac{f(z)f^*(z)}{f(z)} = \frac{|f(z)|^2}{f(z)} = \frac{K^2}{f(z)}.$$

Per tant, com que $f(z)$ és analítica (i no s'anul·la) a D , $f^*(z)$ també és analítica i, com acabem de veure, això implica que $f(z)$ és constant a D .

◇

2.8 Problemes

P2.1 Trobeu tots els valors de:

- | | | |
|--------------------------------|---------------------------|--------------------------------|
| (a) $(i - 1)^i$ | (g) $\tan i$ | (m) $\arccos 2$ |
| (b) $(-1)^{1/\pi}$ | (h) $i^{\log 3}$ | (n) $\arccos i$ |
| (c) $1^{\sqrt{2}}$ | (i) $\log(e^{-i\pi/2}) i$ | (o) $\operatorname{arccosh} i$ |
| (d) $\arctan(2i)$ | (j) $\log(-3)$ | (p) $(\cos i)^{1/3}$ |
| (e) $\operatorname{arctanh} 0$ | (k) $\log(\sqrt{3} - i)$ | (q) $(\sin i)^{3/5}$ |
| (f) $\log(-e^2 i)$ | (l) $\arcsin 2$ | |

P2.2 Quin és el domini de definició que se sobreentén en les funcions següents?

- (a) $f(z) = 1/(z^2 + 4)$ (b) $f(z) = z/(z + z^*)$ (c) $f(z) = z/\sin z$

P2.3 Demostreu que $z = \pm i$ són punts d'embranchament de $(z^2 + 1)^{1/3}$.

P2.4 Estudieu els punts d'embranchament de $f(z) = \sqrt{(4 - z)(4 + z^2)}$.

P2.5 Considereu la branca de la funció $f(z) = \sqrt{1 - z^2}$, en la qual $f(0) = 1$. Calculeu el seu valor en el punt de la recta real $z = p > 1$ si ens movem des de l'origen a aquest punt evitant el punt $z = 1$ per la part superior del pla complex i preservant continuïtat.

P2.6 Considereu una branca de $w = \log z$. Demostreu que transforma

- (a) cercles amb centre a l'origen del pla z en rectes paral·leles a l'eix v del pla w ,
- (b) rectes que passen per l'origen del pla z en rectes paral·leles a l'eix u del pla w ,
- (c) tot el pla z en una franja d'amplada 2π del pla w .

P2.7 Trobeu totes les solucions de:

- | | | |
|---------------------------|---------------------------|--------------------------|
| (a) $e^z = -2$ | (d) $e^{2z-1} = 1$ | (g) $\sin z = i\sqrt{2}$ |
| (b) $e^{4z} = i$ | (e) $\sinh z = i\sqrt{2}$ | |
| (c) $e^z = 1 + \sqrt{3}i$ | (f) $z^i = 1 + i$ | |

P2.8 Demostreu les igualtats:

- (a) $e^{z_1}e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$, $e^{z_1}/e^{z_2} = e^{z_1-z_2}$
- (b) $|e^z| = e^x$, $|e^{iz}| = e^{-y}$
- (c) $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$
- (d) $e^{\pm iz} = \cos z \pm i \sin z$
- (e) $\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \sin z_2 \cos z_1$
- (f) $\sin(-z) = -\sin z$, $\cos(-z) = \cos z$
- (g) $\sinh(-z) = -\sinh z$, $\cosh(-z) = \cosh z$
- (h) $\sinh(z_1 + z_2) = \sinh z_1 \cosh z_2 + \sinh z_2 \cosh z_1$
- (i) $\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1$
- (j) $e^{z+2k\pi i} = e^z$
- (k) $\sin(x + iy) = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y$
- (l) $(\sin z)^* = \sin z^*$, $(\cos z)^* = \cos z^*$

P2.9 (a) Trobeu tots els zeros de $\sin z$ i $\cos z$ i comproveu que són reals.

(b) Trobeu tots els zeros de $\sinh z$ i $\cosh z$ i comproveu que són imaginaris.

P2.10 Demostreu, suposant algunes restriccions, que

$$\log(z-1) = \frac{1}{2} \log[(x-1)^2 + y^2] + i \arctan \frac{y}{x-1}.$$

P2.11 Trobeu les parts real i imaginària de z^z .

P2.12 Demostreu que $\lim_{z \rightarrow 0} z/z^*$ no existeix.

P2.13 Trobeu els límits següents:

- (a) $\lim_{z \rightarrow i} \frac{z^3 + (z-i)z^2 + (1-2i)z - i}{z^2 + 1}$
- (b) $\lim_{z \rightarrow i} \frac{3z^4 - 2z^3 + 8z^2 - 2z + 5}{z - i}$

P2.14 Si $f(z) = u + iv$ i $z = x + iy = re^{i\theta}$, demostreu que les condicions de Cauchy-Riemann també es poden expressar:

$$(a) \frac{\partial f}{\partial z^*} = 0 \qquad (b) \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta}$$

P2.15 Amb els resultats del problema anterior, discutiu l'analiticitat de les funcions:

$$(a) z^* \qquad (c) e^x(\cos y - i \sin y) \qquad (e) \frac{2z + 1}{z(z^2 + 1)}$$

$$(b) (z^*)^2 \qquad (d) xy + iy \qquad (f) r^2$$

P2.16 Fent servir les regles de derivació, trobeu les derivades de les funcions següents:

$$(a) z \arctan(\log z) \qquad (c) 1/\operatorname{arcth}(iz + 2)$$

$$(b) (z - 3i)^{(4z+2)} \qquad (d) \cos^2(2z + 3i)$$

P2.17 Demostreu que les funcions següents són harmòniques (és a dir, satisfan l'equació de Laplace $\partial^2 u / \partial x^2 + \partial^2 u / \partial y^2 = 0$) i trobeu les seves harmòniques conjugades v (és a dir, tals que $f(z) = u + iv$ sigui analítica)

$$(a) u = 2x(1 - y) \qquad (b) u = e^{-x}(x \sin y - y \cos y)$$

P2.18 Considereu la regió $\mathcal{D}_1$ de la figura 2.12, definida per: $0 \leq \operatorname{Re} z \leq 2$; $0 \leq \operatorname{Im} z \leq 1$. Trobeu la imatge de $\mathcal{D}_1$ per a les funcions següents:

$$(a) f(z) = e^z \qquad (b) f(z) = e^{z^*} \qquad (c) f(z) = e^{iz}$$

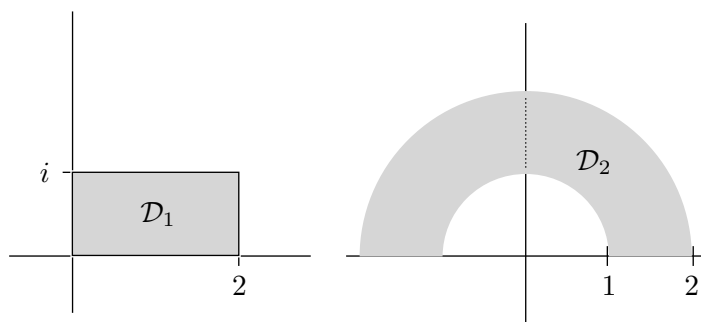


Figura 2.12: Regions dels problemes **P2.18** i **P2.19**.

P2.19 Considereu la regió $\mathcal{D}_2$ de la figura 2.12, definida per: $1 < |z| < 2$; $\text{Im } z > 0$. Trobeu la imatge de $\mathcal{D}_2$ per a les funcions següents (preneu la branca amb el tall sobre l'eix real positiu, quan calgui):

- | | | |
|----------------------|----------------------|------------------|
| (a) $f(z) = z^{1/2}$ | (c) $f(z) = z^{1/3}$ | (e) $f(z) = 1/z$ |
| (b) $f(z) = z^{3/2}$ | (d) $f(z) = \log z$ | (f) $f(z) = z^2$ |

P2.20 Considereu les branques principals (definides per $-\pi < \theta < \pi$) de les funcions següents i trobeu el valor de la discontinuïtat en els punts del tall:

- | | |
|----------------------|--|
| (a) $f(z) = z^{1/2}$ | (c) $f(z) = z^{1/n}, n \in \mathbb{N}$ |
| (b) $f(z) = z^{1/3}$ | (d) $f(z) = \log z$ |

P2.21 Expresseu en termes de z i z^* les funcions següents i indiqueu si són analítiques:

- | | |
|------------------|----------------------------|
| (a) $f(z) = z $ | (b) $f(z) = \text{Arg } z$ |
|------------------|----------------------------|

P2.22 Determineu on són derivables i/o analítiques les branques $-\pi \leq \theta < \pi$ de les funcions multivaluades següents:

- | | | |
|----------------------|-----------------------|-----------------------|
| (a) $f(z) = z^{1/2}$ | (c) $f(z) = \log z$ | (e) $f(z) = 1/\log z$ |
| (b) $f(z) = z^{3/2}$ | (d) $f(z) = z \log z$ | |

Quina és la resposta quan es consideren definides sobre les superfícies de Riemann corresponents?

P2.23 Considereu la funció real $u(x, y) = \log(x^2 + y^2)$, definida a tot el pla x - y llevat del punt $(0, 0)$. És harmònica (vegeu el problema **P2.17**)? On? Trobeu la seva harmònica conjugada, $v(x, y)$, i determineu el domini d'analiticitat de la funció complexa $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$.

SOLUCIONS

- | | |
|---|--|
| S2.1 (a) $e^{[2k-(3/4)]\pi} e^{i(\log 2)/2}$ | (e) $k\pi i$ |
| (b) $e^{(2k+1)i}$ | (f) $2 + i[2k - (1/2)]\pi$ |
| (c) $e^{i2\sqrt{2}k\pi}$ | (g) $i(e^2 - 1)/(e^2 + 1)$ |
| (d) $[k + (1/2)]\pi + i(\log 3)/2$ | (h) $e^{i\pi(\log \sqrt{3} + k \log 9)}$ |

- (i) $4k - 1$ (m) $2k\pi - i \log(2 \pm \sqrt{3})$
 (j) $\log 3 + i(2k + 1)\pi$ (n) $[2k \pm (1/2)]\pi - i \log(\sqrt{2} \pm 1)$
 (k) $\log 2 + i(11/6 + 2k)\pi$
 (l) $[(1/2) + 2k]\pi - i \log(2 \pm \sqrt{3})$ (o) $\log(\sqrt{2} \pm 1) + i[2k \pm (1/2)]\pi$

(Fins aquí, $k \in \mathbb{Z}$)

- (p) $\sqrt[3]{\cosh 1} e^{i2\pi k/3}$ on $k = 0, 1, 2$
 (q) $[(e^2 - 1)/(2e)]^{3/5} e^{i\pi(4k-1)/10}$, on $k = 0, 1, \dots, 4$

S2.2 (a) $\mathbb{C} - \{-2i, 2i\}$

(b) $\mathbb{C} - \{\operatorname{Re} z = 0\}$. No es pot estendre el domini de definició per incloure el punt $z = 0$, ja que si escrivim $z = \epsilon e^{i\theta}$ el límit

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\epsilon e^{i\theta}}{\epsilon e^{i\theta} + \epsilon e^{-i\theta}} = \frac{1}{1 + e^{-2i\theta}}$$

depèn de θ i, per tant, $\lim_{z \rightarrow 0} z/(z + z^*)$ no existeix.

(c) $\mathbb{C} - \{z_k = k\pi, \text{ amb } k \in \mathbb{Z}\}$ (vegeu el problema **P2.9**). En aquest cas, podem estendre el domini de definició per incloure-hi $z = 0$, ja que el límit

$$\lim_{z \rightarrow 0} z/\sin z = 0/0 \stackrel{\text{(L'Hôpital)}}{=} \lim_{z \rightarrow 0} 1/\cos z = 1$$

existeix. Això ens diu que la singularitat present a $z = 0$ és evitable i que podem definir una altra funció $g(z)$ contínua a $z = 0$, que coincideix amb $f(z)$ a la resta de punts,

$$g(z) = \begin{cases} z/\sin z & \text{per } z \neq k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}, \\ 1 & \text{per } z = 0. \end{cases}$$

S2.3 La funció $(z^2 + 1)^{1/3} = [(z - i)(z + i)]^{1/3}$ és *trivaluada*. Si, com es mostra a la figura 2.13,

$$z - i = r_+ e^{i\theta_+}, \quad z + i = r_- e^{i\theta_-},$$

tenim

$$w = f(z) = r_+^{1/3} r_-^{1/3} e^{i[\theta_+ + \theta_- + 2\pi k]/3} \quad \text{on } k = 0, 1, 2.$$

Observem que si movem el punt z (en sentit antihorari) i tornem al punt inicial, envoltant el punt $z = i$, incrementem k en una unitat (mod. 3), ja que llavors $\theta_+ \rightarrow \theta_+ + 2\pi$. El mateix passa si envoltem el punt $z = -i$, ja que en aquest cas $\theta_- \rightarrow \theta_- + 2\pi$. Aquests dos punts

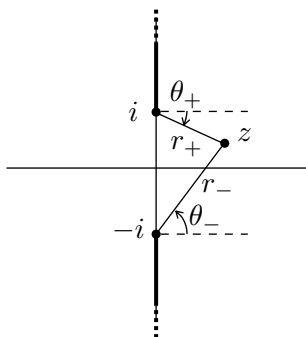


Figura 2.13: Talls de branca de la funció $(z^2 + 1)^{1/3}$.

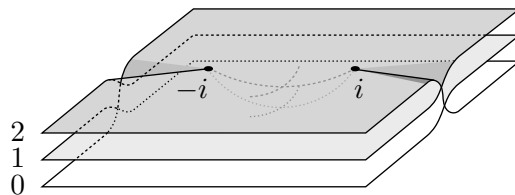


Figura 2.14: Superfície de Riemann per a la funció $(z^2 + 1)^{1/3}$.

són, per tant, els punts d'embranchament de la funció. Per tenir branques de f , hem d'introduir els talls de branca, que s'originen sempre en els punts d'embranchament. Una possibilitat és fer els talls al llarg de l'eix imaginari, com es mostra a la figura 2.13. Això equival a imposar les restriccions següents als arguments $\theta_{\pm}$:

$$-\frac{3\pi}{2} \leq \theta_+ < \frac{\pi}{2}, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \theta_- < \frac{3\pi}{2}.$$

Si ens restringim al full principal, $k = 0$, obtenim la branca

$$F(z) = r_+^{1/3} r_-^{1/3} e^{i[\theta_+ + \theta_-]/3},$$

amb els arguments $\theta_{\pm}$ restringits als intervals indicats. Aquesta branca és discontinua als talls. Per mostra-ho, concentrem-nos, per exemple, en el tall superior, $\theta_+ = \pi/2$. Observem que hi ha una discontinuïtat, ja que els límits laterals de $F(z)$ en els punts del tall són diferents. El límit per l'esquerra correspon a $\theta_+ \rightarrow -3\pi/2$ i $\theta_- \rightarrow \pi/2$, mentre que el límit per la dreta correspon a $\theta_+ \rightarrow \pi/2$ i $\theta_- \rightarrow \pi/2$. Si avaluem aquests límits veiem que la discontinuïtat és

$$\begin{aligned} \Delta F &= \lim_{\substack{\theta_+ \rightarrow -3\pi/2 \\ \theta_- \rightarrow \pi/2}} F(z) - \lim_{\substack{\theta_+ \rightarrow \pi/2 \\ \theta_- \rightarrow \pi/2}} F(z) = (r_+ r_-)^{1/3} (e^{-i\pi/3} - e^{i\pi/3}) \\ &= 2i \sin(-\pi/3) (r_+ r_-)^{1/3} = -i\sqrt{3} (r_+ r_-)^{1/3}. \end{aligned}$$

De la mateixa manera trobaríem que també hi ha una discontinuïtat al tall inferior.

Per completesa, representem la superfície de Riemann, on $f(z)$ esdevé univaluada, a la figura 2.14. Consta de tres fulls enganxats com s'indica. Els punts d'embranchament, i i $-i$, són comuns als tres fulls.

S2.4 Si fem el mateix raonament que en el problema anterior, com que

$$\sqrt{(4-z)(4+z^2)} = \sqrt{-(z-4)(z-2i)(z+2i)},$$

els punts d'embranchament són $z = 4$, $z = 2i$ i $z = -2i$. Hi ha moltes maneres de distribuir els talls de branca. Alguns exemples es mostren a la figura 2.15.

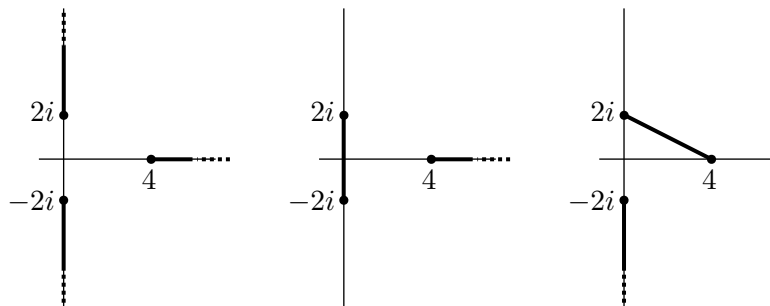


Figura 2.15: Possibles talls de branca de la funció $\sqrt{(4-z)(4+z^2)}$.

S2.5 És clar que *sobre la recta real* la funció $w = f(z) = \sqrt{1-z^2}$ pren valors reals en els punts de l'interval real $[0, 1]$, mentre que pren valors imaginaris per a z real més gran que 1. En aquest problema veurem que el signe de la part imaginària depèn de la branca escollida. Abans, però, hem d'especificar la posició dels talls de branca, és a dir, l'interval de definició dels arguments $\theta_{\pm}$ (vegeu la figura 2.16). També hem d'especificar quina branca utilitzem, és a dir, quina de les dues arrels de $(1-z^2)$ escollim.

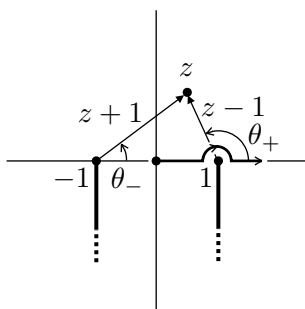


Figura 2.16: Arguments $\theta_{\pm}$ de $z \mp 1$. Elecció dels talls de branca de la funció $\sqrt{1-z^2}$, corresponents a $-\pi/2 \leq \theta_{\pm} < 3\pi/2$. Recorregut de l'origen a $z = p > 1$ que evita la singularitat $z = 1$.

Podem reescriure la funció així:

$$\sqrt{1-z^2} = \sqrt{-(z-1)(z+1)}.$$

Si $z - 1 = r_+ e^{\theta_+}$ i $z + 1 = r_- e^{\theta_-}$, tenim

$$F_k(z) = \sqrt{r_+ r_-} e^{i(\pi + \theta_+ + \theta_- + 2\pi k)/2} \quad (k = 0, 1), \quad (2.2)$$

amb $-\pi/2 \leq \theta_{\pm} < 3\pi/2$.

La primera condició de l'enunciat és que la branca escollida verifica $f(0) = 1$. El punt $z = 0$ correspon a $r_{\pm} = 1$, $\theta_+ = \pi$ i $\theta_- = 0$. Substituint a (2.2) veiem que hem d'escollir la branca $F_1(z)$.

La segona condició de l'enunciat ("si ens movem des de l'origen a aquest punt evitant el punt $z = 1$ per la part superior del pla complex i preservant continuïtat") ja s'ha tingut en compte amb l'elecció de l'argument de $z - 1$ ($-\pi/2 \leq \theta_+ < 3\pi/2$), és a dir, amb l'elecció del tall que surt del punt d'embranchament $z = 1$. La funció $F_1(z)$ no té cap discontinuïtat sobre el camí indicat que voreja $z = 1$ per sobre.

Un cop especificada la branca, només cal avaluar F_1 en els punts $z = p > 1$, que corresponen a $r_+ = p - 1$, $r_- = p + 1$ i $\theta_+ = \theta_- = 0$. Així,

$$F_1(p > 1) = \sqrt{(p-1)(p+1)} e^{3i\pi/2} = -i \sqrt{p^2 - 1}.$$

Notem que si canviem qualsevol de les dues condicions de l'enunciat, el signe del resultat canvia. Si escollíssim que $f(0) = -1$, hauríem de treballar amb $F_0(z)$, que, òbviament, difereix de $F_1(z)$ en el signe global. Si escollíssim vorejar el punt $z = 1$ per la part inferior de manera que la funció fos contínua, aleshores hauríem de posar el tall de branca al semiplà superior i imposar, per exemple, $-3\pi/2 \leq \theta_+ < \pi/2$. Llavors, $z = 0$ correspondria a $\theta_+ = -\pi$, hauríem d'escollir $k = 0$ i, per tant, el valor de la funció seria $+i \sqrt{p^2 - 1}$.

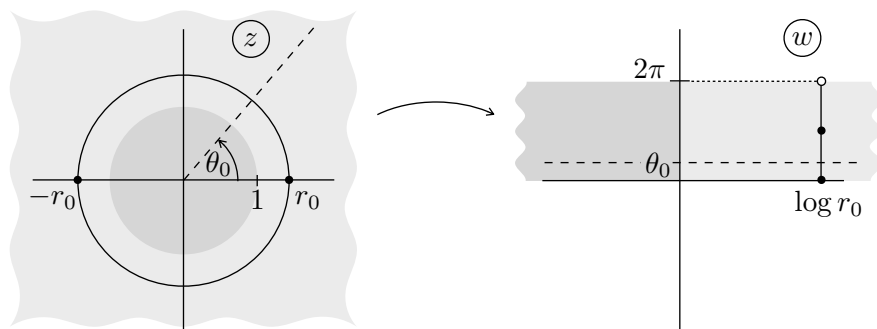


Figura 2.17: Representació de la transformació del problema **P2.6**. La circumferència (de radi $r_0 > 1$) i la semirecta del pla z es transformen en les línies del pla w dibuixades amb el mateix tipus de traç. L'interior (exterior) del cercle $|z| = 1$ es transforma amb la franja gris fosc (clar) del pla w .

S2.6 Comencem especificant la branca del logaritme que utilitzem. Si $z = r e^{i\theta}$ i prenem el full principal ($k = 0$) amb $0 \leq \theta < 2\pi$, tenim $w = \log r + i\theta$.

(a) Els punts d'una circumferència de radi r_0 centrada a l'origen es parametritzen per $z = r_0 e^{i\theta}$. La imatge d'aquests punts per la branca escollida és el conjunt de punts $w = \log r_0 + i\theta$, que correspon a un segment de llargada 2π paral·lel a l'eix imaginari i part real $\log r_0$ (línies de traç continu de la figura 2.17).

(b) Els punts d'una semirecta que passa per l'origen inclinada un angle θ_0 respecte de l'horitzontal s'expressen $z = r e^{i\theta_0}$, on r va de 0 a ∞ . La seva imatge és la recta infinita paral·lela a l'eix real a una alçada θ_0 (línies de traç discontinu de la figura 2.17).

(c) Evident a partir dels resultats anteriors.

$$\begin{array}{ll} \text{S2.7 (a)} & \log 2 + i(1 + 2k)\pi & \text{(e)} & \pm \log(\sqrt{2} + 1) \\ & & & + i[(1/2) + 2k]\pi \\ \text{(b)} & z = i[(1/4) + k]\pi/2 & \text{(f)} & e^{[(1/4)+2k]\pi} e^{-i \log \sqrt{2}} \\ \text{(c)} & \log 2 + i[(1/3) + 2k]\pi & \text{(g)} & [(1 \mp 1)/2 + 2k]\pi \\ \text{(d)} & (1/2) + ik\pi & & \pm i \log(\sqrt{3} + \sqrt{2}), \end{array}$$

on $k \in \mathbb{Z}$.

$$\begin{aligned} \text{S2.8 (a)} \quad e^{z_1} e^{z_2} &= e^{x_1 + iy_1} e^{x_2 + iy_2} \\ &= e^{x_1} e^{x_2} (\cos y_1 + i \sin y_1) (\cos y_2 + i \sin y_2) \\ &= e^{x_1 + x_2} [\cos(y_1 + y_2) + i \sin(y_1 + y_2)] \\ &= e^{x_1 + x_2} e^{i(y_1 + y_2)} = e^{z_1 + z_2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{e^{z_1}}{e^{z_2}} &= \frac{e^{x_1} (\cos y_1 + i \sin y_1)}{e^{x_2} (\cos y_2 + i \sin y_2)} \\ &= \frac{e^{x_1}}{e^{x_2}} \frac{(\cos y_1 + i \sin y_1)}{(\cos y_2 + i \sin y_2)} \cdot \frac{(\cos y_2 - i \sin y_2)}{(\cos y_2 - i \sin y_2)} \\ &= e^{x_1 - x_2} [\cos(y_1 - y_2) + i \sin(y_1 - y_2)] = e^{z_1 - z_2}. \end{aligned}$$

$$\text{(b)} \quad |e^z| = |e^x (\cos y + i \sin y)| = e^x (\cos^2 y + \sin^2 y)^{1/2} = e^x.$$

(c) Utilitzant les definicions $\sin z = (e^{iz} - e^{-iz})/2i$ i $\cos z = (e^{iz} + e^{-iz})/2$, obtenim

$$\sin^2 z + \cos^2 z = -\frac{e^{2iz} + e^{-2iz} - 2}{4} + \frac{e^{2iz} + e^{-2iz} + 2}{4} = 1.$$

$$(d) \cos z + i \sin z = (1/2) [e^{iz} + e^{-iz} + i(e^{iz} - e^{-iz})/i] = e^{iz}.$$

$$(e) \sin z_1 \cos z_2 + \sin z_2 \cos z_1 \\ = \frac{e^{iz_1} - e^{-iz_1}}{2i} \cdot \frac{e^{iz_2} + e^{-iz_2}}{2} + \frac{e^{iz_2} - e^{-iz_2}}{2i} \cdot \frac{e^{iz_1} + e^{-iz_1}}{2} \\ = \frac{e^{i(z_1+z_2)} - e^{-i(z_1+z_2)}}{2i} = \sin(z_1 + z_2).$$

$$(f) \sin(-z) = \frac{e^{-iz} - e^{iz}}{2i} = -\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = -\sin z.$$

$$(g) \sinh(-z) = \frac{e^{-z} - e^z}{2} = -\frac{e^z - e^{-z}}{2} = -\sinh z.$$

$$(h) \sinh z_1 \cosh z_2 + \sinh z_2 \cosh z_1 \\ = \frac{e^{z_1} - e^{-z_1}}{2} \cdot \frac{e^{z_2} + e^{-z_2}}{2} + \frac{e^{z_2} - e^{-z_2}}{2} \cdot \frac{e^{z_1} + e^{-z_1}}{2} \\ = \frac{e^{(z_1+z_2)} - e^{-(z_1+z_2)}}{2} = \sinh(z_1 + z_2).$$

(i) Utilitzant les definicions $\sinh z = (e^z - e^{-z})/2$ i $\cosh z = (e^z + e^{-z})/2$, obtenim

$$\cosh^2 z - \sinh^2 z = \frac{e^{2z} + e^{-2z} + 2}{4} - \frac{e^{2z} + e^{-2z} - 2}{4} = 1.$$

$$(j) e^{z+2k\pi i} = e^z e^{2k\pi i} = e^z [\cos(2k\pi) + i \sin(2k\pi)] = e^z.$$

(k) Utilitzant el resultat de l'apartat (e), $\sin(x + iy) = \sin x \cos(iy) + i \cos x \sin(iy)$. De la definició de $\sin z$ i $\cos z$, trobem $\cos(iy) = (e^{-y} + e^y)/2 = \cosh y$ i $\sin(iy) = (e^{-y} - e^y)/(2i) = i \sinh y$. $\sin(x + iy) = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y$.

(l) $(\sin z)^* = (e^{iz} - e^{-iz})^*/(-2i) = (e^{-iz^*} - e^{iz^*})/(-2i) = \sin z^*$, on hem utilitzat que $(e^z)^* = e^{z^*}$, ja que

$$[e^x(\cos y + i \sin y)]^* = e^x(\cos y - i \sin y) \\ = e^x[\cos(-y) + i \sin(-y)] = e^{x-iy} = e^{z^*}.$$

S2.9 (a) $\sin z = 0 \Rightarrow e^{iz} = e^{-iz} \Rightarrow e^{-y}e^{ix} = e^ye^{-ix} \Rightarrow y = -y, x = -x + 2\pi k$.
Per tant,

$$y = 0, x = \pi k \Rightarrow z = \pi k, \text{ on } k \in \mathbb{Z}.$$

$\cos z = 0 \Rightarrow e^{iz} = -e^{-iz} \Rightarrow e^{-y}e^{ix} = -e^ye^{-ix} \Rightarrow y = -y, x = -x + \pi + 2\pi k$.
Per tant,

$$y = 0, x = \pi \left(k + \frac{1}{2}\right) \Rightarrow z = \pi \left(k + \frac{1}{2}\right), \text{ on } k \in \mathbb{Z}.$$

(b) Com que $\sinh z = -i \sin(iz)$, $\sinh z$ s'anul·la quan $iz = \pi k$, és a dir, quan $z = i\pi n$ (on $n \in \mathbb{Z}$). Similarment, com que $\cosh z = \cos(iz)$ la funció $\cosh z$ s'anul·la quan $z = i\pi(n + 1/2)$, on $n \in \mathbb{Z}$.

S2.10 En general, tenim que $\log w = \log |w| + i \arctan(\operatorname{Im} w / \operatorname{Re} w) + i2\pi k$, amb $k \in \mathbb{Z}$. Si $w = z - 1 = (x - 1) + iy$ tindrem

$$\log(z - 1) = \log \left(\sqrt{(x - 1)^2 + y^2} \right) + i \arctan \left(\frac{y}{x - 1} \right) + i2\pi k.$$

L' $\arctan$ és ambigu a l'interval $[0, 2\pi]$. Considerant $\arctan \alpha$ amb $\alpha \in [0, \pi]$, l'enunciat és cert per a la branca principal ($k = 0$) del logaritme, si $z - 1$ és al primer o segon quadrant del pla complex. Si és al tercer o quart, cal sumar $+i\pi$.

S2.11 Convé utilitzar tant l'expressió binomial $z = x + iy$ com la polar $z = re^{i\theta}$, on $r = (x^2 + y^2)^{1/2}$, i $\theta = \arctan(y/x)$.

$$\begin{aligned} z^z &= e^{z \log z} = e^{(x+iy)(\log r + i(\theta + 2k\pi))} \\ &= e^{x \log r - y(\theta + 2k\pi)} \cos \left[y \log r + x(\theta + 2k\pi) \right] \\ &\quad + i e^{x \log r - y(\theta + 2k\pi)} \sin \left[y \log r + x(\theta + 2k\pi) \right]. \end{aligned}$$

S2.12 En forma polar, $z = r e^{i\theta}$ i $z^* = r e^{-i\theta}$. Per tant, $z/z^* = e^{2i\theta}$. Veiem, doncs, que el límit depèn de θ , és a dir, de com z s'aproxima a 0. Per tant, $\lim_{z \rightarrow 0} (z/z^*)$ no existeix.

S2.13 (a) $(2 - i)/0 = \infty$ (b) $4 + 4i$ (regla de L'Hôpital).

S2.14 (a) Considerem la relació entre $\{z, z^*\}$ i $\{x, y\}$ com un canvi de variables,

$$\begin{aligned} z &= x + iy & x &= (z + z^*)/2 \\ z^* &= x - iy & y &= (z - z^*)/2i, \end{aligned}$$

i expressem la derivada respecte de z^* de $f = u + iv$ mitjançant la regla de la cadena (escrivim $u_x = \partial u / \partial x$, etc.),

$$\frac{\partial f}{\partial z^*} = \frac{\partial}{\partial x}(u + iv) \frac{\partial x}{\partial z^*} + \frac{\partial}{\partial y}(u + iv) \frac{\partial y}{\partial z^*} = (u_x - v_y) \frac{1}{2} + i(u_y + v_x) \frac{1}{2}.$$

Aquesta expressió és nul·la si i només si es compleixen les condicions de Cauchy-Riemann

$$u_x = v_y, \quad u_y = -v_x.$$

(b) En coordenades polars

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta.$$

Si fem servir la regla de la cadena, trobem

$$\begin{aligned} u_r &= u_x \frac{\partial x}{\partial r} + u_y \frac{\partial y}{\partial r} = u_x \cos \theta + u_y \sin \theta, \\ u_\theta &= u_x \frac{\partial x}{\partial \theta} + u_y \frac{\partial y}{\partial \theta} = u_x \cdot (-r \sin \theta) + u_y \cdot (r \cos \theta), \end{aligned}$$

i també,

$$\begin{aligned} v_r &= v_x \cos \theta + v_y \sin \theta, \\ v_\theta &= -rv_x \sin \theta + rv_y \cos \theta. \end{aligned}$$

Les condicions de Cauchy-Riemann permeten expressar les derivades parcials de v en termes de les u ,

$$\begin{aligned} v_r &= v_x \cos \theta + v_y \sin \theta = -u_y \cos \theta + u_x \sin \theta = -u_\theta / r, \\ v_\theta &= -rv_x \sin \theta + rv_y \cos \theta = ru_y \sin \theta + ru_x \cos \theta = ru_r. \end{aligned}$$

S2.15 (a) No derivable ni analítica enlloc.

(b) Derivable a $z = 0$, no analítica enlloc.

(c) No derivable ni analítica enlloc.

(d) Derivable a $z = i$, no analítica enlloc.

(e) Derivable i analítica a $\mathbb{C} - \{0, \pm i\}$.

(f) Derivable a $z = 0$, no analítica enlloc.

S2.16 (a) $\arctan(\log z) + \frac{1}{1 + \log^2 z}$

(b) $(z - 3i)^{(4z+2)} \left[4 \log(z - 3i) + \frac{4z + 2}{z - 3i} \right]$

(c) $-i/(1 + (z - 2i)^2)$

(d) $-4 \sin(2z + 3i) \cos(2z + 3i)$

S2.17 Per alleugerir la notació escrivim $u_x = \partial u / \partial x$, $u_{xx} = \partial^2 u / \partial x^2$, etc.

(a) Si $u = 2x(1 - y)$ tenim

$$u_x = 2(1 - y) \Rightarrow u_{xx} = 0; u_y = -2x \Rightarrow u_{yy} = 0$$

i, per tant, $u_{xx} + u_{yy} = 0$, és a dir, u és harmònica.

Utilitzant la primera condició de Cauchy-Riemann tenim

$$v_y = u_x = 2(1 - y) \Rightarrow v = \int dy \, 2(1 - y) = 2y - y^2 + C(x).$$

Determinem $C(x)$ amb la segona condició de Cauchy-Riemann

$$v_x = -u_y \Rightarrow C'(x) = 2x \Rightarrow C(x) = x^2 + K,$$

on K és una constant complexa arbitrària. Així doncs, $v = x^2 - y^2 + 2y + K$, i la funció

$$f(z) = 2(1 - y) + i(x^2 - y^2 + 2y) + \text{const.}$$

és analítica. Si expressem x, y en funció de z, z^* obtenim

$$f(z) = iz^2 + 2z + \text{const.}$$

que no depèn de z^* , d'acord amb problema **P2.14**.

(b) Si procedim com en el cas precedent arribem a

$$v = e^{-x}(x \cos y + y \sin y) + \text{const.}; \quad f(z) = iz e^{-z} + \text{const.}$$

S2.18 (a) Segment de la corona circular $1 \leq |w| \leq e^2$, $0 \leq \theta \leq 1$.

(b) Segment de la corona circular $1 \leq |w| \leq e^2$, $-1 \leq \theta \leq 0$.

(c) Segment de la corona circular $e^{-1} \leq |w| \leq 1$, $0 \leq \theta \leq 2$.

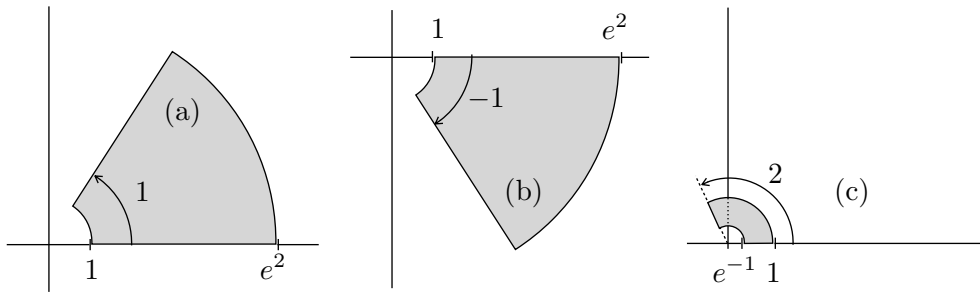


Figura 2.18: Els segments de corona circular resultants d'aplicar (a) e^z , (b) e^{z^*} i (c) e^{iz} a la regió $\mathcal{D}_1$ (figura 2.12) del problema **P2.18**.

Aquestes regions s'il·lustren a la figura 2.18.

S2.19 (a) Segment de la corona circular $1 < |w| < \sqrt{2}$, $0 < \theta < \pi/2$.

(b) Segment de la corona circular $1 < |w| < 2\sqrt{2}$, $0 < \theta < 3\pi/2$.

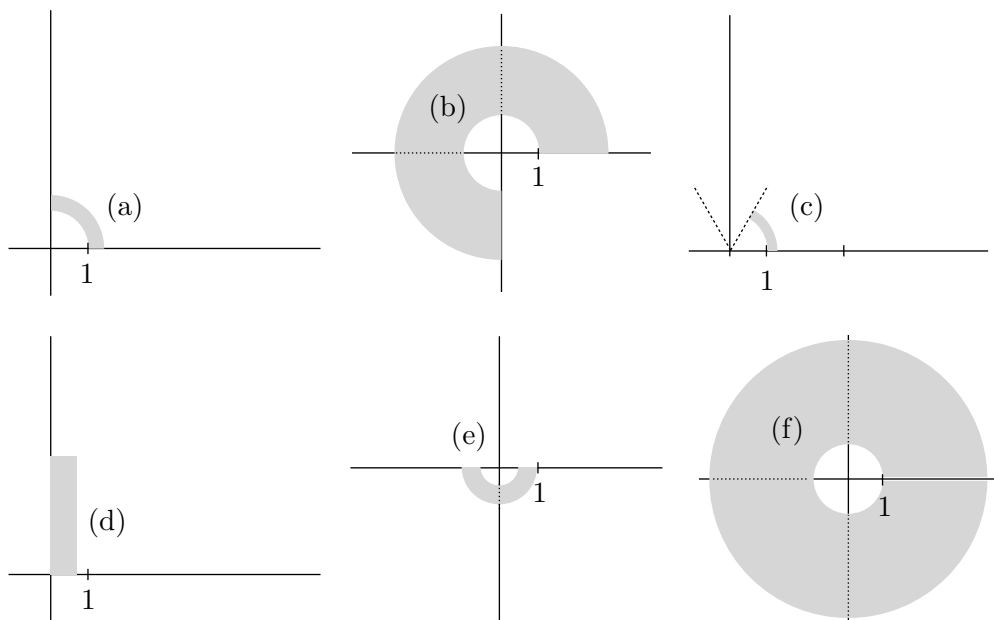


Figura 2.19: Imatges de la regió $\mathcal{D}_2$ (figura 2.12) del problema **P2.19**.

(c) Segment de la corona circular $1 < |w| < \sqrt[3]{2}$, $0 < \theta < \pi/3$.

(d) Rectangle $0 < \operatorname{Re} w < \log 2$, $0 < \operatorname{Im} w < \pi$.

(e) Segment de la corona circular $1/2 < |w| < 1$, $-\pi < \theta < 0$.

(f) Segment de la corona circular $1 < |w| < 4$, $0 < \theta < 2\pi$.

Aquestes regions es mostren a la figura 2.19 (totes són a la mateixa escala).

S2.20 Com que per a cada f definim la branca principal F amb $-\pi < \theta < \pi$, el tall s'estén sobre l'eix real negatiu. Definim la discontinuïtat com

$$\Delta F(r) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\theta \rightarrow \pi} F(re^{i\theta}) - \lim_{\theta \rightarrow -\pi} F(re^{i\theta}).$$

(a) $\Delta F(r) = \sqrt{r}e^{i\pi/2} - \sqrt{r}e^{-i\pi/2} = 2i\sqrt{r} \sin(\pi/2) = 2i\sqrt{r}.$

(b) $\Delta F(r) = r^{1/3}e^{i\pi/3} - r^{1/3}e^{-i\pi/3} = 2ir^{1/3} \sin(\pi/3) = i\sqrt{3} r^{1/3}.$

(c) $\Delta F(r) = r^{1/n}e^{i\pi/n} - r^{1/n}e^{-i\pi/n} = 2ir^{1/n} \sin(\pi/n).$

(d) $\Delta F(r) = (\log r + i\pi) - (\log r - i\pi) = 2\pi i$. En aquest cas, la discontinuïtat no depèn del mòdul de z .

S2.21 (a) $f(z) = |z| = \sqrt{z z^*}$ depèn explícitament de z^* i, a més a més,

$$\frac{\partial f}{\partial z^*} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{z}{z^*}} \neq 0.$$

No és, per tant, analítica enlloc (tot i que és derivable en el punt $z = 0$).

(b) El mateix es pot dir de la funció

$$f(z) = \operatorname{Arg}(z) = \arctan \left[\frac{z - z^*}{i(z + z^*)} \right] + k\pi,$$

amb $k = 0, \pm 1$ depenent del quadrant de z (vegeu l'exemple 1.1), ja que

$$\frac{\partial f}{\partial z^*} = \frac{i}{2z^*} \neq 0.$$

Notem que cal comprovar si $\partial f / \partial z^*$ és o no igual a 0. De vegades pot haver-hi una dependència de z^* que és només aparent. Per exemple, la funció

$$f(z) = \log z = \log |z| + i \operatorname{Arg} z = \frac{1}{2} \log(z z^*) + i \arctan \left[\frac{z - z^*}{i(z + z^*)} \right]$$

depèn aparentment de z^* , però és fàcil comprovar que $\partial f / \partial z^* = 0$.

S2.22 (a) $f(z) = z^{1/2}$ només depèn explícitament de z . Com hem vist en el problema **P2.14**, això vol dir que compleix les condicions de Cauchy-Riemann a tot arreu. Però es tracta d'una funció multivaluada i cada branca és discontinua (i, per tant, no derivable) sobre el tall de branca. En el punt d'embranchament $z = 0$ (que és a l'extrem del tall) la funció és contínua però no derivable, ja que $f'(z) = 1/(2\sqrt{z})$. A la resta del pla la funció $f(z)$ és derivable, ja que, si expressem $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, les derivades parcials de primer ordre de u i de v són contínues (a part de complir les condicions de Cauchy-Riemann). D'altra banda, com que $\mathbb{C} - \{\text{el tall}\}$ és un conjunt obert, $f(z)$ és també analítica.

(b) És derivable a tot $\mathbb{C}$, llevat dels punts sobre el tall de branca. En aquest cas, és derivable al punt d'embranchament $z = 0$. És analítica a tot $\mathbb{C}$, llevat dels punts del tall i el punt d'embranchament.

(c) És derivable i analítica a tot $\mathbb{C}$, llevat dels punts sobre el tall de branca i el punt d'embranchament $z = 0$.

(d) És derivable a tot $\mathbb{C}$, llevat dels punts sobre el tall de branca. És derivable al punt d'embranchament $z = 0$. És analítica a tot $\mathbb{C}$, llevat dels punts del tall de branca i el punt d'embranchament.

(e) És derivable i analítica a tot $\mathbb{C}$, llevat dels punts sobre el tall de branca, el punt d'embranchament $z = 0$ i el punt $z = 1$.

Quan les funcions anteriors es consideren definides sobre les superfícies de Riemann corresponents, desapareixen els talls de branca i, per tant, són analítiques a tot arreu, llevat dels punts d'embranchament (en el darrer cas, tampoc és analítica al punt $z = 1$).

S2.23 Comprovem que $u(x, y)$ és harmònica.

$$\begin{aligned} u_x &= \frac{2x}{x^2 + y^2}, & u_{xx} &= -\frac{4x^2}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{2}{x^2 + y^2}, \\ u_y &= \frac{2y}{x^2 + y^2}, & u_{yy} &= -\frac{4y^2}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{2}{x^2 + y^2}, \\ & & \Rightarrow u_{xx} + u_{yy} &= 0. \end{aligned}$$

La funció $u(x, y)$ és, per tant, harmònica a tot $\mathbb{C}$, llevat de $z = 0$.

Notem que $u(x, y) = 2 \log |z|$ i que $f(z) = 2 \log z$ és l'única funció analítica (en alguna regió) que té com a part real aquesta funció. Per tant, l'harmònica conjugada de $u(x, y)$ ha de ser $v(x, y) = 2 \arctan(y/x)$ (llevat d'una constant additiva arbitrària).

Ho comprovem utilitzant les condicions de Cauchy-Riemann. D'una banda, tenim

$$u_x = v_y \Rightarrow v = \int dy \frac{2x}{x^2 + y^2} = 2 \arctan(y/x) + C(x)$$

i de l'altra,

$$u_y = -v_x \Rightarrow \frac{-2y}{x^2 + y^2} = \frac{-2y}{x^2 + y^2} + C'(x) \Rightarrow C'(x) = 0.$$

$C(x)$ és, doncs, una constant (complexa) arbitrària. Tenim, per tant,

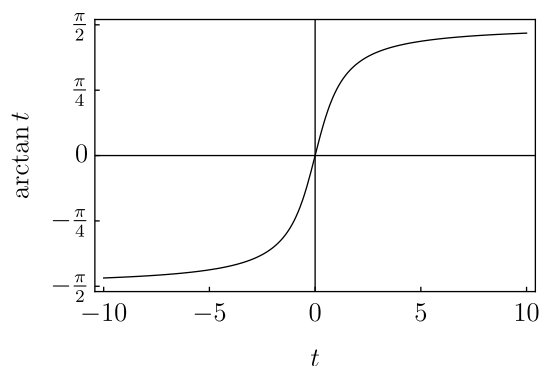
$$v(x, y) = 2 \arctan(y/x) + \text{const.}$$

De fet, la funció $\arctan(y/x)$ només és contínua al semiplà $\text{Re } z > 0$ (1r i 4t quadrants). No obstant això, podem estendre $v(x, y)$ amb continuïtat al 2n i 3r quadrants. Per fer-ho, notem que sobre el semieix imaginari $x = 0, y > 0$ la funció $\arctan(y/x)$ tendeix asimptòticament a $\pi/2$, com veiem a la figura 2.20.

Definim $v(x, y)$ al segon quadrant ($x < 0, y > 0$) com $2 [\arctan(y/x) + \pi]$ perquè no hi hagi cap discontinuïtat sobre el semieix imaginari positiu. Similarment, al tercer quadrant ($x, y < 0$) podem fer el mateix definint $v(x, y)$ com $2 [\arctan(y/x) - \pi]$ i tampoc no hi haurà cap discontinuïtat sobre el semieix imaginari negatiu.

Així, arribem a la funció

$$v(x, y) = \begin{cases} 2 \arctan(y/x) & \text{per } x > 0 & (1\text{r i } 4\text{t quadrants}) \\ 2 [\arctan(y/x) + \pi] & \text{per } x < 0, y > 0 & (2\text{n quadrant}) \\ 2 [\arctan(y/x) - \pi] & \text{per } x, y < 0 & (3\text{r quadrant}) \end{cases}$$

Figura 2.20: Gràfica de la funció real $\arctan t$.

que és contínua a tot el pla, llevat del semieix real negatiu, on hi té una discontinuïtat de 2π . Es comprova fàcilment que, a part d'aquesta discontinuïtat, la funció $v(x, y)$ és harmònica a la resta de punts del pla complex.

Evidentment, aquesta funció és $v(x, y) = 2 \operatorname{Arg} z$, on $\operatorname{Arg} z$ és l'argument *principal* de z , definit a l'interval $[-\pi, \pi)$ i, per tant, $u + iv$ és la branca principal de la funció multivaluada $f(z) = 2 \log z$ (vegeu també els comentaris al voltant de l'equació (1.8) i l'exemple 1.1).

3 Integració

3.1 La integral al pla complex

La generalització del concepte d'integral al pla complex necessàriament ha d'involucrar el concepte d'integral de camí o de contorn.

Definició 3.1 (Contorn) *Un contorn C és una aplicació*

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} \supset [a, b] & \xrightarrow{C} & \mathbb{C} \\ t & \longrightarrow & z(t) = x(t) + iy(t). \end{array}$$

Suposarem que $x'(t)$ i $y'(t)$ existeixen, són contínues i no s'anul·len simultàniament, llevat, potser, per a un nombre finit de valors de t , de tal forma que el vector tangent $(x'(t), y'(t))$ està ben definit a trossos. El punt inicial és $z(a) = \alpha$ i el final $z(b) = \beta$ (figura 3.1). Un contorn és tancat quan $\alpha = \beta$. Un contorn és simple si no hi ha dos valors t_1 i t_2 diferents per als quals $z(t_1) = z(t_2)$ (llevat dels extrems, si el contorn és tancat), és a dir, si el contorn no es talla ell mateix.

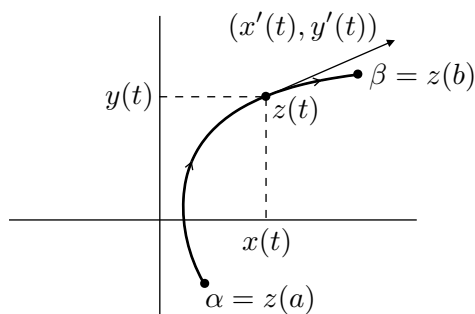


Figura 3.1: Contorn simple d'extrems α i β .

Definició 3.2 (Integral de contorn) *Si C és el contorn $z(t) = x(t) + iy(t)$, d'extrem inicial $\alpha = z(a)$ i extrem final $\beta = z(b)$, i $f(z)$ és una funció definida*

sobre els punts del contorn C , la integral de f sobre el contorn C és

$$\int_C f(z) dz \stackrel{\text{def}}{=} \int_a^b f[z(t)] dz(t) \quad (3.1)$$

$$\begin{aligned} &= \int_a^b \{u[x(t), y(t)] + i v[x(t), y(t)]\} \{x'(t) + i y'(t)\} dt \\ &= \int_a^b \{u[x(t), y(t)] x'(t) - v[x(t), y(t)] y'(t)\} dt \\ &\quad + i \int_a^b \{u[x(t), y(t)] y'(t) + v[x(t), y(t)] x'(t)\} dt \\ &= \int_C (u dx - v dy) + i \int_C (u dy + v dx). \end{aligned} \quad (3.2)$$

L'existència d'aquesta integral està garantida si f és contínua. Farem servir el símbol $\oint_C$ quan C sigui un contorn tancat.

En general, si C_1 i C_2 són dos contorns diferents amb els mateixos extrems α i β , tenim $\int_{C_1} f(z) dz \neq \int_{C_2} f(z) dz$. Veurem a la secció 3.3 en quines situacions això no és així.

Les propietats següents són conseqüència de la definició 3.2:

$$1) \text{ Linealitat: } \int_C [\lambda f(z) + \mu g(z)] dz = \lambda \int_C f(z) dz + \mu \int_C g(z) dz, \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{C}.$$

$$2) \operatorname{Re} \left[\int_C f(z) dz \right] = \int_C \operatorname{Re}[f(z) dz], \quad \operatorname{Im} \left[\int_C f(z) dz \right] = \int_C \operatorname{Im}[f(z) dz].$$

$$3) \int_C |dz| = \int_a^b \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt = L_C.$$

$$4) \int_{C^*} f(z) dz = - \int_C f(z) dz.$$

En aquestes expressions C és un contorn qualsevol, L_C la seva longitud i C^* el contorn C recorregut en sentit contrari.

Teorema 3.1

$$\left| \int_C f(z) dz \right| \leq \int_C |f(z)| |dz|.$$

DEMOSTRACIÓ: Si $\int_C f(z) dz \stackrel{\text{def}}{=} R e^{i\Theta}$ tenim, d'una banda,

$$R = \left| \int_C f(z) dz \right|,$$

i de l'altra,

$$R = e^{-i\Theta} \int_C f(z) dz = \int_C e^{-i\Theta} f(z) dz.$$

Com que R és un nombre real no negatiu, tenim

$$\begin{aligned} \left| \int_C f(z) dz \right| &= R = \operatorname{Re} R = \operatorname{Re} \int_C e^{-i\Theta} f(z) dz \\ &= \int_C \operatorname{Re} \{ e^{-i\Theta} f(z) dz \} \leq \int_C |e^{-i\Theta} f(z) dz| = \int_C |f(z)| |dz|. \end{aligned}$$

◇

Exemple 3.1 Considerem la funció $f(z) = z^*$ i calculem la seva integral del punt $\alpha = 0$ al punt $\beta = 1 + i$ seguint els tres contorns de la figura 3.2.

C_1 : La parametrització del segment horitzontal és $z(t) = t + i0$, $dz(t) = dt$, on t va de 0 a 1. En aquest tram l'integrand és $z^*(t) = t$ i, per tant, la contribució d'aquest tram a la integral és $\int_0^1 t dt = 1/2$. Similarment, la parametrització del segment vertical és $z(t) = 1 + it$, $dz(t) = i dt$, on t també va de 0 a 1. En aquest tram l'integrand és $z^*(t) = 1 - it$ i la seva contribució a la integral és $\int_0^1 (1 - it) i dt = i + (1/2)$. Si sumem aquests dos resultats obtenim

$$\int_{C_1} z^* dz = 1 + i.$$

C_2 : En aquest cas el contorn és un arc de cercle de radi 1, centrat a i que es parametritza $z(t) = i + e^{it}$, $dz(t) = ie^{it} dt$, on t va de $-\pi/2$ a 0. L'integrand és $z^*(t) = -i + e^{-it}$ i, per tant, tenim

$$\int_{C_2} z^* dz = \int_{-\pi/2}^0 (-i + e^{-it}) ie^{it} dt = \left[\frac{e^{it}}{i} + it \right]_{-\pi/2}^0 = 1 + i \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right).$$

C_3 : El contorn és un segment rectilini de llargada $\sqrt{2}$ inclinat un angle $\pi/4$ respecte de l'eix real i el podem parametritzar $z(t) = te^{i\pi/4}$, $dz(t) = e^{i\pi/4} dt$, on t va de 0 a $\sqrt{2}$. L'integrand és $z^*(t) = te^{-i\pi/4}$ i tenim

$$\int_{C_3} z^* dz = \int_0^{\sqrt{2}} te^{-i\pi/4} e^{i\pi/4} dt = \left[\frac{t^2}{2} \right]_0^{\sqrt{2}} = 1.$$

Així doncs, tot i tenir els mateixos extrems α i β , les tres integrals són diferents, és a dir, depenen del contorn utilitzat. No sempre és així. Si la funció de l'integrand fos $f(z) = z$ i seguíssim els passos anteriors arribaríem a

$$\int_{C_1} z dz = \int_{C_2} z dz = \int_{C_3} z dz = i.$$

Veurem a la secció 3.3 el motiu pel qual passa això.

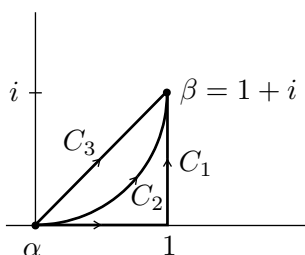


Figura 3.2: Contorns de l'exemple 3.1.

3.2 Teorema de Cauchy-Goursat

El teorema de Cauchy-Goursat és el teorema central del càlcul de variable complexa. La versió original és de Cauchy i es basa en el teorema de Green de $\mathbb{R}^2$. Édouard Goursat el va demostrar posteriorment amb hipòtesis menys restrictives. Tot seguit veurem les dues versions del teorema, ja que cal utilitzar la primera per demostrar la segona.

Teorema 3.2 (Cauchy) *Si $f(z)$ és analítica sobre i a l'interior d'un contorn tancat simple C i $f'(z)$ és contínua en aquesta mateixa regió, aleshores*

$$\oint_C f(z) dz = 0.$$

DEMOSTRACIÓ: Recordem el teorema de Green (o teorema de Stokes de $\mathbb{R}^2$), que afirma que si $P(x, y)$ i $Q(x, y)$ són funcions reals amb derivades parcials de primer ordre *contínues* a la regió tancada $S \subset \mathbb{R}^2$, limitada pel contorn C (recorregut en sentit antihorari, és a dir, orientat de forma que S queda a la seva esquerra), es compleix la igualtat

$$\oint_C (P dx + Q dy) = \iint_S (Q_x - P_y) dx dy,$$

on hem usat la notació simplificada $Q_x \stackrel{\text{def}}{=} \partial Q / \partial x$ i $P_y \stackrel{\text{def}}{=} \partial P / \partial y$.

Si $f = u + iv$, la continuïtat de f' garanteix la continuïtat de u_x , u_y , v_x i v_y . Llavors, si fem $P = u$ i $Q = -v$ i usem la segona condició de Cauchy-Riemann ($u_y = -v_x$) tenim

$$\oint_C (u dx - v dy) = \iint_S (-v_x - u_y) dx dy = 0.$$

De manera similar, si fem $P = v$ i $Q = u$ i utilitzem la primera condició de Cauchy-Riemann ($u_x = v_y$) tenim

$$\oint_C (v dx + u dy) = \iint_S (u_x - v_y) dx dy = 0$$

i, per tant, d'acord amb (3.2) tenim

$$\oint_C f(z) dz = \oint_C (u dx - v dy) + i \oint_C (v dx + u dy) = 0.$$

◇

Édouard Goursat va demostrar que la continuïtat de $f'(z)$ no és, de fet, necessària per demostrar el teorema anterior. L'element clau de la seva demostració és el lema següent.

Lema 3.3 *Si $f(z)$ és analítica sobre i a l'interior d'un contorn tancat simple C , per a cada $\epsilon > 0$ és possible dividir l'interior de C en un nombre finit n de quadrats o porcions de quadrat de contorns C_j , de tal manera que a sobre o a l'interior de cada C_j existeix z_j per al qual*

$$\left| \frac{f(z) - f(z_j)}{z - z_j} - f'(z_j) \right| < \epsilon, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (3.3)$$

per a tot z que estigui sobre o a l'interior de C_j .

DEMOSTRACIÓ: Comencem dividint C en $1, 4, 16, 64 \dots 4^k = n$ quadrats o porcions de quadrat, com s'indica a la figura 3.3. A cada pas comprovem si es compleix la condició (3.3). Quan això passi haurem acabat. Si la condició no es compleix en algun quadrat, refinem la divisió subdividint-lo en quatre, com es mostra a la figura 3.4. Es tracta de demostrar que després d'un nombre finit de passos, la condició (3.3) s'acaba complint.

Això ho demostrarem per reducció a l'absurd. Suposem, doncs, que hi ha un quadrat (o porció) C_{j_0} , de costats ℓ , on no es compleix (3.3), i que, després de dividir-lo en quatre quadrats, encara trobem algun

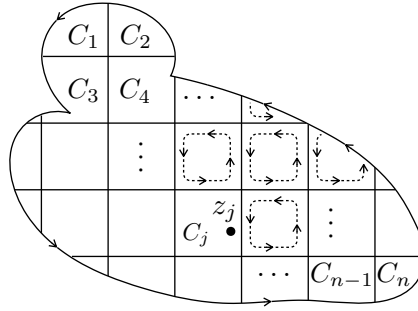


Figura 3.3: Divisió de la regió limitada per C en n quadrats o porcions de quadrat. Les línies internes es recorren amb ambdós sentits.

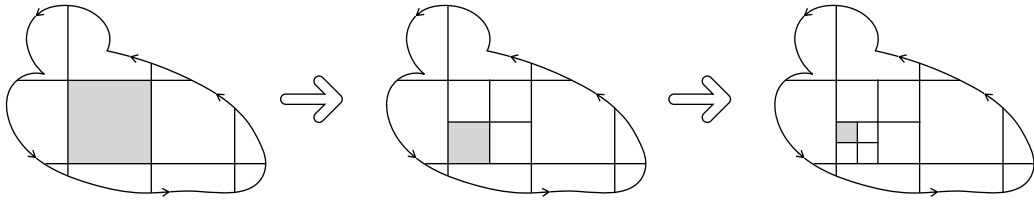


Figura 3.4: Refinat de la divisió en quadrats. En els quadrats grisos no se satisfà la condició (3.3).

quadrat (o porció) on tampoc no es compleix (3.3). Suposem que aquesta situació es repeteix en cada nova subdivisió. Obtenim, així, una successió de quadrats (o porcions) $\sigma_0 (= C_{j_0}) \supset \sigma_1 \supset \dots \supset \sigma_k \supset \dots$ en els quals la condició (3.3) no es compleix. Observem que les seves àrees satisfan $A(\sigma_k) \leq \ell^2/4^k$ i, per tant, $\lim_{k \rightarrow \infty} A(\sigma_k) = 0$. Tenim, doncs, una successió infinita d'“interval·ls encaixats” les àrees dels quals tendeixen a zero. Sabem que hi ha un únic punt z_0 interior a tots ells

$$z_0 = \bigcap_{k=0}^{\infty} \sigma_k.$$

El punt z_0 pertany a C o al seu interior i, per tant, $f(z)$ és analítica en aquest punt. Això vol dir que $f'(z_0)$ existeix i que hi ha algun entorn $\mathcal{E}_\delta(z_0)$ en el qual

$$\left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0) \right| < \epsilon$$

si $z \in \mathcal{E}_\delta(z_0)$. Però hi ha un quadrat (o porció) σ_r a partir del qual $\sigma_k \subset \mathcal{E}_\delta(z_0)$, per a $k \geq r$. En aquest quadrat σ_r es compleix, per tant, la condició (3.3), la qual cosa contradiu la suposició original. La condició (3.3) s'ha d'assolir, doncs, després d'un nombre finit de subdivisions.

◇

Teorema 3.4 (Cauchy-Goursat) Si $f(z)$ és analítica sobre i a l'interior d'un contorn tancat simple C , aleshores

$$\oint_C f(z) dz = 0.$$

DEMOSTRACIÓ: L'objectiu és demostrar que per a cada $\epsilon' > 0$

$$\left| \oint_C f(z) dz \right| < \epsilon', \quad (3.4)$$

ja que això equival a dir que la integral és zero.

Comencem dividint l'interior de C amb quadrats i porcions de quadrat, de manera que es compleixi la condició (3.3) del lema 3.3. Aleshores

$$\oint_C f(z) dz = \sum_j \oint_{C_j} f(z) dz.$$

Això és evident, ja que totes les línies interiors de la figura 3.3 es recorren sempre dues vegades en sentits oposats cancel·lant-se les seves contribucions. Definim ara les funcions $\delta_j(z)$

$$\delta_j(z) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{f(z) - f(z_j)}{z - z_j} - f'(z_j).$$

El lema 3.3 ens assegura que $|\delta_j(z)| < \epsilon$ si z és a l'interior o sobre C_j . Si aïllem $f(z)$ tenim

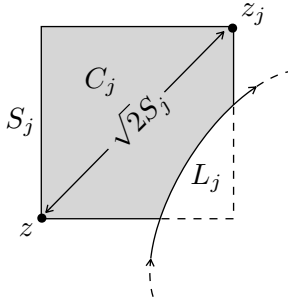
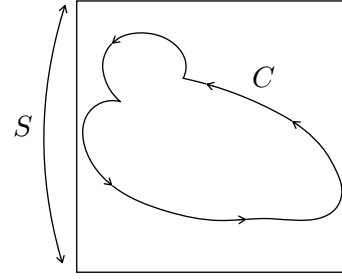
$$f(z) = f(z_j) - z_j f'(z_j) + z f'(z_j) + (z - z_j) \delta_j(z).$$

Per tant,

$$\begin{aligned} \oint_{C_j} f(z) dz &= f(z_j) \oint_{C_j} dz - z_j f'(z_j) \oint_{C_j} dz + f'(z_j) \oint_{C_j} z dz \\ &\quad + \oint_{C_j} (z - z_j) \delta_j(z) dz. \end{aligned}$$

Les integrals de la primera línia s'anul·len com a conseqüència del teorema de Cauchy original (teorema 3.2), ja que els integrands són funcions analítiques amb derivada contínua. Tenim, doncs,

$$\left| \oint_{C_j} f(z) dz \right| \leq \oint_{C_j} |z - z_j| |\delta_j(z)| |dz| < \epsilon \oint_{C_j} |z - z_j| |dz|.$$

Figura 3.5: Quadrat o porció C_j .Figura 3.6: Quadrat que conté a C .

Observem que, en el cas més desfavorable, en què z i z_j estan en vèrtexs oposats de C_j (vegeu la figura 3.5), tenim $|z - z_j| \leq \sqrt{2}S_j$, on S_j és el costat del quadrat C_j . Observem també que el perímetre del quadrat (o porció) C_j satisfà $\ell(C_j) \leq 4S_j + L_j$, on L_j és la longitud de la porció del contorn C continguda a C_j .

Amb tot això arribem a

$$\left| \oint_{C_j} f(z) dz \right| \leq \sqrt{2}S_j (4S_j + L_j) \epsilon \leq \sqrt{2} (4S_j^2 + SL_j) \epsilon,$$

on S és la longitud del costat d'un quadrat que conté al contorn C sencer (vegeu la figura 3.6).

Per tant,

$$\begin{aligned} \left| \oint_C f(z) dz \right| &\leq \sum_j \left| \oint_{C_j} f(z) dz \right| \leq \sqrt{2} \left(4 \sum_j S_j^2 + S \sum_j L_j \right) \epsilon \\ &\leq \sqrt{2}S (4S + L_C) \epsilon, \end{aligned}$$

on L_C és la longitud total de C . Llavors, prenent $\epsilon = \epsilon' / [\sqrt{2}S(4S + L)]$ arribem finalment a (3.4).

◇

El teorema de Cauchy-Goursat també és vàlid per als contorns del costat esquerre de la figura 3.7, on suposem que la funció f és analítica a les regions ombrejades. La raó per la qual això és així s'indica esquemàticament a la dreta de la mateixa figura.

En el cas (a), el teorema de Cauchy-Goursat afirma que $\oint_{C+C_1+C_2} f(z) dz = 0$, ja que equival a aplicar el teorema a $\oint_{C'} f(z) dz$, on les integrals sobre els talls es cancel·len. Notem que C es recorre en sentit antihorari, mentre que C_1 i C_2 es recorren en sentit horari (la regla mnemotècnica és que quan ens movem sobre el

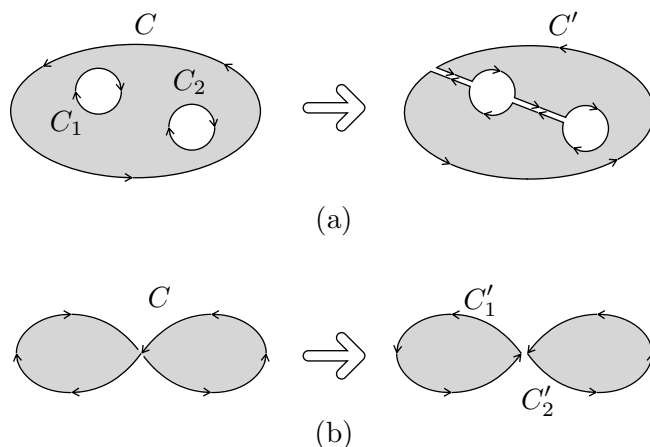


Figura 3.7: Generalitzacions del teorema de Cauchy-Goursat. Els costats dels talls i els vèrtexs de les figures de la dreta s'han d'imaginar coincidents.

contorn, la regió on f és analítica ha de quedar a l'esquerra). En el cas (b), tot i que el contorn C no és simple, tenim $\oint_C f(z) dz = 0$, ja que equival a aplicar el teorema 3.4 a $-\oint_{C'_1} f(z) dz$ i a $\oint_{C'_2} f(z) dz$ separatament. Aquest resultat es generalitza immediatament en el cas en què C es talla a si mateix en un nombre finit de punts, sempre que C estigui contingut en un domini *simplement* connex on f és analítica.

Una conseqüència del teorema de Cauchy-Goursat és que la integral sobre un contorn (tancat o obert) d'una funció analítica no canvia si “deformem” el contorn (mantenint fixos els extrems, si el contorn és obert) i la funció és analítica a la regió “escombrada” en la deformació. A la figura 3.8, tenim $\int_C f(z) dz = \int_{C'} f(z) dz$, ja que $\int_{C+C'^*} f(z) dz = 0$.

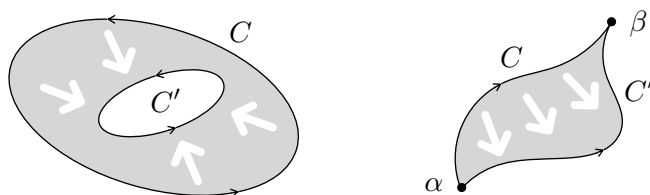


Figura 3.8: $\int_C f(z) dz$ no canvia si C es deforma a C' i f és analítica a la regió ombrejada.

3.3 Integrals independents del camí

Ara veurem en quines condicions és possible definir

$$F(z) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{z_0}^z f(z) dz,$$

independentment del contorn que connecta el punt fix z_0 amb el punt variable z . El darrer paràgraf de la secció anterior ja ens suggereix la resposta.

Lema 3.5 *Si $f(z)$ és analítica en un domini D obert i simplement connex, i $z_0 \in D$, aleshores per a tot $z \in D$ existeix la integral*

$$\int_{z_0}^z f(z) dz$$

i és independent del contorn que connecta z_0 amb z .

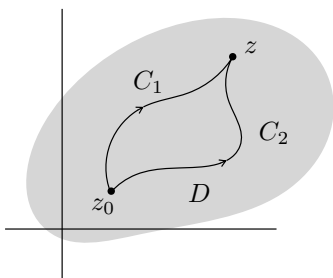


Figura 3.9: Si f és analítica a D , la integral $\int_{z_0}^z f(z) dz$ no depèn del contorn utilitzat.

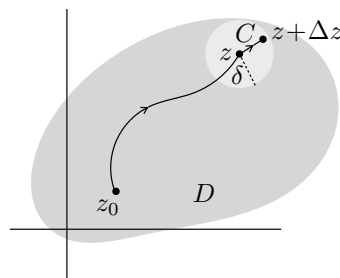


Figura 3.10: Contorn C i altres elements emprats a la demostració del teorema 3.6.

DEMOSTRACIÓ: En ser $f(z)$ analítica, és també contínua i, per tant, integrable sobre qualsevol contorn contingut a D . Siguin C_1 i C_2 dos contorns que van del punt fix z_0 al punt variable z i C el contorn constituït per C_1 seguit de C_2^* (vegeu la figura 3.9). Com que D és simplement connex, $f(z)$ és analítica sobre i a l'interior de C i el teorema de Cauchy-Goursat ens garanteix que $\int_C f(z) dz = 0$, és a dir,

$$0 = \int_{C_1} f(z) dz + \int_{C_2^*} f(z) dz = \int_{C_1} f(z) dz - \int_{C_2} f(z) dz$$

i, per tant,

$$\int_{C_1} f(z) dz = \int_{C_2} f(z) dz.$$

◇

En aquesta situació té sentit, doncs, definir la funció $F(z) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{z_0}^z f(z') dz'$. Vegem, tot seguit, algunes propietats d'aquesta funció.

Teorema 3.6 Si $f(z)$ és analítica en un domini D obert i simplement connex, i $z_0 \in D$, aleshores la funció

$$F(z) = \int_{z_0}^z f(z') dz'$$

és analítica a D i $F'(z) = f(z)$.

DEMOSTRACIÓ: Siguin z i $z + \Delta z$ dos punts de D (vegeu figura 3.10). Comencem amb la demostració de la igualtat

$$1 = \frac{1}{\Delta z} \int_z^{z+\Delta z} dz'. \quad (3.5)$$

Com que la funció constant $f(z') = 1$ és analítica, el lema 3.5 ens permet utilitzar qualsevol contorn per calcular la integral (3.5). Escollim el contorn C , definit per $z'(t) \stackrel{\text{def}}{=} z + t\Delta z$, $t \in [0, 1]$, $dz' = \Delta z dt$, que és la línia recta que va de z a $z + \Delta z$. Així doncs,

$$\int_C dz' = \int_0^1 \Delta z dt = \Delta z \int_0^1 dt = \Delta z,$$

que podem escriure en la forma (3.5). Si multipliquem els dos costats d'aquesta igualtat per $f(z)$ obtenim

$$f(z) = \frac{f(z)}{\Delta z} \int_z^{z+\Delta z} dz' = \frac{1}{\Delta z} \int_z^{z+\Delta z} f(z) dz', \quad (3.6)$$

ja que $f(z)$ no depèn de la variable d'integració z' .

D'altra banda, usant novament el lema 3.5 tenim

$$F(z + \Delta z) - F(z) = \int_{z_0}^{z+\Delta z} f(z') dz' - \int_{z_0}^z f(z') dz' = \int_z^{z+\Delta z} f(z') dz'.$$

Per tant,

$$\frac{F(z + \Delta z) - F(z)}{\Delta z} = \frac{1}{\Delta z} \int_z^{z+\Delta z} f(z') dz'. \quad (3.7)$$

Si restem (3.7) de (3.6) obtenim

$$\left| \frac{F(z + \Delta z) - F(z)}{\Delta z} - f(z) \right| \leq \frac{1}{|\Delta z|} \int_z^{z+\Delta z} |f(z') - f(z)| |dz'|. \quad (3.8)$$

En ser $f(z)$ contínua (ja que, per hipòtesi, és analítica), per a cada $\epsilon > 0$, hi ha un $\delta > 0$ tal que $|f(z') - f(z)| < \epsilon$ si $|z' - z| < \delta$. Com que $|z' - z| \leq |\Delta z|$, si prenem $|\Delta z| < \delta$ tenim

$$\left| \frac{F(z + \Delta z) - F(z)}{\Delta z} - f(z) \right| < \frac{\epsilon}{|\Delta z|} \int_z^{z+\Delta z} |dz'| = \epsilon,$$

i, per tant,

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{F(z + \Delta z) - F(z)}{\Delta z} = f(z),$$

és a dir, $F(z)$ és derivable a tot D (i analítica, ja que D és obert) i $F'(z) = f(z)$.

◇

Aquest resultat ens diu que en un domini obert *simplement connex* les funcions analítiques sempre tenen primitiva, la qual també és analítica. En altres paraules, en aquests dominis una funció analítica és la derivada d'una altra funció analítica.

La situació és similar a la de les funcions d'una variable real i permet considerar la integració com l'operació inversa a la derivació. Per calcular la integral d'una funció *analítica* en un domini obert *simplement connex* només cal trobar una funció primitiva $G(z)$ de l'integrand. En efecte, si $G(z)$ és una primitiva de $f(z)$, com que $F(z)$ també ho és, tindrem $G(z) - F(z) = K$ (constant) i com que, per definició, $F(z_0) = 0$, tenim $K = G(z_0)$. Per tant, $F(z) = G(z) - G(z_0)$, és a dir,

$$\int_{z_0}^z f(z') dz' = G(z) - G(z_0), \text{ si } G'(z) = f(z). \quad (3.9)$$

Es pot considerar aquest resultat com el “teorema fonamental del càlcul” per a funcions de variable complexa *analítiques* en un domini obert *simplement connex*.

L'existència de primitiva d'una funció analítica f no està limitada (encara que sí garantida) al fet que el domini d'analicitat sigui obert i *simplement connex*. Per exemple, $f(z) = 1/z^2$ és analítica a $\mathbb{C}^* \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{C} - \{0\}$ (que no és simplement connex) i $G(z) = -1/z$ és una primitiva de f en el mateix domini $\mathbb{C}^*$. En aquest cas, l'equació (3.9) també es compleix *independentment* del contorn que connecti z_0 amb z , tal com afirma el teorema següent.

Teorema 3.7 Si $f(z)$ és analítica en un domini D (obert i connex) i existeix una primitiva $G(z)$ en el mateix domini D , aleshores si $\alpha, \beta \in D$ es compleix que

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(z) dz = G(\beta) - G(\alpha),$$

independentment del contorn utilitzat.

DEMOSTRACIÓ: Considerem un contorn C contingut a D , definit per $z(t) = x(t) + iy(t)$, $a \leq t \leq b$, amb $z(a) = \alpha$ i $z(b) = \beta$. Suposem que $G(z) = U(x, y) + iV(x, y)$ sigui una primitiva de $f(z)$ en el mateix domini i considerem la funció $h : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ definida per $h(t) \stackrel{\text{def}}{=} G[z(t)]$. Observem que

$$\begin{aligned} \frac{dh}{dt}(t) &= U_x x' - V_x y' + iV_x x' + iU_x y' \\ &= U_x x' + U_y y' - iU_y x' + iU_x y' \\ &= (U_x - iU_y)(x' + iy') = G'[z(t)] z'(t) = f[z(t)] z'(t), \end{aligned}$$

on hem suprimit els arguments de les funcions en els passos intermedis per simplificar les expressions i hem usat la regla de la cadena i les condicions de Cauchy-Riemann. Per tant, tenim

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{\beta} f(z) dz &= \int_a^b f[z(t)] z'(t) dt \\ &= \int_a^b \frac{dh}{dt} dt = h(b) - h(a) = G(\beta) - G(\alpha). \end{aligned}$$

◇

Així doncs, la igualtat (3.9) també es compleix encara que el domini d'analicitat de f no sigui *simplement* connex, si existeix una primitiva analítica en el *mateix* domini. Com a conseqüència, en aquesta situació les integrals de f sobre camins tancats són nul·les encara que envoltin “forats” on f no sigui analítica.

Exemple 3.2 Considerem la funció $1/z^2$, que és analítica en el domini obert, però no simplement connex, $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{0\}$. Considerem també el contorn C de la figura 3.11, definit per $z(t) = \cos(3\pi t) + i \sin(5\pi t/2)$, que està contingut a $\mathbb{C}^*$ i que no és un contorn simple, ja que es talla a ell mateix. El punt inicial de C és $z = 1$, i el final, $z = -1 + i$. Volem calcular $\int_C (1/z^2) dz$.

Malgrat la seva aparent complexitat, el càlcul és senzill perquè $G(z) = -1/z$ és una primitiva de $f(z) = 1/z^2$ al mateix domini $\mathbb{C}^*$. Tot i que aquest domini no és simplement connex, tenim que

$$\int_C \frac{dz}{z^2} = \left[-\frac{1}{z} \right]_{z=1}^{z=-1+i} = \frac{3+i}{2}.$$

Notem que si C fos *qualsevol* contorn tancat de $\mathbb{C}^*$, la integral seria 0.

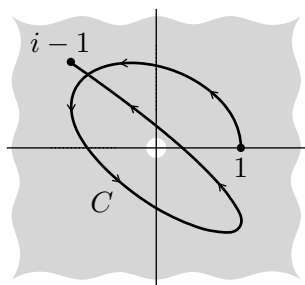


Figura 3.11: Contorn de l'exemple 3.2. En gris es mostra el domini obert $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{0\}$, on la funció $1/z^2$ té primitiva.

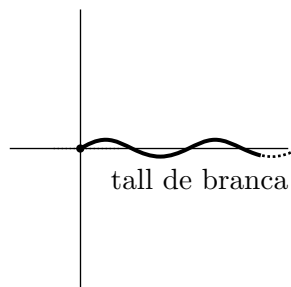


Figura 3.12: Domini simplement connex consistent en tot $\mathbb{C}$ menys el tall de branca $z(t) = t + i \sin t$, $0 \leq t$.

Exemple 3.3 La funció $f(z) = 1/z$ és analítica a $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{0\}$ i té com a primitiva qualsevol branca de $G(z) = \log z$, el domini d'analicitat de la qual és $\tilde{\mathbb{C}} = \mathbb{C} - \{\text{tall de branca}\}$. El tall es pot fer en qualsevol direcció. Com que $\tilde{\mathbb{C}} \subset \mathbb{C}^*$, el teorema 3.7 és aplicable a $\tilde{\mathbb{C}}$ i només podem garantir que les integrals de $f(z)$ siguin independents del camí (i que les integrals sobre contorns tancats siguin 0) en aquesta regió, que és el domini comú d'analicitat de f i de G . Però no podem garantir que les integrals de $f(z)$ sobre contorns tancats que envoltin l'origen (punt d'embranchament de G) s'anul·lin, ja que el teorema 3.7 no és aplicable en aquest cas perquè el contorn necessàriament travessaria el tall de branca on f és analítica però G no ho és. En efecte, si considerem, per exemple, el contorn tancat circular C descrit per $z(t) = e^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$, tenim

$$\oint_C \frac{dz}{z} = \int_0^{2\pi} \frac{ie^{it}}{e^{it}} dt = i \int_0^{2\pi} dt = 2\pi i \neq 0. \quad (3.10)$$

Això ens suggereix la pregunta següent: seria possible una definició alternativa de $\log z$ que fos analítica a tot $\mathbb{C}^*$? Aquest exemple demostra que no és possible. Si anomenem $G(z)$ aquest nou “logaritme”, per definició hauria de satisfer $z = e^{G(z)}$ per a tot $z \in \mathbb{C}^*$ (el logaritme és la funció inversa de l'exponencial). Si derivem aquesta expressió obtenim

$$1 = e^{G(z)} G'(z) = z G'(z).$$

Per tant, $G'(z) = 1/z$, és a dir, $G(z)$ seria una primitiva de $1/z$ a $\mathbb{C}^*$ i, d'acord amb el teorema 3.7, tindríem $\oint_C (1/z) dz = 0$ per a qualsevol contorn tancat. Com que (3.10) ho contradiu, la suposició que $G(z)$ existeix a $\mathbb{C}^*$ és falsa.

D'altra banda, el teorema 3.6 garanteix que en qualsevol domini del tipus $\mathbb{C} - \{\text{tall de branca}\}$, que és simplement connex, existirà una branca de $\log z$. Ni

tan sols cal que el tall de branca sigui una semirecta. Podria ser, per exemple, la corba definida per $z(t) = t + i \sin t$, $0 \leq t$ de la figura 3.12.

En general, podem afirmar que si $\oint_C f(z) dz \neq 0$ per a algun contorn tancat del domini d'analiticitat de f , la primitiva de f no existeix en la totalitat d'aquest domini.

Teorema 3.8 Si $f(z)$ és contínua en un domini D i per a qualsevol contorn tancat C de D es compleix que $\oint_C f(z) dz = 0$, aleshores per a qualsevol $z_0 \in D$, la funció

$$F(z) = \int_{z_0}^z f(z') dz'$$

és analítica a D i $F'(z) = f(z)$.

DEMOSTRACIÓ: Només cal notar que en la demostració del teorema 3.6 (on suposàvem l'analiticitat de f en un domini simplement connex), únicament hem utilitzat que les integrals entre dos punts són independents del contorn que els uneix (aquí, això ho garanteix la hipòtesi que $\oint_C f(z) dz = 0$ per a qualsevol contorn tancat) i la continuïtat de f (just després de la desigualtat (3.8)).

◇

És important observar que aquest teorema no requereix que el domini D (obert i connex) sigui *simplement* connex.

3.4 Fórmules integrals de Cauchy

Ara veurem, en forma de teoremes, diversos resultats que són conseqüència del teorema de Cauchy-Goursat.

Teorema 3.9 (Primera fórmula integral de Cauchy) Si $f(z)$ és una funció analítica sobre i a l'interior d'un contorn tancat simple C i z_0 és un punt de l'interior de C , aleshores

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz.$$

DEMOSTRACIÓ: Considerem una circumferència $C_0 = \{z : |z - z_0| = \delta\}$ interior al contorn C , és a dir, amb el radi δ més petit que la distància mínima d de z_0 al contorn C (vegeu la figura 3.13). Com que la funció $f(z)/(z - z_0)$ és analítica a la regió compresa entre els contorns C i C_0 ,

ja hem vist que el teorema de Cauchy-Goursat ens permet substituir un contorn per l'altre, és a dir,

$$\oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \oint_{C_0} \frac{f(z)}{z - z_0} dz.$$

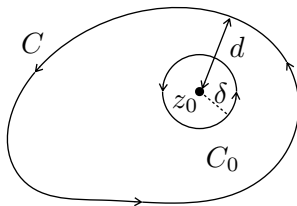


Figura 3.13: Contorns considerats a la demostració de la primera fórmula integral de Cauchy.

Si al numerador de l'integrand de la integral de la dreta li sumem i li restem la constant $f(z_0)$ tenim

$$\oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz = f(z_0) \oint_{C_0} \frac{1}{z - z_0} dz + \oint_{C_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz. \quad (3.11)$$

Per calcular la primera d'aquestes integrals parametritzarem el contorn C_0 amb $z(t) = z_0 + \delta e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, $dz = \delta e^{it} i dt$

$$\oint_{C_0} \frac{1}{z - z_0} dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{\delta e^{it}} \delta e^{it} i dt = \int_0^{2\pi} i dt = 2\pi i,$$

que no depèn del valor de δ . Si ho substituïm a (3.11) i ho passem al costat esquerre trobem que

$$\left| \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz - 2\pi i f(z_0) \right| \leq \oint_{C_0} \frac{|f(z) - f(z_0)|}{|z - z_0|} |dz|.$$

En ser $f(z)$ contínua, per a cada $\epsilon > 0$, hi ha un $\delta > 0$ tal que si $|z - z_0| \leq \delta$, llavors $|f(z) - f(z_0)| < \epsilon$. Si fem servir aquest δ com a radi de C_0 tenim

$$\left| \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz - 2\pi i f(z_0) \right| < \frac{\epsilon}{\delta} \oint_{C_0} |dz| = \frac{\epsilon}{\delta} (2\pi\delta) = 2\pi\epsilon.$$

El terme de l'esquerra d'aquesta desigualtat és el mòdul d'un nombre complex i és, per tant, un nombre real no negatiu. D'altra banda, la desigualtat ens diu que aquest nombre és menor que qualsevol

nombre real positiu $2\pi\epsilon$ i, per tant, ha de ser zero. Deduïm, doncs, que

$$\oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz = 2\pi i f(z_0).$$

◇

Exemple 3.4 Calculem la integral

$$\oint_C \frac{\sin z}{z^2 + 4} dz,$$

on C és la circumferència de radi 2 i centre a $z_0 = -i$ recorreguda en sentit antihorari.

Com que $z^2 + 4 = (z + 2i)(z - 2i)$ i el punt $z = -2i$ és a l'interior de C , mentre que $z = 2i$ és a l'exterior, podem expressar l'integrand de la manera següent

$$\frac{\sin z}{z^2 + 4} = \frac{\sin z / (z - 2i)}{z + 2i}.$$

La funció $f(z) = \sin z / (z - 2i)$ del numerador és analítica a l'interior i sobre C . Si fem servir la fórmula integral de Cauchy tenim

$$\oint_C \frac{\sin z}{z^2 + 4} dz = \oint_C \frac{f(z)}{z + 2i} dz = 2\pi i f(-2i) = 2\pi i \frac{\sin(-2i)}{-4i} = \frac{i\pi}{2} \sinh 2.$$

Observem que

$$\left(\frac{d}{dz_0} \right)^n \frac{1}{z - z_0} = \frac{n!}{(z - z_0)^{n+1}}.$$

Si usem aquesta igualtat a la primera fórmula integral de Cauchy i entrem les derivades dins la integral, obtenim

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz. \quad (3.12)$$

Sembla, doncs, que si $f(z)$ és analítica en un domini obert, és a dir, derivable *una* vegada en tots els seus punts, automàticament les seves derivades de *tots* els ordres existeixen. A més a més, la igualtat (3.12) ens diu que els valors d'aquestes derivades (i els de la mateixa funció) a qualsevol punt de l'*interior* de C estan determinats pels valors que la funció $f(z)$ pren *sobre* el contorn C .

Aquests resultats són sorprenents i tots dos són certs, però el raonament usat no és correcte, ja que no tenim cap garantia de poder entrar les derivades dins de la integral. La demostració correcta és una mica més complicada i utilitza el lema següent.

Lema 3.10 *Sigui $f(z)$ una funció contínua sobre un contorn tancat simple C . Si $n \in \mathbb{N}$ i $R(z)$ és la funció*

$$R(z) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\Delta z} \left\{ \frac{1}{(z - z_0 - \Delta z)^{n+1}} - \frac{1}{(z - z_0)^{n+1}} \right\} - \frac{n+1}{(z - z_0)^{n+2}},$$

on z_0 i $z_0 + \Delta z$ són punts interiors a C , aleshores

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \oint_C f(z) R(z) dz = 0.$$

DEMOSTRACIÓ: Utilitzarem la fórmula del binomi de Newton:

$$(a + b)^N = \sum_{k=0}^N \gamma_k a^{N-k} b^k, \text{ on } \gamma_k = \binom{N}{k} = \frac{N!}{k!(N-k)!}.$$

Combinant les diverses fraccions que apareixen a la definició de $R(z)$ obtenim

$$R(z) = \frac{(z - z_0)^{n+2} - (z - z_0 - \Delta z)^{n+1} [z - z_0 + (n+1)\Delta z]}{\Delta z (z - z_0 - \Delta z)^{n+1} (z - z_0)^{n+2}}. \quad (3.13)$$

Si utilitzem la fórmula del binomi de Newton amb $a = z - z_0$, $b = \Delta z$ i $N = n + 1$, tenim

$$\begin{aligned} (z - z_0 - \Delta z)^{n+1} &= (z - z_0)^{n+1} - (n+1)(z - z_0)^n \Delta z \\ &\quad + \Delta z^2 \sum_{j=0}^{n-1} \gamma_{j+2} (z - z_0)^{n-1-j} \Delta z^j. \end{aligned}$$

Quan ho substituïm al numerador de (3.13), observem que tots els termes d'ordre Δz^0 i Δz^1 desapareixen, i només queden termes d'ordre Δz^2 o superior. La forma exacta d'aquests termes no és important per a la demostració. Només és important observar que tots aquests termes formen un polinomi homogeni de grau $n + 2$ en les variables $(z - z_0)$ i Δz (és a dir, a cada terme la suma dels exponents de $(z - z_0)$ i de Δz és $n + 2$). Per tant, es poden escriure com

$$\Delta z^2 \sum_{j=0}^n \beta_j (z - z_0)^{n-j} \Delta z^j,$$

on els coeficients β_j depenen dels γ_k . Si ho substituïm a (3.13) tenim

$$R(z) = \frac{\Delta z \sum_{j=0}^n \beta_j (z - z_0)^{n-j} \Delta z^j}{(z - z_0 - \Delta z)^{n+1} (z - z_0)^{n+2}}.$$

Ara volem demostrar que $\oint_C f(z)R(z) dz$ es fa arbitràriament petit quan Δz tendeix a zero. Notem que

$$\left| \oint_C f(z)R(z) dz \right| \leq |\Delta z| \oint_C |f(z)| \frac{\sum_{j=0}^n |\beta_j| |z - z_0|^{n-j} |\Delta z|^j}{|z - z_0 - \Delta z|^{n+1} |z - z_0|^{n+2}} |dz|.$$

Siguin d i D , respectivament, les distàncies mínima i màxima de z_0 al contorn C , i sigui $0 < \delta < d/2$ (vegeu la figura 3.14). Si $|\Delta z| < \delta$ tenim

$$|z - z_0| \geq d, \quad (3.14)$$

$$|z - z_0| \leq D, \quad (3.15)$$

$$|z - z_0 - \Delta z| \geq ||z - z_0| - |\Delta z|| > d - \frac{d}{2} = \frac{d}{2}.$$

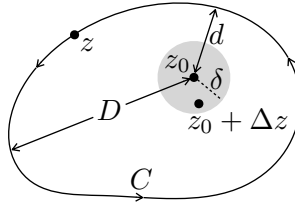


Figura 3.14: Diverses quantitats, contorns i regions considerades a la demostració del lema 3.10.

Si utilitzem (3.14) quan $|z - z_0|$ és al denominador i (3.15) quan $|z - z_0|$ és al numerador podem escriure

$$\left| \oint_C f(z)R(z) dz \right| \leq |\Delta z| \frac{\sum_{j=0}^n |\beta_j| D^{n-j} (d/2)^j}{(d/2)^{n+1} d^{n+2}} \oint_C |f(z)| |dz|.$$

En ser $f(z)$ contínua sobre C tenim que també $|f(z)|$ és contínua i, per tant, té un màxim sobre C , ja que el contorn C és un conjunt compacte. Si M és aquest màxim tenim $|f(z)| \leq M$, i si L_C és la longitud del contorn C tenim

$$\left| \oint_C f(z)R(z) dz \right| \leq |\Delta z| \frac{\sum_{j=0}^n |\beta_j| D^{n-j} (d/2)^j}{(d/2)^{n+1} d^{n+2}} M L_C.$$

Així doncs, per a tot $\epsilon > 0$ tenim $|\oint_C f(z)R(z) dz| < \epsilon$ si $|\Delta z| < \delta$, on

$$\delta = \min \left\{ \frac{d}{2}, \epsilon \left[\frac{\sum_{j=0}^n |\beta_j| D^{n-j} (d/2)^j}{(d/2)^{n+1} d^{n+2}} M L_C \right]^{-1} \right\}.$$

◇

Si utilitzem aquest lema podem ara demostrar la igualtat (3.12).

Teorema 3.11 (Segona fórmula integral de Cauchy) *Si $f(z)$ és una funció analítica sobre i a l'interior d'un contorn tancat C i z_0 és un punt de l'interior de C , aleshores existeixen les derivades de tot ordre de f a z_0 i es compleix*

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz.$$

DEMOSTRACIÓ: El teorema es demostra per inducció. La segona fórmula integral de Cauchy és correcta per a $n = 0$, ja que, en aquest cas, es redueix a la primera, ja demostrada. Suposem que és certa fins a n . En ser $f(z)$ contínua, la integral següent existeix:

$$\frac{(n+1)!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+2}} dz.$$

Si fem servir la hipòtesi d'inducció i el lema anterior, ara és fàcil demostrar que aquesta integral és el límit $\lim_{\Delta z \rightarrow 0} [f^{(n)}(z_0 + \Delta z) - f^{(n)}(z_0)]/\Delta z$ i és, per tant, $f^{(n+1)}(z_0)$. En efecte,

$$\begin{aligned} & \frac{f^{(n)}(z_0 + \Delta z) - f^{(n)}(z_0)}{\Delta z} - \frac{(n+1)!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+2}} dz \\ &= \frac{n!}{2\pi i} \left\{ \frac{1}{\Delta z} \left[\oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0 - \Delta z)^{n+1}} dz - \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz \right] \right. \\ & \quad \left. - (n+1) \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+2}} dz \right\} = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C f(z) R(z) dz, \end{aligned}$$

i, per tant,

$$\begin{aligned} & \left| \frac{f^{(n)}(z_0 + \Delta z) - f^{(n)}(z_0)}{\Delta z} - \frac{(n+1)!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+2}} dz \right| \\ &= \frac{n!}{2\pi} \left| \oint_C f(z) R(z) dz \right|, \end{aligned}$$

que, d'acord amb el lema 3.10, tendeix a zero quan $\Delta z \rightarrow 0$.

◇

Corol·lari 3.12 *Si $f(z)$ és analítica en un punt z_0 , aleshores les seves derivades de tots els ordres, $f'(z)$, $f''(z)$, $f'''(z)$..., existeixen a z_0 i són també funcions analítiques en aquest punt.*

DEMOSTRACIÓ: Si $f(z)$ és analítica a z_0 , $f'(z)$ existeix en algun entorn $\mathcal{E}_r(z_0)$ de z_0 i, per tant, $f(z)$ és analítica a tots els punts d'aquest entorn (ja que és obert). Considerem ara un contorn tancat C dins de $\mathcal{E}_r(z_0)$ que tingui el punt z_0 en el seu interior. D'acord amb el teorema anterior, $f^{(n)}(z)$ existeix a tots els punts de l'interior d'aquest contorn i, per tant, també existeix en algun entorn de z_0 . Això vol dir que $f^{(n-1)}(z)$ és analítica a z_0 . En ser n arbitrari concloem que $f^{(n)}(z)$ és analítica a z_0 , per a tot n .

◇

Notem que aquest corol·lari ens assegura que si $f = u + iv$ és analítica, les funcions $u(x, y)$ i $v(x, y)$ tenen derivades parcials de tots els ordres.

Teorema 3.13 (Morera) *Si $f(z)$ és contínua en un domini obert D i es compleix que*

$$\oint_C f(z) dz = 0$$

per a qualsevol contorn tancat C de D , aleshores $f(z)$ és analítica a D .

DEMOSTRACIÓ: És una conseqüència immediata del teorema 3.8 (que ens assegura que $F(z) = \int_{z_0}^z f(z') dz'$ és analítica i que $F' = f$) i del corol·lari 3.12 (que ens assegura que la derivada de F també és analítica).

◇

Exemple 3.5 Volem veure que la funció $F(z)$, definida per

$$F(z) = \int_0^1 \sin(e^t \sin z) dt,$$

és analítica a tot $\mathbb{C}$.

Per demostrar-ho, observem que $f(t, z) = \sin(e^t \sin z)$, entesa com una funció de $[0, 1] \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, és contínua. Per tant, donat $\epsilon > 0$, existeix $\delta_{t,z} > 0$ tal que $|f(t, z + \Delta z) - f(t, z)| < \epsilon$ si $|\Delta z| < \delta_{t,z}$. En ser $[0, 1]$ un conjunt compacte podem definir $\delta_z = \min\{\delta_{t,z} : t \in [0, 1]\}$. Llavors, per a tot $t \in [0, 1]$, tenim $|f(t, z + \Delta z) - f(t, z)| < \epsilon$ si $|\Delta z| < \delta_z$. Per tant,

$$|F(z + \Delta z) - F(z)| \leq \int_0^1 |f(t, z + \Delta z) - f(t, z)| dt < \epsilon,$$

la qual cosa demostra que $F(z)$ és contínua a tot $\mathbb{C}$.

Sigui ara C un contorn tancat qualsevol. Tenim

$$\oint_C F(z) dz = \oint_C \int_0^1 f(t, z) dt dz = \int_0^1 \left[\oint_C f(t, z) dz \right] dt = \int_0^1 0 dt = 0,$$

on hem canviat l'ordre d'integració (la regió d'integració $[0, 1] \times C$ és compacta i $f(t, z)$ és contínua) i hem usat el teorema de Cauchy-Goursat (per a cada t la funció $f(t, z)$ és clarament analítica i, per tant, la integral sobre C és zero).

Si ara apliquem el teorema de Morera veiem que $F(z)$ és analítica a tot $\mathbb{C}$.

Teorema 3.14 (Desigualtat de Cauchy) *Sigui D el disc $|z - z_0| \leq r$. Si $f(z)$ és analítica a D i $|f(z)| \leq M, \forall z \in D$, aleshores*

$$|f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{n!M}{r^n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

DEMOSTRACIÓ: Si C és el cercle $|z - z_0| = r$, usant la segona fórmula integral de Cauchy tenim

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz,$$

i, per tant,

$$|f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{n!}{2\pi} \oint_C \frac{|f(z)|}{|z - z_0|^{n+1}} |dz| \leq \frac{n!M}{2\pi r^{n+1}} \oint_C |dz| = \frac{n!M}{r^n}.$$

◇

Teorema 3.15 (Liouville) *Si $f(z)$ és entera (és a dir, és analítica a tot el pla complex) i $|f(z)| < M, \forall z \in \mathbb{C}$, aleshores $f(z)$ és constant.*

DEMOSTRACIÓ: Considerem un punt qualsevol z_0 del pla complex. Si C és el cercle $|z - z_0| = r$ i utilitzem el teorema anterior amb $n = 1$ tenim

$$|f'(z_0)| \leq \frac{M}{r}.$$

Com que podem escollir r arbitràriament gran (f és analítica a tot el pla), tindrem que $|f'(z_0)| = 0$ i, per tant, $f'(z_0) = 0$. D'altra banda, com que z_0 ha estat escollit també arbitràriament, tindrem que $f'(z) = 0$ a tot el pla, és a dir, $f(z)$ és constant (teorema 2.7).

◇

Exemple 3.6 Vegem dues aplicacions senzilles del teorema de Liouville:

- 1) Siguin $f(z)$ i $g(z)$ dues funcions analítiques a tot $\mathbb{C}$ (enteres). Suposem que $g(z)$ no s'anul·la enlloc i que per a tot $z \in \mathbb{C}$ es compleix $|f(z)| \leq |g(z)|$. Llavors, necessàriament existeix una constant c , amb $|c| \leq 1$, tal que $f(z) = cg(z)$ per a tot $z \in \mathbb{C}$.

Això és una conseqüència del teorema de Liouville. Si $g(z) \neq 0$ a tot $\mathbb{C}$, la funció $h(z) \stackrel{\text{def}}{=} f(z)/g(z)$ és entera i satisfà $|h(z)| \leq 1$. Pel teorema de Liouville tenim $h(z) = c$ (constant). Això vol dir que $f(z) = cg(z)$ i, òbviament, tenim $|c| = |f(z)|/|g(z)| \leq 1$.

- 2) Ens preguntem si existeix alguna funció entera $f(z)$ tal que $\operatorname{Re} f(z)$ sigui fitada. La resposta és que les úniques funcions que satisfan aquesta condició són les constants.

Novament això és conseqüència del teorema de Liouville. Considerem la funció $h(z) \stackrel{\text{def}}{=} e^{f(z)} = e^{\operatorname{Re} f(z)} e^{i \operatorname{Im} f(z)}$, que és entera. Com que $|h(z)| = e^{\operatorname{Re} f(z)} \leq e^{M'}$, on M' és una fita superior de $\operatorname{Re} f(z)$, pel teorema de Liouville tenim que $h(z)$ és constant, d'on deduïm que $f(z)$ és també constant.

Teorema 3.16 (Teorema fonamental de l'àlgebra) *Si $P(z)$ és un polinomi de coeficients complexos, aleshores $P(z)$ s'anul·la en algun punt del pla complex.*

DEMOSTRACIÓ: Sigui $f(z) = 1/P(z)$. Si $P(z)$ no s'anul·la enlloc, la funció $f(z)$ és analítica a tot el pla complex. Considerem ara el disc $|z| \leq r$. Aquest disc és un conjunt compacte, i com que la funció $|f(z)|$ és contínua, té un màxim M al disc. D'altra banda, com que $\lim_{z \rightarrow \infty} |P(z)| = \infty$, tenim $\lim_{z \rightarrow \infty} |f(z)| = 0$ i, per tant, podem fer $|f(z)|$ tan petit com vulguem fora del disc si r és suficientment gran. Així doncs, $|f(z)|$ és fitada a tot el pla complex. Llavors, d'acord amb el teorema de Liouville, $f(z)$ és constant i arribem a la contradicció que $P(z)$ també és constant.

◇

Corol·lari 3.17 *Si $P_n(z)$ és un polinomi de grau n de coeficients complexos, aleshores $P_n(z)$ s'anul·la en n punts (no necessàriament diferents) del pla complex.*

DEMOSTRACIÓ: Com que $P_n(z)$ s'ha d'anul·lar en algun punt z_1 , tindrem $P_n(z) = (z - z_1) P_{n-1}(z)$, on $P_{n-1}(z)$ és un polinomi de grau

$n-1$ que també s'haurà d'anul·lar en algun punt z_2 . Tindrem, doncs, que $P_n(z) = (z-z_1)(z-z_2)P_{n-2}(z)$. Si repetim l'argument arribem a

$$P_n(z) = (z-z_1) \cdots (z-z_n) P_0,$$

on P_0 és un polinomi de grau 0, és a dir, una constant.

Cal insistir que els zeros $z_1, \dots, z_n$, de $P_n(z)$ no són necessàriament diferents.

◇

El teorema fonamental de l'àlgebra ens assegura que tota equació polinòmica de qualsevol grau té sempre solucions complexes. Recordem que aquesta és una limitació dels nombres reals que ha motivat l'ampliació de $\mathbb{R}$ a $\mathbb{C}$.

Teorema 3.18 (Mòdul màxim) *Si $f(z)$ és analítica en un domini D (obert i connex), aleshores $|f(z)|$ no té màxim a D , llevat que $|f(z)|$ sigui constant.*

DEMOSTRACIÓ: Demostrem primer que, si en un entorn $\mathcal{E}_{r_0}(z_0)$ del punt $z_0 \in D$ es compleix

$$|f(z)| \leq |f(z_0)|, \quad (3.16)$$

aleshores $|f(z)| = |f(z_0)|$, $\forall z \in \mathcal{E}_{r_0}(z_0)$, és a dir, $|f|$ és constant en tot aquest entorn. En efecte, si C_δ és un cercle de centre z_0 i radi $\delta < r_0$, utilitzant la primera fórmula integral de Cauchy i parametritzant $z = \delta e^{i\theta}$, $\theta \in [0, 2\pi]$, tenim

$$\begin{aligned} f(z_0) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_\delta} \frac{f(z)}{z-z_0} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + \delta e^{i\theta})}{\delta e^{i\theta}} \delta e^{i\theta} i d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} f(z_0 + \delta e^{i\theta}) d\theta, \end{aligned}$$

d'on deduïm que

$$|f(z_0)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + \delta e^{i\theta})| d\theta,$$

és a dir, $|f(z_0)|$ és menor o igual que la mitjana dels valors que $|f|$ pren sobre els punts de C_δ . Però això és incompatible amb la desigualtat (3.16), llevat que en tots els punts de C_δ tinguem $|f(z)| = |f(z_0)|$. Per tant, com que δ pot tenir qualsevol valor inferior a r_0 , concloem que

$$|f(z)| = |f(z_0)|, \quad \forall z \in \mathcal{E}_{r_0}(z_0).$$

Suposem ara que el màxim de $|f|$ a D s'assoleix en un punt z_0 , és a dir,

$$|f(z_0)| \geq |f(z)|, \forall z \in D.$$

Considerem un punt w arbitrari de D . Demostrarem que en aquest punt $|f|$ també pren el valor $|f(z_0)|$, la qual cosa ens porta a afirmar que $|f|$ és constant a tot D . En efecte, com que D és connex podem unir amb una línia poligonal d'un nombre finit de segments rectilinis el punt z_0 (on, per hipòtesi, $|f|$ té el màxim) amb el punt w (vegeu la figura 3.15).

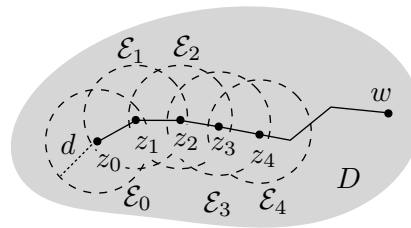


Figura 3.15: Contorn poligonal emprat en la demostració del teorema 3.18

Considerem un entorn $\mathcal{E}_0 \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{E}_d(z_0)$, on d és menor que la distància mínima entre la poligonal i la frontera de D (si D és tot el pla complex, d és qualsevol nombre real). Això assegura que $\mathcal{E}_0 \subset D$.

Siguin $z_1, z_2, \dots, z_n = w$ una col·lecció *finita* de punts de la poligonal, tals que $|z_k - z_{k-1}| < d$ (això és possible perquè la longitud de la poligonal és finita), i considerem entorns $\mathcal{E}_k$ de radi d centrats en cadascun dels punts z_k (l'elecció del radi d garanteix que tots els $\mathcal{E}_k$ són dins de D).

Amb aquesta construcció tenim $z_k \in \mathcal{E}_{k-1}$, és a dir, cadascun dels punts z_k és dins l'entorn del punt precedent. Llavors, si a z_0 hi ha el màxim de $|f|$ a D , aquesta funció és constant a $\mathcal{E}_0$ com hem vist més amunt i, en particular, $|f(z_1)| = |f(z_0)|$, ja que $z_1 \in \mathcal{E}_0$. Per tant, a z_1 també hi ha el màxim de $|f|$ a D i aquesta funció també ha de ser constant a $\mathcal{E}_1$. El seu valor en aquest entorn és $|f(z)| = |f(z_1)| = |f(z_0)|, \forall z \in \mathcal{E}_1$ i, en particular, $|f(z_2)| = |f(z_0)|$, ja que $z_2 \in \mathcal{E}_1$. Si reiterem aquest raonament arribem, després d'un nombre finit de passos, a $|f(w)| = |f(z_0)|$ i com que w és un punt qualsevol de D , concloem que $|f|$ té el valor constant $|f(z_0)|$ a tot D .

Per tant, $|f|$ no pot tenir un màxim a D si no és una funció constant.

◇

Corol·lari 3.19 Si $f(z)$ és analítica i no constant en un domini D (obert i connex), i R és un subconjunt tancat i fitat (compacte) de D , aleshores el màxim de $|f(z)|$ a R s'assoleix en algun punt de la frontera de R , no al seu interior.

Teorema 3.20 (Mòdul mínim) Si $f(z)$ és analítica en un domini D (obert i connex) i $f(z) \neq 0$ a D , aleshores $|f(z)|$ no té mínim a D , llevat que $|f(z)|$ sigui constant.

DEMOSTRACIÓ: Com que la funció $1/f(z)$ també és analítica a D , d'acord amb el teorema 3.18, la funció $1/|f(z)|$ no pot tenir màxim a D si no és constant. Per tant, $|f(z)|$ no pot tenir mínim a D si no és constant.

◇

Corol·lari 3.21 Si $f(z)$ és analítica, no nul·la i no constant en un domini D (obert i connex), i R és un subconjunt tancat i fitat (compacte) de D , aleshores el mínim de $|f(z)|$ a R s'assoleix en algun punt de la frontera de R , no al seu interior.

Exemple 3.7 Determinem el valor màxim de $|f(z)|$ a la regió $|z - 1| \leq 1$, on $f(z) = z^2 - z$. D'acord amb el corol·lari 3.19, el màxim de $|f(z)|$ s'assoleix en algun punt del cercle $|z - 1| = 1$, els punts de la qual són de la forma $z = 1 + e^{i\theta}$, on $\theta \in [0, 2\pi]$. En aquests punts tenim

$$f(z) = (1 + e^{i\theta})^2 - (1 + e^{i\theta}) = e^{i\theta}(1 + e^{i\theta})$$

i, per tant,

$$|f(z)| = |1 + e^{i\theta}| = (2 + 2\cos\theta)^{1/2}.$$

El valor màxim de $|f(z)|$ s'assoleix quan $\theta = 0$, que correspon al punt $z = 2$ del cercle. Tenim, doncs,

$$|f(z)|_{\text{màx}} = |f(2)| = 2.$$

3.5 Problemes

P3.1 A partir de la definició d'integral en el pla complex, trobeu la integral al llarg de la circumferència $|z| = 1$, recorreguda en sentit antihorari, de les funcions següents:

- (a) $\operatorname{Re} z$ (c) $\log z$, branca $-\pi \leq \theta < \pi$
 (b) z^p , on $p \in \mathbb{Z}$ (d) $\sqrt{z}$, on $\theta_0 \leq \theta < \theta_0 + 2\pi$.

P3.2 Sense utilitzar el teorema de Cauchy-Goursat, calculeu $\oint_C (3z + i) dz$, on C és el contorn triangular de la figura 3.16.

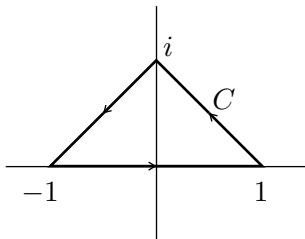


Figura 3.16: Contorn d'integració del problema **P3.2**

P3.3 A partir de la definició d'integral en el pla complex, proveu que

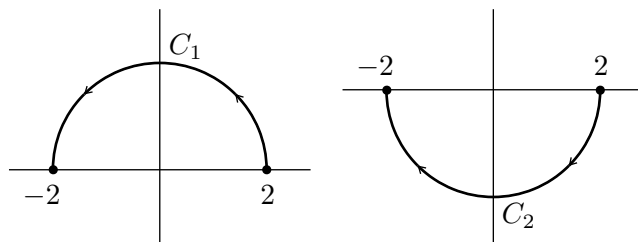
$$\int_{z_1}^{z_2} z \, dz = \frac{z_2^2}{2} - \frac{z_1^2}{2}.$$

P3.4 Calculeu:

- (a) $\int_{C_i} \frac{2+z}{z} dz$,
 on C_i ($i = 1, 2$) són els contorns semicirculars de la figura 3.17.
 (b) $\int_C (z^*)^2 dz$,
 on C és el cercle $|z - 1| = 1$, en sentit antihorari.
 (c) $\int_C \frac{dz}{z - 2}$,
 on C és el cercle $|z - 2| = 4$, en sentit antihorari.

P3.5 Demostreu, amb la primera fórmula integral de Cauchy, que si C és la circumferència $|z| = 2$, per a tot $k \in \mathbb{Z}$ es compleix

$$\oint_C \frac{e^{i2\pi kz}}{z - 1} dz = 2\pi i.$$

Figura 3.17: Contorns del problema **P3.4**.

P3.6 Utilitzeu la segona fórmula de la integral de Cauchy per calcular

$$\oint_C \frac{\cosh z}{z^4} dz,$$

on C és un contorn tancat que té l'origen al seu interior.

P3.7 Si $p \in \mathbb{Z}$, C és un contorn tancat i z_0 és interior a C , demostreu la igualtat següent:

$$\oint_C (z - z_0)^p dz = \begin{cases} 0, & \text{si } p > -1 \\ 2\pi i, & \text{si } p = -1 \\ 0, & \text{si } p < -1. \end{cases}$$

P3.8 Demostreu que si $f(z)$ analítica a $z = 0$,

$$\int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) \cos \theta d\theta = \pi f'(0).$$

P3.9 Demostreu que

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{e^{zt}}{z^2 + 1} dz = \sin t,$$

on C és la circumferència $|z| = 3$ recorreguda en sentit antihorari.

P3.10 Sigui $z = x + iy = re^{i\theta}$. Considereu la branca del logaritme

$$\log z = \log r + i\theta, \quad \theta \in [0, 2\pi).$$

Trobeu el valor màxim de $|\log z|$ a la regió limitada pel quadrat de vèrtexs $1, 2, 1 + i$ i $2 + i$.

P3.11 Aplicant la primera fórmula integral de Cauchy avalueu la integral

$$\int_C \frac{\cos z}{z} dz,$$

on C és la circumferència de radi 1 centrada a l'origen i recorreguda en sentit antihorari. Després, avaleu directament la mateixa integral parametritzant el contorn. A partir d'aquest resultat deduïu que

$$\int_0^{2\pi} \cos(\cos t) \cosh(\sin t) dt = 2\pi.$$

- P3.12** (a) Sigui D un conjunt obert no fitat de $\mathbb{C}$. És vàlid el teorema de Liouville a D ? És a dir, si $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ és una funció analítica fitada, aleshores $f(z)$ ha de ser constant?
- (b) Existeix una funció entera f tal que $\operatorname{Im} f$ sigui fitada i $f(n) = i/n$, per a tot $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$?
- (c) Existeix una funció entera tal que $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = 0$ i $f(0) = 1$?
- (d) Si f és doblement periòdica, $f(z+1) = f(z)$ i $f(z+i) = f(z)$ per a tot $z \in \mathbb{C}$, i no és constant, pot ser analítica a $|z| < 2$?

P3.13 Supposeu que $f(z)$ és una funció entera. Demostreu que

- (a) si $|f(z)| \leq e^{\operatorname{Re}(z)}$ per a tot z aleshores $f(z) = ce^z$ per a alguna constant c .
- (b) si f no és constant, la imatge de $\mathbb{C}$, $f(\mathbb{C})$, és densa a $\mathbb{C}$. És a dir, per a tot $w \in \mathbb{C}$ i per a tot $\epsilon > 0$, existeix $z \in \mathbb{C}$ tal que $|f(z) - w| < \epsilon$. En paraules, arbitràriament a prop d'un nombre complex qualsevol existeix la imatge per f d'un altre nombre complex.
- (c) si $|f(z) + f'(z)|$ és fitada, necessàriament $f(z) = ae^{-z} + b$, on a i b són constants.

P3.14 Inspirant-vos en l'exemple 3.6, demostreu, a partir del teorema de mòdul màxim, que si $f = u + iv$ és analítica en un domini (obert i connex) D , ni u ni v poden assolir el seu màxim a D llevat que siguin constants. Això és important perquè demostra que les funcions harmòniques (que obeeixen l'equació de Laplace $\partial^2 u / \partial x^2 + \partial^2 u / \partial y^2 = 0$) també satisfan un "teorema del mòdul màxim", del qual se segueix, per exemple, el teorema d'unicitat de les solucions de l'equació de Laplace.

P3.15 Sigui $f(z)$ analítica i no constant en el domini (obert i connex) que conté la corona circular $A = \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 4\}$. Suposem també que $|f(z)| \leq 1$ quan $|z| = 1$ i $|f(z)| \leq 16$ quan $|z| = 4$. Determineu si és possible que $|f(\sqrt{2} + i)| = 3$ (suggeriment: considereu $g(z) = f(z)/z^2$).

SOLUCIONS

$$\begin{array}{ll} \text{S3.1} & \begin{array}{ll} \text{(a)} & i\pi \\ \text{(b)} & \begin{cases} 0 & \text{per } p \neq -1 \\ 2\pi i & \text{per } p = -1 \end{cases} \end{array} \\ & \begin{array}{ll} \text{(c)} & -2\pi i \\ \text{(d)} & -\frac{3}{4}e^{3i\theta_0/2} \end{array} \end{array}$$

S3.2 La integral de la funció $f(z) = 3z + i$ entre els punts 1 i i és $-(4 + i)$, entre els punts i i -1 és $4 - i$, i entre els punts -1 i 1, és $2i$. $\oint_C f(z) dz$ és la suma d'aquests tres resultats i el seu valor és 0, tal com ens garanteix el teorema de Cauchy-Goursat.

S3.3 La funció $f(z) = z$ és analítica a tot el pla complex. Per tant, la integral entre dos punts qualssevol z_1 i z_2 no depèn del camí escollit, tal com ens assegura el lema 3.5. Per calcular aquesta integral podem, doncs, escollir un camí qualsevol. Per exemple, el camí rectilini entre els dos punts parametritzat per

$$z(t) = z_1 + (z_2 - z_1)t,$$

on $t \in [0, 1]$ és un paràmetre real. Si diferenciem trobem $dz = (z_2 - z_1) dt$, i la integral es redueix a la integral d'un polinomi de variable real amb coeficients complexos,

$$\begin{aligned} \int_{z_1}^{z_2} z dz &= \int_0^1 [z_1 + (z_2 - z_1)t] (z_2 - z_1) dt \\ &= z_1 (z_2 - z_1) + \frac{(z_2 - z_1)^2}{2} = \frac{z_2^2}{2} - \frac{z_1^2}{2}. \end{aligned}$$

Alternativament, podem usar el “teorema fonamental del càlcul” (3.9). Una primitiva de $f(z) = z$ és $G(z) = z^2/2$, amb la qual cosa

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z) dz = G(z_2) - G(z_1) = \frac{z_2^2}{2} - \frac{z_1^2}{2}$$

independentment del camí que va de z_1 a z_2 .

S3.4 (a) Si parametritzem C_1 amb $z(\theta) = 2e^{i\theta}$, $\theta \in [0, \pi]$, $dz = 2e^{i\theta} i d\theta$, obtenim $\int_{C_1} [(2 + z)/z] dz = -4 + 2\pi i$.
Similarment, $\int_{C_2} [(2 + z)/z] dz = -4 - 2\pi i$.

$$\begin{array}{ll} \text{(b)} & 4\pi i \\ \text{(c)} & 2\pi i. \end{array}$$

S3.5 Notem que el punt $z = 1$ fa el paper de z_0 a la primera fórmula integral de Cauchy i que aquest punt és a l'interior del contorn C . Per tant, podem aplicar directament la fórmula amb $f(z) = e^{i2\pi kz}$. El resultat és

$$\oint_C \frac{e^{i2\pi kz}}{z-1} dz = 2\pi i f(1) = 2\pi i e^{i2\pi k} = 2\pi i,$$

ja que k és enter.

S3.6 Usem la segona fórmula integral de Cauchy amb $f(z) = \cosh z$ i $z_0 = 0$. Com que al denominador hi ha la 4a potència de z , tenim

$$\oint_C \frac{\cosh z}{z^4} dz = \frac{2\pi i}{3!} [\cosh'''(z)]_{z=0} = \frac{2\pi i}{3!} \sinh(0) = 0.$$

S3.7 Si $p > -1$, l'integrand és una funció analítica a tot el pla complex. Per tant, la seva integral sobre un contorn tancat és 0.

Si $p = -1$, tenim la integral

$$\oint_C \frac{1}{z-z_0} dz,$$

amb z_0 a l'interior de C . Apliquem la primera fórmula integral de Cauchy amb $f(z) = 1$ i obtenim $\oint_C \frac{1}{z-z_0} dz = 2\pi i f(z_0) = 2\pi i$.

Si $p < -1$, apliquem la segona fórmula integral de Cauchy amb $f(z) = 1$ tenim

$$\oint_C (z-z_0)^p dz = \oint_C \frac{1}{(z-z_0)^{-p}} dz = \frac{2\pi i}{(-p-1)!} f^{(-p-1)}(z_0) = 0,$$

ja que, en ser $f(z)$ constant, la seva derivada d'ordre $(-p-1)$ és 0.

S3.8 Aquí es tracta de convertir aquesta integral real d'una funció complexa en una integral sobre algun contorn tancat C del pla complex, per poder utilitzar les fórmules integrals de Cauchy. Com que integrem respecte de θ entre 0 i 2π , ens convé que C sigui un cercle centrat a l'origen. Prenem el cercle $|z| = 1$ i el parametritzem $z(\theta) = e^{i\theta}$, $\theta \in [0, 2\pi]$. Tenim, doncs, $dz = e^{i\theta} i d\theta$, que també podem escriure com

$$d\theta = \frac{dz}{iz}.$$

Si expressem $z(\theta)$ en forma trigonomètrica, $z(\theta) = \cos \theta + i \sin \theta$, veiem que

$$\cos \theta = \frac{z(\theta) + 1/z(\theta)}{2},$$

ja que $e^{-i\theta} = 1/e^{i\theta}$. Per tant,

$$I \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) \cos \theta d\theta = \int_C f(z) \left(\frac{z + 1/z}{2} \right) \frac{dz}{iz}.$$

El primer sumand de la integral és una funció analítica (ja que $f(z)$ ho és per hipòtesi) i la seva integral és zero, d'acord amb el teorema de Cauchy-Goursat. Així doncs,

$$I = \frac{1}{2i} \int_C \frac{f(z)}{z^2} dz = \frac{1}{2i} 2\pi i f'(0) = \pi f'(0),$$

on hem utilitzat la segona fórmula integral de Cauchy.

S3.9 El més pràctic és expressar $1/(z^2+1)$ com una suma de fraccions simples,

$$\frac{1}{1+z^2} = \frac{A}{z-i} + \frac{B}{z+i}.$$

Si sumem aquestes fraccions trobem

$$\frac{A}{z-i} + \frac{B}{z+i} = \frac{(A+B)z + (A-B)i}{z^2+1}.$$

Per tant, $A+B=0$ i $A-B=-i$, és a dir, $A=-i/2$ i $B=i/2$. Llavors tenim,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{e^{zt}}{z^2+1} dz &= \frac{1}{2\pi i} \frac{i}{2} \int_C \left[\frac{-e^{zt}}{z-i} + \frac{e^{zt}}{z+i} \right] dz \\ &= \frac{1}{4\pi} \left[\int_C \frac{-e^{zt}}{z-i} dz + \int_C \frac{e^{zt}}{z+i} dz \right]. \end{aligned}$$

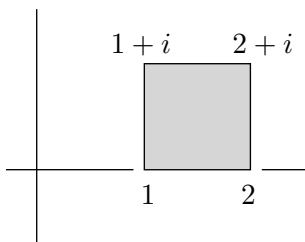
Com que els punts $z = \pm i$ són a l'interior de C , podem utilitzar la primera fórmula integral de Cauchy a cadascun dels sumands i obtenim

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{e^{zt}}{z^2+1} dz = \frac{1}{4\pi} [-2\pi i e^{it} + 2\pi i e^{-it}] = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} = \sin t.$$

S3.10 La branca de $\log z$ que estem considerant és analítica en el quadrat de la figura 3.18. Per tant, d'acord amb el teorema del mòdul màxim, $|\log z|$ (i també $|\log z|^2$) assoleix el seu valor màxim sobre el perímetre del quadrat, no al seu interior. Per comoditat, analitzarem els valors de $|\log z|^2$ sobre cadascun dels costats. Si $z = re^{i\theta} = x + iy$, la funció $|\log z|^2$ s'expressa

$$|\log z|^2 = (\log r)^2 + \theta^2 = \left[\frac{1}{2} \log(x^2 + y^2) \right]^2 + \left[\arctan \frac{y}{x} \right]^2.$$

Analitzem cada costat del quadrat:

Figura 3.18: Regió del problema **P3.10**.

Costat $1 \rightarrow 2$: r creix i $\theta = 0$; per tant, $|\log z|^2 = (\log r)^2$ creix quan ens movem de $z = 1$ a $z = 2$.

Costat $2 \rightarrow 2 + i$: r i θ creixen; per tant, $|\log z|^2 = (\log r)^2 + \theta^2$ creix quan ens movem de $z = 2$ a $z = 2 + i$.

Costat $1 \rightarrow 1 + i$: r i θ creixen; per tant, $|\log z|^2 = (\log r)^2 + \theta^2$ creix quan ens movem de $z = 1$ a $z = 1 + i$.

Costat $1 + i \rightarrow 2 + i$: r creix i θ decreix. En aquest segment tenim

$$|\log z|^2 = \left[\frac{1}{2} \log(x^2 + 2^2) \right]^2 + \left[\arctan \frac{2}{x} \right]^2, \quad x \in [1, 2].$$

Si derivem aquesta funció obtenim

$$\left\{ \left[\frac{1}{2} \log(x^2 + 1^2) \right]^2 + \left[\arctan \frac{1}{x} \right]^2 \right\}' = \frac{x-1}{x^2+1} \geq 0, \quad \text{si } x \in [1, 2],$$

i, per tant, $|\log z|^2$ també creix quan ens movem de $z = 1 + i$ a $z = 2 + i$.

Així doncs, $|\log z|^2$ i $|\log z|$ assoleixen el valor màxim en el vèrtex $z = 2 + i$ del quadrat, i aquests valors són

$$\begin{aligned} |\log(2+i)|^2 &= \left(\frac{\log 5}{4} \right)^2 + \left(\arctan \frac{1}{2} \right)^2, \\ |\log(2+i)| &= \left[\left(\frac{\log 5}{4} \right)^2 + \left(\arctan \frac{1}{2} \right)^2 \right]^{1/2}. \end{aligned}$$

S3.11 Si apliquem la fórmula integral de Cauchy a $f(z) = \cos z$ obtenim

$$1 = \cos 0 = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\cos z}{z-0} dz.$$

Per tant,

$$\int_C \frac{\cos z}{z} dz = 2\pi i.$$

Sobre el contorn C tenim $z(t) = e^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$, $dz = ie^{it}dt$. Si ho substituïm a la integral que volem avaluar directament tenim

$$\begin{aligned}\int_C \frac{\cos z}{z} dz &= \int_0^{2\pi} \frac{\cos(e^{it})}{e^{it}} ie^{it} dt = i \int_0^{2\pi} \cos(\cos t + i \sin t) dt \\ &= i \int_0^{2\pi} [\cos(\cos t) \cos(i \sin t) - \sin(\cos t) \sin(i \sin t)] dt \\ &= i \int_0^{2\pi} \cos(\cos t) \cosh(\sin t) dt + \text{nombre real}.\end{aligned}$$

Si ho igualem a l'altra expressió de la integral obtenim el resultat desitjat.

S3.12 (a) La resposta és, en general, negativa. Això és degut al fet que la demostració del teorema de Liouville s'obté fent $r \rightarrow \infty$ dins de D i, llevat que $D = \mathbb{C}$, això no és possible. Com a contraexemple, observem que $f(z) = e^{-z}$ és fitada i és analítica a la meitat dreta del pla $\mathbb{C}$ ($\operatorname{Re} z > 0$) però no és constant.

(b) No existeix. Considerem la funció entera $g(z) \stackrel{\text{def}}{=} e^{-if(z)}$. Observem que $|g(z)| = e^{\operatorname{Im} f(z)}$ és fitada si $\operatorname{Im} f(z)$ ho és. Pel teorema de Liouville, $g(z)$ ha de ser constant i, per tant, $f(z)$ també ho ha de ser. Això és incompatible amb la condició $f(n) = i/n$.

(c) No existeix. Si f és analítica també és contínua i dins de qualsevol disc $|z| \leq R$ el seu mòdul ha de ser fitat, $|f(z)| < M_R$. D'altra banda, per a tot $\epsilon > 0$ existeix $R_\epsilon > 0$ tal que $|f(z)| < \epsilon$ si $|z| > R_\epsilon$, ja que $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = 0$. Escollint, per exemple, $\epsilon = 1$, tenim $|f(z)| < \max\{1, M_{R_1}\}$ per a tot $z \in \mathbb{C}$. Aplicant el teorema de Liouville deduíem que $f(z) = c$ (constant) i la condició $f(0) = 1$ ens diu que $c = 1$. Per tant, $f(z) = 1$ a tot $\mathbb{C}$ i això és incompatible amb el fet que $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = 0$.

(d) Si $f(z)$ fos analítica a $|z| < 2$ també ho seria al quadrat $0 \leq \operatorname{Re} z \leq 1$, $0 \leq \operatorname{Im} z \leq 1$. La doble periodicitat de $f(z)$ implica que també seria analítica a $m \leq \operatorname{Re} z \leq m+1$, $n \leq \operatorname{Im} z \leq n+1$, per a tot $m, n \in \mathbb{Z}$ i, per tant, seria analítica en tot el pla complex. D'altra banda, $f(z)$ seria fitada sobre $0 \leq \operatorname{Re} z \leq 1$, $0 \leq \operatorname{Im} z \leq 1$, ja que és contínua. Existiria, doncs, M tal que $|f(z)| \leq M$ en aquest quadrat, però, novament, la periodicitat ens diu que la mateixa M seria una fita de $|f(z)|$ en tot el pla complex. Llavors, el teorema de Liouville ens diu que $f(z)$ hauria de ser constant i, com que l'enunciat ens diu que no ho és, $f(z)$ no pot ser analítica a $|z| < 2$.

S3.13 (a) Observem que $|f(z)| \leq e^{\operatorname{Re} z} = |e^z|$. Estem, doncs, en la situació del primer exemple 3.6 i tenim, per tant, que $f(z) = ce^z$.

(b) Si $f(\mathbb{C})$ no fos densa a $\mathbb{C}$, existirien $w \in \mathbb{C}$ i $\epsilon > 0$ tals que per a tot $z \in \mathbb{C}$ tindríem $|f(z) - w| > \epsilon$ i, per tant, $f(z) \neq w$ per a tot z . Així doncs, la funció

$$g(z) = \frac{1}{f(z) - w}$$

seria analítica a tot $\mathbb{C}$ i, alhora,

$$|g(z)| = \frac{1}{|f(z) - w|} < \frac{1}{\epsilon}.$$

Llavors, pel teorema de Liouville $f(z)$ seria constant. Això és una contradicció i, per tant, hem de concloure que $f(\mathbb{C})$ és densa a $\mathbb{C}$.

(c) Sigui $g(z) = f'(z) + f(z)$. D'una banda, tenim que $g(z)$ és entera, ja que tant $f(z)$ com $f'(z)$ (i de fet qualsevol de les derivades de f) ho són. De l'altra, $|g(z)| \leq M$ per a alguna constant $M > 0$. Llavors, el teorema de Liouville ens diu que $g(z) = b$ (constant), és a dir, $f'(z) + f(z) = b$. Si multipliquem per e^z tenim

$$\frac{d}{dz} [e^z f(z)] = e^z f'(z) + e^z f(z) = be^z.$$

Això ens diu que $e^z f(z)$ és una primitiva de be^z i, per tant, $e^z f(z) = be^z + a$, és a dir,

$$f(z) = ae^{-z} + b,$$

on $a \in \mathbb{C}$ és una constant arbitrària.

S3.14 Com hem fet a l'exemple 3.6, considerem la funció $g(z) = e^{f(z)}$ que també és analítica a D i satisfà $|g(z)| = e^{u(x,y)}$. Llavors, només cal aplicar el teorema del mòdul màxim a g i recordar que e^x ($x \in \mathbb{R}$) és una funció estrictament creixent.

Per obtenir el mateix resultat per v només cal considerar, tal com hem fet en el problema **P3.12** (b), la funció $g(z) = e^{-if(z)}$.

S3.15 Si $f(z)$ és analítica a la corona circular A , també ho és la funció $g(z) = f(z)/z^2$. Les circumferències $|z| = 1$ i $|z| = 4$ són la frontera d' A i observem que sobre elles $|g(z)| \leq 1$. Llavors, el teorema del mòdul màxim ens assegura que $|g(z)| < 1$, si $z \in A$. D'altra banda, $|\sqrt{2} + i| = \sqrt{3}$ (és a dir, $\sqrt{2} + i \in A$), però $|g(\sqrt{2} + i)| = 1 \not< 1$. Aquest resultat contradiu el teorema del mòdul màxim i, per tant, no és possible que $|f(\sqrt{2} + i)| = 3$.

4 Sèries

4.1 Successions i sèries de funcions

Sèries numèriques

El concepte *sèrie* fa referència a la suma dels infinits termes d'una successió. En general, aquesta suma és ambigua i no sempre existeix. La manera de donar-li sentit és definir-la com el límit (si existeix) de la successió de “sumes parcials”. Més concretament, si $\{a_n\}$ és una successió de nombres reals o complexos, definim

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \stackrel{\text{def}}{=} \lim\{S_n\}, \quad \text{on } S_n = \sum_{k=1}^n a_k.$$

Si aquest límit existeix, diem que la *sèrie* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ és *sumable* o *convergent*¹ i que la seva suma és $S = \lim\{S_n\}$, i ho expressem $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = S$. Si $\lim\{S_n\}$ no existeix, diem que la sèrie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ no és sumable o que és *divergent*.

Diem que la sèrie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ és *absolutament convergent* si la sèrie $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ és convergent.

Recordem algunes propietats de les sèries de nombres *reals*:

- 1) $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ convergent $\Rightarrow \lim\{a_n\} = 0$.
- 2) $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ absolutament convergent $\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ convergent.
- 3) Criteri de comparació: si $b_k > a_k > 0$

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k \text{ convergent} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ convergent.}$$

- 4) Criteris del quocient i de l'arrel: si $\alpha = \lim\{|a_{n+1}/a_n|\}$, o $\alpha = \lim\{\sqrt[n]{|a_n|}\}$, aleshores si $\alpha < 1$ la sèrie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ és absolutament convergent (i, per tant, convergent), si $\alpha > 1$ la sèrie és divergent, i si $\alpha = 1$ els criteris no decideixen.

Considerem ara les sèries de nombres complexos. Si $\{z_n\} = \{x_n + iy_n\}$ és una successió de nombres complexos, la sèrie $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ és convergent i la seva suma és $S = a + ib$ si existeix $S = \lim\{S_n\}$, on $S_n = \sum_{k=1}^n z_k$. D'altra banda, si

¹Estrictament, el que és sumable és la successió $\{a_n\}$ i el que és convergent és la successió $\{S_n\}$, però ambdues coses volen dir el mateix, per definició.

$X_n = \sum_{k=1}^n x_k$ i $Y_n = \sum_{k=1}^n y_k$, com que $S_n = X_n + iY_n$ tenim, d'acord amb el teorema 1.3,

$$\{S_n\} \rightarrow S = a + ib \Leftrightarrow \begin{cases} \{X_n\} \rightarrow a \\ \{Y_n\} \rightarrow b. \end{cases}$$

És a dir, una sèrie de nombres complexos és convergent si i només si la sèrie de les parts reals i la de les parts imaginàries (ambdues de nombres reals) són convergents.

Teorema 4.1 (Convergència absoluta) *Si $z_n = x_n + iy_n$, la sèrie $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ és absolutament convergent si i només si les sèries $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ i $\sum_{k=1}^{\infty} y_k$ són absolutament convergents.*

DEMOSTRACIÓ:

($\Rightarrow$) Notem que $|x_k|, |y_k| \leq |z_k|$ i apliquem el criteri de comparació.

($\Leftarrow$) Notem que $|z_k| \leq |x_k| + |y_k|$ i apliquem el criteri de comparació.

◇

Les propietats de les sèries de nombres reals s'estenen trivialment a les de nombres complexos. Així, tenim,

1) $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ convergent $\Rightarrow \lim\{z_n\} = 0$, ja que

$$\sum_{k=1}^{\infty} z_k \text{ conv.} \Leftrightarrow \begin{cases} \sum_{k=1}^{\infty} x_k \text{ conv.} \\ \sum_{k=1}^{\infty} y_k \text{ conv.} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \{x_n\} \rightarrow 0 \\ \{y_n\} \rightarrow 0 \end{cases} \Leftrightarrow \{z_n\} \rightarrow 0.$$

2) $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ absolutament convergent $\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} z_k$ convergent, ja que

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} |z_k| \text{ conv.} &\Leftrightarrow \begin{cases} \sum_{k=1}^{\infty} |x_k| \text{ conv.} \\ \sum_{k=1}^{\infty} |y_k| \text{ conv.} \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} \sum_{k=1}^{\infty} x_k \text{ conv.} \\ \sum_{k=1}^{\infty} y_k \text{ conv.} \end{cases} \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} z_k \text{ conv.} \end{aligned}$$

3) Criteris del quocient i de l'arrel:²

$$\left. \begin{array}{l} \text{si } \lim \{|z_{n+1}|/|z_n|\} = \alpha \\ \text{o} \\ \text{si } \lim \{\sqrt[n]{|z_n|}\} = \alpha \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} \text{si } \alpha < 1 : \sum_{k=1}^{\infty} z_k \text{ és absolutament convergent} \\ \text{si } \alpha > 1 : \sum_{k=1}^{\infty} z_k \text{ és divergent} \\ \text{si } \alpha = 1 : \text{el criteri no decideix.} \end{cases}$$

Successions de funcions

Definició 4.1 Una successió de funcions és una aplicació del conjunt dels nombres naturals $\mathbb{N}$ a un conjunt de funcions, de tal forma que a cada nombre natural n li associa una funció que anomenem $f_n(z)$. La successió de funcions s'expressa

$$\{f_n(z)\} = \{f_1(z), f_2(z), f_3(z), \dots\}.$$

Definició 4.2 Diem que una successió de funcions $\{f_n(z)\}$ convergeix punt a punt a $f(z)$ a la regió D ($\subset \mathbb{C}$) si $\forall z \in D$ es compleix que $\lim\{f_n(z)\} = f(z)$.

Notem que això vol dir que per a cada $\epsilon > 0$ i per a cada $z \in D$ existeix un nombre natural N , que depèn de ϵ i de z , tal que $|f_n(z) - f(z)| < \epsilon$, si $n > N$. Hi ha situacions en les quals N depèn únicament de ϵ i no del punt z considerat. Aquest tipus de convergència rep un nom especial, *convergència uniforme*.

Definició 4.3 Diem que una successió de funcions $\{f_n(z)\}$ convergeix uniformement a $f(z)$ en la regió D ($\subset \mathbb{C}$) si $\forall \epsilon > 0$ existeix $N \in \mathbb{N}$ independent de z tal que $|f_n(z) - f(z)| < \epsilon$, $\forall z \in D$, si $n > N$.

Evidentment, si una successió de funcions convergeix uniformement, també ho fa punt a punt. El recíproc no és cert, la convergència punt a punt pot ser o no uniforme i això depèn de les funcions $f_n(z)$, però també de D . En altres paraules, si $\{f_n(z)\} \rightarrow f(z)$ punt a punt a D i no ho fa uniformement (a D), ho pot fer en algun subconjunt de D .

En general, la convergència punt a punt no transmet les propietats de les funcions $f_n(z)$ a la funció límit $f(z)$. Per exemple, les funcions $f_n(z) = e^{-n|z|}$ són contínues a tot arreu, però $\{f_n(z)\}$ convergeix punt a punt a la funció discontinua

$$f(z) = \begin{cases} 1 & \text{si } z = 0 \\ 0 & \text{si } z \neq 0. \end{cases}$$

²De fet, si $\lim \{|z_{n+1}|/|z_n|\}$ existeix, llavors $\lim \{\sqrt[n]{|z_n|}\}$ també existeix i tots dos límits coincideixen. Per tant, si el criteri del quocient no decideix ($\alpha = 1$), el de l'arrel tampoc. El recíproc no és cert, pot existir el segon límit sense existir el primer. Per tant, el criteri de l'arrel és més "potent" que el del quocient.

La convergència uniforme, en canvi, no té aquesta “anomalia”.

Teorema 4.2 *Si les funcions $f_n(z)$ són contínues a D i en aquesta regió la successió $\{f_n(z)\}$ convergeix uniformement a $f(z)$, aleshores $f(z)$ és contínua a D .*

DEMOSTRACIÓ: Per demostrar que $f(z)$ és contínua a $z_0 \in D$, hem de demostrar que per a cada $\epsilon > 0$ existeix $\delta > 0$ tal que $|f(z) - f(z_0)| < \epsilon$ si $|z - z_0| < \delta$.

En ser la convergència uniforme, existeix $N \in \mathbb{N}$ tal que $|f(z) - f_n(z)| < \epsilon/3$, $\forall z \in D$ si $n > N$ i, en particular, $|f(z_0) - f_n(z_0)| < \epsilon/3$, si $n > N$. En ser les $f_n(z)$ contínues, també existeix $\delta > 0$ tal que $|f_n(z) - f_n(z_0)| < \epsilon/3$, si $|z - z_0| < \delta$. Per tant,

$$\begin{aligned} |f(z) - f(z_0)| &= |f(z) - f_n(z) + f_n(z) - f_n(z_0) + f_n(z_0) - f(z_0)| \\ &\leq |f(z) - f_n(z)| + |f_n(z) - f_n(z_0)| + |f_n(z_0) - f(z_0)| \\ &< \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon, \end{aligned}$$

si $|z - z_0| < \delta$. Notem que la conclusió final ($|f(z) - f(z_0)| < \epsilon$), tot i que és conseqüència de l'existència de N , no depèn del seu valor concret sinó únicament de que se satisfaci la condició $|z - z_0| < \delta$.

◇

Exemple 4.1 Amb les hipòtesis del teorema 4.2, si C és un contorn de D ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_C f_n(z) dz = \int_C \left[\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z) \right] dz \quad (4.1)$$

En altres paraules, no només la integral al llarg del contorn C de la funció $f(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z)$ existeix (això és evident, ja que pel teorema 4.2 $f(z)$ és contínua a D), sinó que podem intercanviar l'ordre de les operacions “integrar” i “fer el límit”.

Per demostrar-ho observem que si L_C és la longitud de C , per a tot $\epsilon > 0$ existeix $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n > N$ es compleix $|f_n(z) - f(z)| < \epsilon/L_C$ per a tot $z \in D$. Aleshores,

$$\begin{aligned} \left| \int_C f_n(z) dz - \int_C f(z) dz \right| &= \left| \int_C [f_n(z) - f(z)] dz \right| \\ &\leq \int_C |f_n(z) - f(z)| |dz| < \frac{\epsilon}{L_C} \int_C |dz| = \epsilon, \end{aligned}$$

on hem usat el teorema 3.1. La igualtat (4.1) queda, doncs, demostrada.

Exemple 4.2 Sigui $\{f_n\}$ una successió de funcions analítiques que en un domini obert i simplement connex D convergeix uniformement a la funció $f(z)$. Vegem que $f(z)$ és també analítica a D .

Com que les funcions $\{f_n\}$ són contínues, $f(z)$ també ho és i, usant la igualtat (4.1),

$$\oint_C f(z) dz = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\oint_C f_n(z) dz \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} 0 = 0$$

per a tot contorn tancat $C \in D$, ja que D és simplement connex. Llavors, el teorema de Morera (teorema 3.13) ens garanteix que $f(z)$ és analítica a D .

Sèries de funcions

A partir d'una successió $\{f_n(z)\}$ de funcions definides a D podem construir la successió de sumes parcials $\{S_n(z)\}$, on $S_n(z) = \sum_{k=1}^n f_k(z)$. Si la successió $\{S_n(z)\}$ convergeix (a D) punt a punt cap a la funció $S(z)$, diem també que la *sèrie de funcions* $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(z)$ és convergent punt a punt a D i que la seva suma és $S(z)$. Si la convergència és uniforme diem que la sèrie de funcions $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(z)$ és uniformement convergent cap a $S(z)$ a D .

El teorema següent dona una condició suficient per a la convergència uniforme d'una sèrie de funcions.

Teorema 4.3 (Prova M de Weierstrass) Si $\forall z \in D$ tenim que $|f_k(z)| \leq M_k$ i la sèrie $\sum_{k=1}^{\infty} M_k$ convergeix, llavors $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(z)$ convergeix absolutament i uniformement a D .

DEMOSTRACIÓ: Com que $M_k > |f_k(z)| > 0$, d'acord amb el criteri de comparació, la sèrie $\sum_{k=1}^{\infty} |f_k(z)|$ és convergent punt a punt. Per tant, la sèrie $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(z)$ és absolutament convergent (i, per tant, convergent). Vegem ara que aquesta convergència punt a punt és, també, uniforme.

Si $S(z) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(z)$ tenim

$$S(z) - \sum_{k=1}^N f_k(z) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(z) - \sum_{k=1}^N f_k(z) = \sum_{k=N+1}^{\infty} f_k(z). \quad (4.2)$$

D'altra banda, si $M = \sum_{k=1}^{\infty} M_k$, tenim que $\forall \epsilon > 0$ hi ha un $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{k=N+1}^{\infty} M_k = \left| \sum_{k=N+1}^{\infty} M_k \right| = \left| M - \sum_{k=1}^N M_k \right| < \epsilon. \quad (4.3)$$

Aquest N només està relacionat amb la sèrie $\sum_{k=1}^{\infty} M_k$ i, òbviament, no depèn de z . Si utilitzem la desigualtat triangular i la hipòtesi $|f_k(z)| \leq M_k$ tenim

$$\left| \sum_{k=N+1}^m f_k(z) \right| \leq \sum_{k=N+1}^m |f_k(z)| < \sum_{k=N+1}^m M_k,$$

i si fem el límit $m \rightarrow \infty$ arribem a

$$\left| S(z) - \sum_{k=1}^N f_k(z) \right| \leq \sum_{k=N+1}^{\infty} M_k < \epsilon \quad (\text{independent de } z),$$

si N és el de la desigualtat (4.3). Això demostra que $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(z)$ convergeix *uniformement* a $S(z)$.

◇

L'expressió (4.2) apareix sovint en les demostracions de molts resultats sobre sèries de funcions. S'anomena la *resta* de la sèrie i es representa per $R_N(z)$, és a dir,

$$R_N(z) = S(z) - \sum_{k=1}^N f_k(z).$$

Observem que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} R_N(z) = 0$$

si i només si la sèrie és convergent.

Exemple 4.3 La funció *zeta de Riemann* es defineix com

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}.$$

Aquesta funció juga un paper fonamental en diverses branques de les matemàtiques, en particular, en la teoria de nombres primers. Volem esbrinar si $\zeta(z)$, definida en termes d'aquesta sèrie, és analítica i en quin domini ho és.

Observem que si $z = x + iy$,

$$|n^z| = |e^{z \log n}| = |e^{x \log n} e^{iy \log n}| = e^{x \log n} = n^{\operatorname{Re} z}.$$

Això ens diu que la sèrie és absolutament convergent a $\operatorname{Re} z > 1$ i també uniformement convergent a $\operatorname{Re} z \geq \lambda$, per a tot $\lambda > 1$, ja que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|n^z|} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\lambda},$$

(prova M de Weierstrass amb $M_k = 1/k^\lambda$). Aplicant el teorema 4.2 a la successió de sumes parcials tenim que $\zeta(z)$ és contínua a $\operatorname{Re} z > 1$. A més, de l'exemple 4.2 deduïm que $\zeta(z)$ és analítica en aquest domini. Més endavant veurem (problema **P4.14**) que $\zeta(z)$ es pot estendre analíticament a $\mathbb{C} - \{1\}$.

Sèries de potències

La resta del capítol es dedica a un tipus concret de sèries de funcions, les *sèries de potències*, en les quals

$$f_k(z) = a_k(z - z_0)^k, \quad \text{o també} \quad f_k(z) = \frac{a_k}{(z - z_0)^k} = a_k(z - z_0)^{-k}.$$

4.2 Sèries de Laurent i de Taylor

Ara veurem quan una funció $f(z)$ és expressable com a suma d'una sèrie de potències.

Teorema 4.4 (Sèrie de Laurent) *Siguin C_1 i C_2 dues circumferències centrades a z_0 , de radis r_1 i r_2 , amb $r_2 < r_1$ (vegeu la figura 4.1). Si $f(z)$ és analítica a la corona circular $r_2 \leq |z - z_0| \leq r_1$, aleshores en tots els punts de l'interior de la corona ($r_2 < |z - z_0| < r_1$) la funció $f(z)$ és la suma de la sèrie de potències (anomenada sèrie de Laurent)*

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k(z - z_0)^k,$$

on els coeficients a_k són

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z') dz'}{(z' - z_0)^{k+1}} \quad (4.4)$$

i C és un contorn tancat qualsevol que envolti z_0 i estigui contingut a la corona.

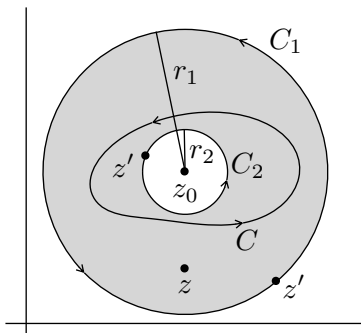


Figura 4.1: Contorns del teorema 4.4.

DEMOSTRACIÓ: Recordem la fórmula per a la suma de $N - 1$ termes d'una successió geomètrica

$$\sum_{k=0}^{N-1} \alpha^k = \frac{1 - \alpha^N}{1 - \alpha}, \quad \text{si } \alpha \neq 1.$$

Aïllant el terme $1/(1 - \alpha)$ tenim

$$\frac{1}{1 - \alpha} = \sum_{k=0}^{N-1} \alpha^k + \frac{\alpha^N}{1 - \alpha}. \quad (4.5)$$

Això permet escriure les identitats següents:

$$\frac{1}{z' - z} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(z - z_0)^k}{(z' - z_0)^{k+1}} + \frac{(z - z_0)^n}{(z' - z_0)^n(z' - z)}, \quad (4.6)$$

$$\frac{1}{z - z'} = \sum_{k=-n}^{-1} \frac{(z - z_0)^k}{(z' - z_0)^{k+1}} + \frac{(z' - z_0)^n}{(z - z_0)^n(z - z')}. \quad (4.7)$$

En efecte, per obtenir (4.6), només cal escriure

$$\frac{1}{z' - z} = \frac{1}{z' - z_0 - (z - z_0)} = \frac{1}{z' - z_0} \frac{1}{1 - (z - z_0)/(z' - z_0)}$$

i usar (4.5) amb $\alpha = (z - z_0)/(z' - z_0)$ i $N = n$. La identitat (4.7) s'obté de la (4.6) intercanviant z per z' i després fent el canvi d'índex mut $k \rightarrow -k - 1$.

Si utilitzem la primera fórmula integral de Cauchy amb el contorn constituït per C_1 seguit de C_2^* tenim

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{f(z') dz'}{z' - z} + \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_2} \frac{f(z') dz'}{z - z'}.$$

Usem ara la identitat (4.6) a la primera integral i la identitat (4.7) a la segona:

$$\begin{aligned}
 -f(z) &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(z-z_0)^k}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{f(z') dz'}{(z'-z_0)^{k+1}} \\
 &\quad + \frac{(z-z_0)^n}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{f(z') dz'}{(z'-z_0)^n(z'-z)} \\
 &\quad + \sum_{k=-n}^{-1} \frac{(z-z_0)^k}{2\pi i} \oint_{C_2} \frac{f(z') dz'}{(z'-z_0)^{k+1}} \\
 &\quad + \frac{1}{2\pi i(z-z_0)^n} \oint_{C_2} \frac{(z'-z_0)^n f(z') dz'}{(z'-z)}.
 \end{aligned}$$

El teorema de Cauchy-Goursat ens permet canviar els contorns C_1 i C_2 de les integrals de la primera i tercera línia per un únic contorn tancat C , situat entre C_1 i C_2 i que envolti z_0 (vegeu la figura 4.1). Llavors, si

$$a_k \stackrel{\text{def}}{=} \oint_C \frac{f(z') dz'}{(z'-z_0)^{k+1}}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

tenim

$$\begin{aligned}
 \left| f(z) - \sum_{k=-n}^{n-1} a_k (z-z_0)^k \right| &\leq \frac{|z-z_0|^n}{2\pi} \oint_{C_1} \frac{|f(z')| |dz'|}{|z'-z_0|^n |z'-z|} \\
 &\quad + \frac{1}{2\pi |z-z_0|^n} \oint_{C_2} \frac{|z'-z_0|^n |f(z')| |dz'|}{|z'-z|}.
 \end{aligned}$$

A la primera integral utilitzem la desigualtat

$$|z'-z| = |z'-z_0 - (z-z_0)| \geq |r_1 - r| = r_1 - r,$$

on per alleugerir la notació hem definit $r = |z-z_0|$ (notem que $r_2 < r < r_1$), i a la segona integral utilitzem

$$|z'-z| \geq r - r_2,$$

per arribar a

$$\begin{aligned}
 \left| f(z) - \sum_{k=-n}^{n-1} a_k (z-z_0)^k \right| &\leq \frac{r^n}{2\pi} \oint_{C_1} \frac{|f(z')| |dz'|}{r_1^n (r_1 - r)} \\
 &\quad + \frac{1}{2\pi r^n} \oint_{C_2} \frac{r_2^n |f(z')| |dz'|}{(r - r_2)}.
 \end{aligned}$$

En ser $f(z)$ i $|f(z)|$ contínues sobre C_1 i C_2 , existeix M tal que $|f(z')| \leq M$ i podem escriure

$$\left| f(z) - \sum_{k=-n}^{n-1} a_k(z - z_0)^k \right| \leq \left(\frac{r}{r_1} \right)^n \frac{Mr_1}{r_1 - r} + \left(\frac{r_2}{r} \right)^n \frac{Mr_2}{r - r_2}.$$

Quan $n \rightarrow \infty$ el costat dret d'aquesta desigualtat tendeix a zero. Per tant, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=-n}^{n-1} a_k(z - z_0)^k$ existeix i per a tot z de la corona $r_2 < |z - z_0| < r_1$ es compleix

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k(z - z_0)^k = f(z).$$

◇

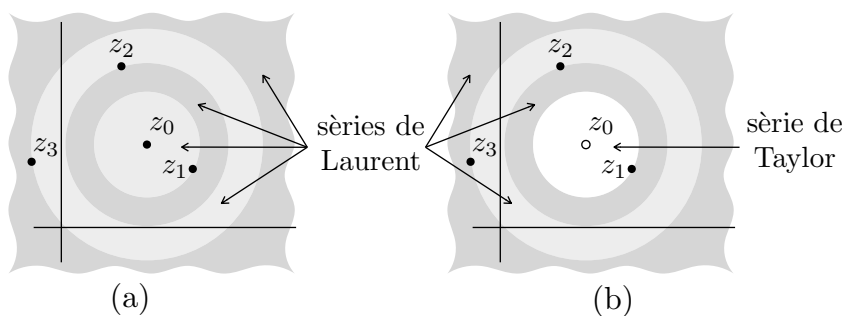


Figura 4.2: Si $z_0, z_1, z_2, \dots$ són singularitats aïllades de $f(z)$: (a) les sèries de Laurent de potències de $z - z_0$ convergeixen en corones centrades a z_0 ; (b) si $f(z)$ és analítica a z_0 , la sèrie de Laurent corresponent a la corona més interna és la sèrie de Taylor i convergeix també en aquest punt.

D'acord amb el teorema anterior, donada la funció $f(z)$ i un cop escollit el punt z_0 , hi ha diverses sèries de Laurent $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n$ que convergeixen a $f(z)$ en diferents corones circulars centrades a z_0 . Cadascuna d'aquestes sèries convergeix només a l'interior d'una de les corones, i els coeficients a_n venen donats per l'expressió (4.4) amb el contorn C escollit a la corona corresponent. L'única condició que ha de complir $f(z)$ és ser analítica a la corona considerada.

Així doncs, si z_0 és una singularitat aïllada de $f(z)$ i aquesta funció té altres singularitats aïllades en els punts $z_1, z_2, z_3, \dots$ a distàncies (en ordre creixent) $d_1, d_2, d_3, \dots$ de z_0 , tenim sèries de Laurent convergents a $f(z)$ a les corones $0 < |z - z_0| < d_1$; $d_1 < |z - z_0| < d_2$; $d_2 < |z - z_0| < d_3$, etc. (vegeu la figura 4.2a). Notem que la corona més interna té radi interior igual a zero, i la corresponent sèrie de Laurent és vàlida al voltant del punt z_0 però no en el punt mateix.

Sèrie de Taylor

Si z_0 no és una singularitat aïllada de $f(z)$ (és a dir, si $f(z)$ és analítica a z_0) els coeficients de la sèrie de Laurent de la corona més interna es poden calcular fàcilment. Quan $n < 0$ la integral (4.4) s'anul·la com a conseqüència del teorema de Cauchy-Goursat. Per a $n \geq 0$ usem la segona fórmula integral de Cauchy (teorema 3.11) i obtenim $a_n = f^{(n)}(z_0)/n!$. Per tant, la sèrie de Laurent esdevé, en aquest cas, la *sèrie de Taylor*,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n,$$

que convergeix a $f(z)$ a l'interior del *disc* centrat a z_0 (incloent aquest punt) de radi igual a la distància de z_0 a la singularitat de $f(z)$ més propera (vegeu la figura 4.2b). Concloem d'això que una funció analítica en un punt és sempre representable per una sèrie de Taylor en algun entorn del punt. D'altra banda, si $f(z)$ és analítica a tot el pla complex, les sèries de Taylor al voltant de qualsevol punt z_0 convergeixen a tot el pla.

4.3 Sèries de potències

A la secció anterior, a partir d'una funció $f(z)$ hem trobat sèries de potències convergents cap a aquesta funció en diferents regions. En aquesta secció adoptem la perspectiva oposada, partim d'una sèrie de potències i esbrinem si és convergent o no, i en cas afirmatiu, on és convergent i com és la funció cap a la qual convergeix.

Teorema 4.5 *Si la sèrie de potències $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ és convergent a $z = z_1$, aleshores és absolutament convergent (i, per tant, convergent) a tot z tal que $|z| < |z_1|$.*

DEMOSTRACIÓ: Si $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z_1^n$ convergeix, $\lim_{n \rightarrow \infty} \{a_n z_1^n\} = 0$ i com que les successions convergents són fitades, existeix M que satisfà $|a_n z_1^n| < M$, $\forall n$.

Si $r = |z|/|z_1|$ tenim que $r < 1$ i es compleix que

$$|a_n z^n| = |a_n z_1^n| \left| \frac{z}{z_1} \right|^n = |a_n z_1^n| r^n < M r^n.$$

La sèrie $\sum_{n=0}^{\infty} M r^n$ és la sèrie geomètrica que convergeix quan $r < 1$. Si fem servir el criteri de comparació concloem que $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n z^n|$ també és convergent.

◇

Corol·lari 4.6 Si la sèrie de potències $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ és divergent a $z = z_1$, aleshores és divergent a tot z tal que $|z| > |z_1|$.

DEMOSTRACIÓ: D'acord amb el teorema anterior, si fos convergent en algun punt z tal que $|z| > |z_1|$, també hauria de convergir a z_1 .

◇

El teorema 4.5 i el corol·lari 4.6 permeten afirmar que a tota sèrie de potències $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ té associat un *disc de convergència* (vegeu la figura 4.3) centrat a l'origen, a l'interior del qual la sèrie és absolutament convergent i a l'exterior és divergent. En els punts del perímetre circular del disc no es pot afirmar res, pot ser que convergeixi, que divergeixi o, fins i tot, que convergeixi en alguns punts i no en altres. Això dependrà de cada sèrie en concret, és a dir, dels valors concrets dels coeficients a_n .

El radi R del disc de convergència és el *radi de convergència* de la sèrie. El seu valor pot ser

- 1) $R = 0$ si la sèrie només convergeix a $z = 0$,
- 2) $R = \infty$ si la sèrie convergeix a tot el pla complex,
- 3) $0 < R < \infty$ en els altres casos.

El valor de R de la sèrie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ es pot obtenir aplicant criteris de convergència absoluta. En particular, si usem el criteri de quocient o el de l'arrel tenim que si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1} z^{n+1}}{a_n z^n} \right| < 1 \quad \text{o} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n z^n|} < 1, \quad (4.8)$$

la sèrie convergeix absolutament, mentre que si els límits anteriors són > 1 , la sèrie divergeix. Però les desigualtats (4.8) són equivalents a

$$|z| < \left[\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \right]^{-1} \quad \text{o} \quad |z| < \left[\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} \right]^{-1}.$$

Per tant, si aquests límits existeixen tenim

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \left[\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} \right]^{-1}.$$

Es pot demostrar que una expressió que sempre existeix i dona correctament el radi de convergència és³

$$R = \left[\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} \right]^{-1}.$$

³ $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$ és el més gran dels límits de les successions parcials de a_n i el seu valor és igual a $\lim_{k \rightarrow \infty} (\sup_{n \geq k} \{a_n\})$

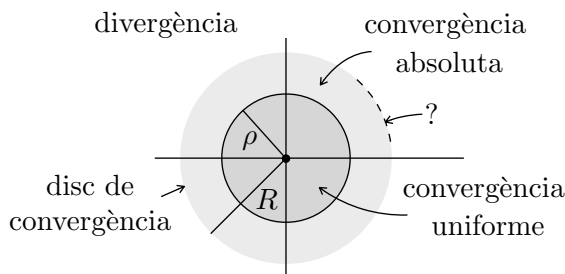


Figura 4.3: La sèrie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ convergeix absolutament a l'interior del disc de convergència (de radi R) i divergeix a l'exterior (al perímetre del disc pot convergir o no, com indica l'interrogant). La sèrie convergeix uniformement en qualsevol disc tancat (de radi $\rho < R$) interior al disc de convergència (teorema 4.7).

Exemple 4.4 Trobem el radi de convergència de les quatre sèries de potències següents:

1) $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n z^n$. Tenim $a_n = 2^n$, per tant, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2^n} = 2$ i $R = 2^{-1} = 1/2$.

2) $\sum_{n=1}^{\infty} z^n / n^n$. En aquest cas, $a_n = n^{-n}$, per tant,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^{-n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} 1/n = 0$$

i $R = 0^{-1} = \infty$. La sèrie convergeix a tot el pla complex.

3) $\sum_{n=1}^{\infty} (1 + \sin n)^n z^n$. Tenim $a_n = (1 + \sin n)^n$, però

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \sin n)$$

no existeix. En canvi,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \left\{ \sqrt[n]{|a_n|} \right\} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\sup_{n \geq k} \{1 + \sin n\} \right) = \lim_{k \rightarrow \infty} 2 = 2,$$

d'on se segueix que $R = 1/2$.

4) $\sum_{n=0}^{\infty} (2z)^{2n}$. Si apliquem directament el criteri de l'arrel tenim que la convergència està garantida si $1 > \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|2z|^{2n}} = 4|z|^2$, o equivalentment si $|z| < 1/2$. Per tant, $R = 1/2$.

Alternativament, $a_n = [1 + (-1)^n]^n$. Per tant,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \left\{ \sqrt[n]{|a_n|} \right\} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\sup_{n \geq k} \{1 + (-1)^n\} \right) = \lim_{k \rightarrow \infty} 2 = 2$$

i obtenim també $R = 1/2$.

Teorema 4.7 *Si R és el radi de convergència de la sèrie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, i $\rho < R$, aleshores la sèrie convergeix uniformement al disc $|z| \leq \rho$ (figura 4.3).*

DEMOSTRACIÓ: Com que $|a_n z^n| \leq |a_n| \rho^n$ i la sèrie numèrica $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \rho^n$ és convergent (ja que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ convergeix absolutament en els punts de la circumferència $|z| = \rho$), podem usar la Prova M de Weierstrass (teorema 4.3) amb $M_n = |a_n| \rho^n$.

◇

Teorema 4.8 (Continuïtat) *Si $S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ a l'interior del disc de convergència, aleshores la funció $S(z)$ és contínua en aquesta regió.*

DEMOSTRACIÓ: Triem un disc tancat $|z| \leq \rho$ interior al disc de convergència ($\rho < R$). Com que la sèrie convergeix uniformement en aquest disc (teorema 4.7), el teorema 4.2 aplicat a la successió de les sumes parcials de la sèrie ens assegura que $S(z)$ és contínua en aquest disc tancat. D'altra banda, com que podem triar ρ tan a prop de R com vulguem, la continuïtat de $S(z)$ s'estén a tot l'interior del disc de convergència.

◇

Teorema 4.9 (Integrabilitat terme a terme) *Si $S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ a l'interior del disc de convergència, C és un contorn interior a aquest disc i $g(z)$ és una funció contínua sobre C , aleshores*

$$\int_C S(z)g(z) dz = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_C z^n g(z) dz.$$

DEMOSTRACIÓ: Sigui $S(z) - \sum_{n=0}^N a_n z^n = R_N(z)$. Si multipliquem aquesta igualtat per $g(z)$ i la integrem sobre C tenim

$$\int_C S(z)g(z) dz - \sum_{n=0}^N a_n \int_C z^n g(z) dz = \int_C R_N(z)g(z) dz.$$

L'existència d'aquestes integrals està assegurada per la continuïtat de $g(z)$ sobre el contorn C i la continuïtat de $R_N(z)$, ja que $S(z)$ és contínua (d'acord amb el teorema anterior) i les funcions z^n també ho són.

Escollim ara un disc tancat $|z| \leq \rho$ interior al disc de convergència i que contingui el contorn C . El teorema 4.7 ens assegura que

$\lim_{N \rightarrow \infty} R_N(z) = 0$ *uniformement* en aquest disc tancat. Llavors, si M és el màxim de $g(z)$ sobre el contorn C (M existeix perquè $g(z)$ és contínua a C , que és conjunt tancat) i L_C és la longitud de C , tenim que per a cada $\epsilon > 0$, existeix $N_\epsilon \in \mathbb{N}$ (independent de z) tal que $|R_N(z)| < \epsilon/(ML_C)$, si $N > N_\epsilon$. Per tant,

$$\left| \int_C S(z)g(z) dz - \sum_{n=0}^N a_n \int_C z^n g(z) dz \right| \leq \int_C |R_N(z)| |g(z)| |dz| < \int_C \frac{\epsilon}{ML_C} M |dz| = \epsilon,$$

si $N > N_\epsilon$, és a dir, $\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N a_n \int_C z^n g(z) dz = \int_C S(z)g(z) dz$.

◇

Aquest teorema permet “commutar” la integració i la suma d’una sèrie de potències, $\int_C \sum_{n=0}^{\infty} \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \int_C \dots$, fins i tot si la multipliquem per una funció contínua. L’únic requeriment és que el contorn d’integració estigui dins del disc de convergència.

Teorema 4.10 (Analiticitat) *Si $S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ a l’interior del disc de convergència, aleshores la funció $S(z)$ és analítica en aquesta regió.*

DEMOSTRACIÓ: Si prenem $g(z) = 1$, el teorema anterior ens permet escriure

$$\oint_C S(z) dz = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \oint_C z^n dz,$$

on C és ara qualsevol contorn *tancat* interior al disc de convergència. El teorema de Cauchy-Goursat ens assegura que cadascuna de les integrals $\oint_C z^n dz$ és zero. Per tant, $\oint_C S(z) dz = 0$, $\forall C$ tancat. D’altra banda, el teorema 4.8 ens assegura la continuïtat de $S(z)$ al disc de convergència. Llavors, el teorema de Morera (teorema 3.13) ens assegura que $S(z)$ és analítica en aquesta regió.

◇

Teorema 4.11 (Derivabilitat terme a terme) *Si $S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ a l’interior del disc de convergència, aleshores en aquesta regió es compleix que*

$$S'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n z^{n-1}.$$

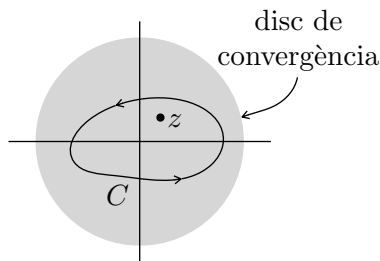


Figura 4.4: Punt interior z i contorn tancat C emprats a la demostració del teorema 4.11.

DEMOSTRACIÓ: Sigui z un punt de l'interior del disc de convergència de la sèrie. Considerem un contorn tancat C contingut a l'interior del disc i que tingui z al seu interior (vegeu la figura 4.4).

Usem el teorema 4.9 amb

$$g(z') = \frac{1}{2\pi i(z' - z)^2}$$

per arribar a

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{S(z') dz'}{(z' - z)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{2\pi i} \oint_C \frac{(z')^n dz'}{(z' - z)^2}.$$

Si usem la segona fórmula integral de Cauchy (teorema 3.11) tenim

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{S(z') dz'}{(z' - z)^2} = S'(z), \quad \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{(z')^n dz'}{(z' - z)^2} = \frac{d}{dz} z^n = n z^{n-1}.$$

És a dir, $S'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n z^{n-1}$.

◇

Els teoremes 4.9 i 4.11 asseguren que a l'interior del disc de convergència de la sèrie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, la sèrie de “primitives” $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{n+1}/(n+1)$ i la de “derivades” $\sum_{n=0}^{\infty} n a_n z^{n-1}$ (obtingudes, respectivament, per integració terme a terme de 0 a z i per derivació terme a terme de la sèrie original) també hi convergeixen. Això vol dir que el radi de convergència d'aquestes sèries és més gran o igual que el de la sèrie original. Però com que aquest raonament també és aplicable a la sèrie de primitives i a la de derivades, concloem que totes tenen el mateix radi de convergència. En els punts del perímetre del disc de convergència el caràcter convergent o divergent pot canviar en integrar o derivar la sèrie.

Exemple 4.5 La integrabilitat i la derivabilitat terme a terme de les sèries de potències (teoremes 4.9 i 4.11) permeten obtenir nous desenvolupaments en sèrie a partir de sèries conegudes. Per exemple, si partim de la sèrie geomètrica

$$1/(1+z) = 1 - z + z^2 - z^3 + \dots$$

i la integrem terme a terme entre 0 i z obtenim

$$\log(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \dots,$$

i si la derivem terme a terme (i canviem el signe) obtenim

$$1/(1+z)^2 = 1 - 2z + 3z^2 - 4z^3 + \dots$$

Quan integrem o derivem una sèrie de potències el radi de convergència no canvia, però a la frontera del disc de convergència el caràcter convergent o divergent d'una sèrie pot variar quan la integrem o la derivem. Per exemple, la sèrie de $1/(1+z)$ no convergeix quan $z = 1$, però sí que ho fa la de $\log(1+z)$.

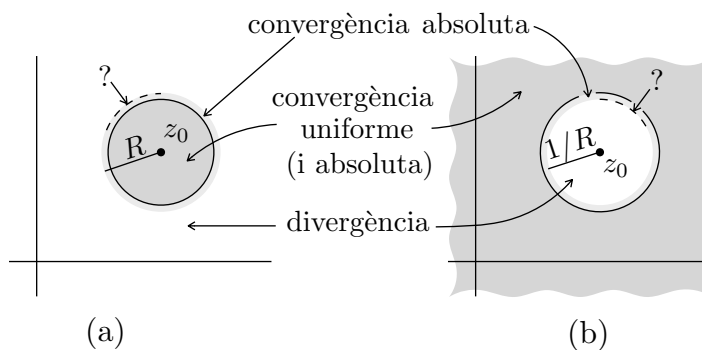


Figura 4.5: Si R és el radi de convergència de la sèrie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ tenim: (a) disc de convergència de $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$; (b) "disc" de convergència de $\sum_{n=0}^{\infty} a_n / (z - z_0)^n$.

Tot i que els resultats anteriors fan referència a sèries de potències de z , s'estenen fàcilment a sèries de potències de $z - z_0$. Així, la sèrie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ té el mateix radi de convergència que la sèrie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, però el disc de convergència està centrat a z_0 . Això es fa evident fent el canvi de variable $z \rightarrow w = z - z_0$. Com que el disc de convergència de $\sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n$ és la regió $|w| < R$ del pla w , el corresponent disc al pla z és $|z - z_0| < R$. La sèrie convergeix absolutament a l'interior del disc de convergència i uniformement en qualsevol disc tancat del seu interior (vegeu la figura 4.5a).

El raonament anterior també és aplicable a les sèries de potències d'exponent negatiu. Considerem la sèrie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n/z^n$. Fent el canvi $z \rightarrow w = 1/z$, el disc $|w| < R$ del pla w , es correspon a la regió $|z| > 1/R$ de pla z i el “disc” de convergència de la sèrie és ara l'*exterior* del cercle de radi $1/R$ centrat a l'origen. Com abans, el “disc” de convergència de la sèrie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n/(z - z_0)^n$ és la regió $|z - z_0| > 1/R$, és a dir, és l'exterior del cercle de radi $1/R$ centrat a z_0 (vegeu la figura 4.5b).

Les sèries de potències amb exponents positius i negatius $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ es poden descompondre de la manera següent:

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^n &= \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n(z - z_0)^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z - z_0)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n. \end{aligned}$$

El primer sumand és una sèrie de potències d'exponents negatius i el seu disc de convergència és l'exterior d'un cert cercle de radi R_1 . El disc de convergència de la sèrie del segon sumand és l'interior d'un altre cercle de radi R_2 . Si $R_1 < R_2$ la sèrie completa convergeix absolutament a la intersecció d'aquestes dues regions, és a dir, la corona $R_1 < |z - z_0| < R_2$ (figura 4.6). Si $R_1 > R_2$ la sèrie completa no convergeix enlloc. Si $R_1 = R_2$ no es pot afirmar res en general, la corona es redueix a una circumferència on la sèrie completa pot convergir o no (o fer-ho en alguns punts i no en altres).

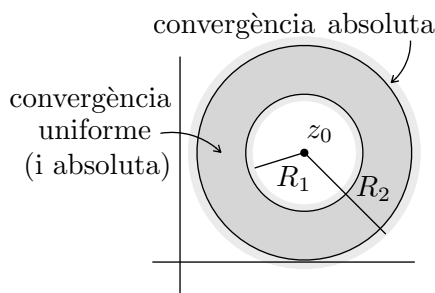


Figura 4.6: Regió de convergència de la sèrie $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ quan $R_1 < R_2$.

Si $S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ en el seu disc de convergència, podem buscar la sèrie de Taylor de $S(z)$ convergent en aquest disc. Similarment, si $S(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ en la seva corona de convergència, podem buscar la sèrie de Laurent de $S(z)$ convergent en aquesta corona. Quina relació hi ha entre aquestes sèries i les originals? El teorema següent afirma que són les mateixes.

Teorema 4.12 (Unicitat) *Si $S(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n(z - z_0)^n$ en una corona centrada a z_0 (com la de la figura 4.6), aleshores $\sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n(z - z_0)^n$ és la sèrie de Laurent de $S(z)$ en aquesta regió.*

DEMOSTRACIÓ: Usem el teorema 4.9 (generalitzat per sèries de potències positives i negatives de $z - z_0$) amb

$$g(z) = \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{(z - z_0)^{m+1}}.$$

Tenim

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{S(z) dz}{(z - z_0)^{m+1}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{(z - z_0)^n dz}{(z - z_0)^{m+1}},$$

on C és un contorn tancat (que envolta z_0) contingut a la corona on la sèrie convergeix. D'acord amb el teorema 4.4, la integral de l'esquerra és el coeficient a_m de la sèrie de Laurent de $S(z)$. Similarment, la integral de la dreta és el coeficient a_m de la sèrie de Laurent de la funció $(z - z_0)^n$. Òbviament, aquest coeficient només és diferent de zero si $m = n$ i, en aquest cas, el seu valor és 1. La integral de la dreta és, per tant, δ_{mn} . Tenim, doncs,

$$a_m = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \delta_{nm} = A_m.$$

La sèrie $\sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n (z - z_0)^n$ és, doncs, l'única sèrie de potències de $z - z_0$ convergent a $S(z)$ a la regió considerada.

◇

Evidentment el teorema anterior també es compleix si la sèrie només conté potències de $z - z_0$ amb exponents no negatius. Si $S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n (z - z_0)^n$ en el corresponent disc de convergència, aquesta sèrie és la sèrie de Taylor de $S(z)$ en aquest disc (recordem que, com hem vist al final de la secció 4.2, la sèrie de Taylor és un cas particular de la sèrie de Laurent). El teorema estableix, doncs, una correspondència biunívoca entre les funcions analítiques i les sèries de potències en les regions on aquestes sèries convergeixen (vegeu, també, la nota al peu de la pàgina 44).

4.4 Operacions amb sèries de potències

Teorema 4.13 *Suposem que $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ en el disc $|z| < r_1$ i que $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ en el disc $|z| < r_2$*

- 1) *Si $F(z) = \lambda f(z) + \mu g(z)$, llavors $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ en el disc $|z| < \min\{r_1, r_2\}$ amb $c_n = \lambda a_n + \mu b_n$. Per tant, en el disc $|z| < \min\{r_1, r_2\}$ tenim*

$$\lambda \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n + \mu \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda a_n + \mu b_n) z^n.$$

2) Si $F(z) = f(z)g(z)$, llavors $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ en el disc $|z| < \min\{r_1, r_2\}$ amb $c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$. Per tant, en el disc $|z| < \min\{r_1, r_2\}$ tenim

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \right) z^n.$$

També és possible dividir sèries de potències, però en aquest cas l'expressió del terme general és complicada i poc reveladora.

DEMOSTRACIÓ: La unicitat de les sèries de potències establerta pel teorema 4.12 fa que les operacions amb sèries, tractades com a polinomis de grau ∞ , es corresponguin amb les mateixes operacions fetes amb les funcions cap a les quals convergeixen.

◇

Vegem alguns exemples:

Exemple 4.6 Considerem

$$f(z) = \begin{cases} \frac{\sin z}{z}, & z \neq 0 \\ 1, & z = 0. \end{cases}$$

Si prenem $z_0 = 0$, la sèrie de Taylor de $\sin z$ és

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1},$$

és a dir,

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \cdots,$$

que és convergent per a tot $z \in \mathbb{C}$ (ja que $\sin z$ és analítica a tot el pla complex). Quan $z \neq 0$ tenim

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z} \left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \cdots \right) \\ &= 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \frac{z^6}{7!} + \cdots. \end{aligned}$$

Però aquesta sèrie convergeix per a tot $z \in \mathbb{C}$ (també a $z = 0$, on convergeix cap a $1 = f(0)$). La funció $f(z)$ és, doncs, analítica a tot el pla complex i la seva sèrie de Taylor és

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n}.$$

Exemple 4.7 Considerem ara la funció $g(z) = z/\sin z$ (és a dir, $g(z) = 1/f(z)$, on $f(z)$ és la funció de l'exemple anterior). La funció $g(z)$ és analítica a tot arreu, llevat dels punts $z = \pm n\pi$, $n \in \mathbb{N}$ on la funció $\sin z$ s'anul·la (però és analítica a $z = 0$, ja que $g(0) = 1/f(0) = 1$, com hem vist a l'exemple anterior). Aquesta funció admet, doncs, un desenvolupament de Taylor al voltant de $z_0 = 0$ que necessàriament convergirà en el disc $|z| < \pi$ (que és la distància de $z = 0$ a la singularitat més propera $z = \pm\pi$). Escrivim

$$g(z) = 1 + a_2 z^2 + a_4 z^4 + \dots$$

(ja que la funció és parella) i observem que en ser $g(z)f(z) = 1$

$$\begin{aligned} 1 &= (1 + a_2 z^2 + a_4 z^4 + \dots) \left(1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \frac{z^6}{7!} + \dots \right) \\ &= 1 + \left(a_2 - \frac{1}{3!} \right) z^2 + \left(a_4 - a_2 \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} \right) z^4 + \dots \end{aligned}$$

Per tant, els coeficients de z^2 , z^4 , ... han de ser zero. Recursivament deduïm que

$$a_2 = \frac{1}{3!}, \quad a_4 = \frac{1}{(3!)^2} - \frac{1}{5!}, \quad \text{etc.}$$

i, per tant,

$$\frac{z}{\sin z} = 1 + \frac{z^2}{6} + \frac{7z^4}{360} + \dots; \quad |z| < \pi.$$

Exemple 4.8 Considerem la funció $f(z) = e^z/(1-z)$. Busquem la sèrie de potències de $z-1$ convergent cap a $f(z)$.

Com que $f(z)$ és analítica a tot el pla complex, llevat del punt $z = 1$, la sèrie serà de Laurent i convergirà a la corona $0 < |z-1| < \infty$. Per trobar la sèrie, notem que

$$\frac{1}{1-z} = -(z-1)^{-1},$$

que ja està desenvolupat en sèrie de Laurent (en aquest cas, la sèrie només té un terme). D'altra banda, tenim

$$e^z = e^{z-1+1} = e e^{z-1} = e \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z-1)^k}{k!},$$

que és convergent a tot el pla, ja que e^{z-1} és analítica a tot arreu. Per tant,

$$\begin{aligned}\frac{e^z}{1-z} &= -(z-1)^{-1} e \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z-1)^k}{k!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-e)}{k!} (z-1)^{k-1} = \sum_{n=-1}^{\infty} \frac{(-e)}{(n+1)!} (z-1)^n \\ &= -\frac{e}{z-1} - e - \frac{e}{2!}(z-1) - \frac{e}{3!}(z-1)^2 - \dots,\end{aligned}$$

que és la sèrie buscada.

4.5 Classificació de les singularitats aïllades

Recordem (definició 2.12) que z_0 és una singularitat aïllada de la funció $f(z)$ si aquesta funció és analítica en algun entorn de z_0 , però no ho és en aquest punt.

Definició 4.4 (Part principal) Si z_0 és una singularitat aïllada de $f(z)$ i la sèrie $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ és la sèrie de Laurent convergent cap a $f(z)$ a la corona més interna centrada a z_0 , s'anomena part principal d'aquesta sèrie la part formada per les potències d'exponent negatiu de $z-z_0$, és a dir,

$$\text{Part principal} = \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n(z-z_0)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n}.$$

L'estructura d'aquesta part principal determina si la singularitat aïllada z_0 és evitable, pol o essencial.

Singularitat evitable: la singularitat aïllada z_0 de $f(z)$ és *evitable* si existeix el límit

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) \stackrel{\text{def}}{=} a_0.$$

En aquest cas, la part principal no conté cap terme i la sèrie de Laurent de la corona més interna centrada a z_0 és, de fet, una sèrie de Taylor que convergeix a $f(z)$, fins i tot en el punt z_0 si assignem el valor $f(z_0) = a_0$, amb la qual cosa la funció $f(z)$ així redefinida és analítica també a z_0 .

Pol: la singularitat aïllada z_0 de $f(z)$ és un *pol d'ordre m* si

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)(z-z_0)^m \neq 0.$$

En aquest cas, la part principal conté un nombre finit de termes amb $a_{-m} \neq 0$, però $a_{-n} = 0$ si $n > m$ i la sèrie de Laurent de $f(z)$ a la corona més interna és

$$\begin{aligned}
 f(z) &= \sum_{k=1}^m \frac{a_{-k}}{(z-z_0)^k} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n \\
 &= \frac{a_{-m}}{(z-z_0)^m} + \frac{a_{-m+1}}{(z-z_0)^{m-1}} + \cdots + a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \cdots \\
 &= \frac{a_{-m} + a_{-m+1}(z-z_0) + \cdots + a_0(z-z_0)^m + a_1(z-z_0)^{m+1} + \cdots}{(z-z_0)^m} \\
 &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{F(z)}{(z-z_0)^m}, \tag{4.9}
 \end{aligned}$$

on $F(z)$ és la funció definida per la sèrie del numerador de la línia precedent. Aquesta sèrie només conté potències de $(z-z_0)$ amb exponents no negatius i és, per tant, una sèrie de Taylor. La funció $F(z)$ és, doncs, analítica a z_0 i el seu valor en aquest punt és $a_{-m} \neq 0$. Això ens porta a la definició alternativa següent de *pol d'ordre m* : $f(z)$ té un pol d'ordre m a z_0 si i només si existeix $F(z)$ analítica a z_0 , tal que

$$f(z) = \frac{F(z)}{(z-z_0)^m}, \quad \text{amb } F(z_0) \neq 0, \tag{4.10}$$

Els pols d'ordre 1, 2... s'anomenen també pols *simples*, *dobles*...

Singularitat essencial: la singularitat aïllada z_0 de $f(z)$ és *essencial* si la part principal conté un nombre infinit de termes. És, doncs, un “pol d'ordre ∞ ”.

Exemple 4.9 Analitzem les singularitats de les funcions següents:

- 1) La funció $f(z) = (1+z-e^z)/z$ té una singularitat a $z=0$ perquè el denominador s'anul·la en aquest punt, però és una singularitat evitable, ja que $\lim_{z \rightarrow 0} f(z)$ existeix:

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{1+z-e^z}{z} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1-e^z}{1} = 0.$$

La sèrie de Laurent al voltant de $z=0$ és

$$f(z) = \frac{1}{z} \left(1+z - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \right) = -\frac{z}{2!} - \frac{z^2}{3!} - \frac{z^3}{4!} - \cdots,$$

que no té part principal i és la sèrie de Taylor de la funció

$$f(z) = \begin{cases} (1 + z - e^z)/z & , \quad \text{si } z \neq 0 \\ 0 & , \quad \text{si } z = 0 . \end{cases}$$

- 2) La funció $f(z) = 1/(1+z^2)^2$ té singularitats a $z = \pm i$, ja que el denominador es pot expressar $(z-i)^2(z+i)^2$ i s'anul·la en aquests punts. Es tracta de pols d'ordre 2 (pols dobles), ja que

$$\lim_{z \rightarrow \pm i} \frac{1}{(1+z^2)^2} (z \mp i)^2 = \lim_{z \rightarrow \pm i} \frac{1}{(z \pm i)^2} = \frac{1}{(\pm 2i)^2} \neq 0.$$

Observem que $f(z)$ es pot reexpressar $f(z) = F(z)/(z-i)^2$, on $F(z) = 1/(z+i)^2$, que és analítica al pol $z = i$. Similarment, $f(z) = G(z)/(z+i)^2$, on $G(z) = 1/(z-i)^2$, que és analítica al pol $z = -i$.

Si, per exemple, desenvolupem $F(z)$ en sèrie de Taylor al voltant de $z = i$ i dividim per $(z-i)^2$ obtenim

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{-(1/4) - (i/4)(z-i) + (3/16)(z-i)^2 + (i/8)(z-i)^3 + \dots}{(z-i)^2} \\ &= -(1/4)(z-i)^{-2} - (i/4)(z-i)^{-1} + (3/16) + (i/8)(z-i) + \dots , \end{aligned}$$

és a dir, la part principal de la sèrie de Laurent de $f(z)$ al voltant de $z = i$ té un nombre finit de termes i l'exponent negatiu més elevat és -2 . El mateix passa quan desenvolupem $f(z) = G(z)/(z+i)^2$ al voltant de $z = -i$.

- 3) La funció $f(z) = z \sin(1/z)$ té una singularitat a $z = 0$. Es tracta d'una singularitat essencial, ja que el desenvolupament en sèrie de potències de z és

$$z \sin(1/z) = z \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{3!z^3} + \frac{1}{5!z^5} - \dots \right) = 1 - \frac{1}{3!z^2} + \frac{1}{5!z^4} - \dots ,$$

que és una sèrie de Laurent al voltant de $z = 0$ que té infinits termes a la part principal.

4.6 Zeros de les funcions analítiques

Si $f(z)$ és analítica a z_0 i s'anul·la en aquest punt diem que $f(z)$ té un *zero* a z_0 . En analogia amb els pols, podem definir també l'ordre dels zeros (tot i que els zeros no són singularitats).

Definició 4.5 (Zero d'ordre m) *Si $f(z)$ és analítica a z_0 , diem que $f(z)$ té un zero d'ordre m en aquest punt si la sèrie de Taylor $f(z) = \sum_{n=m}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ comença amb la potència d'exponent m , és a dir, $a_0 = a_1 = \dots = a_{m-1} = 0$, però $a_m \neq 0$.*

Per tant, si z_0 és un zero d'ordre m de la funció $f(z)$ tenim

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{k=m}^{\infty} a_k(z - z_0)^k \\ &= a_m(z - z_0)^m + a_{m+1}(z - z_0)^{m+1} + a_{m+2}(z - z_0)^{m+2} + \dots \\ &= (z - z_0)^m [a_m + a_{m+1}(z - z_0) + a_{m+2}(z - z_0)^2 + \dots] \\ &\stackrel{\text{def}}{=} (z - z_0)^m F(z), \end{aligned}$$

on $F(z)$ és la funció definida per la sèrie de la línia precedent, que és una sèrie de Taylor. La funció $F(z)$ és, doncs, analítica a z_0 i el seu valor en aquest punt és $a_m \neq 0$. Això ens porta a la definició alternativa de *zero d'ordre m* següent: $f(z)$ té un zero d'ordre m a z_0 si i només si existeix $F(z)$ analítica a z_0 , tal que

$$f(z) = (z - z_0)^m F(z), \quad \text{amb } F(z_0) \neq 0. \quad (4.11)$$

Els zeros d'ordre 1, 2, ... s'anomenen també zeros *simples*, *dobles* ...

Teorema 4.14 *Si $f(z)$ té un zero d'ordre p a z_0 i $g(z)$ té un zero d'ordre q en aquest mateix punt, aleshores la funció $f(z)/g(z)$ té a z_0 :*

- 1) un zero d'ordre $p - q$, si $p > q$,
- 2) una singularitat evitable, si $p = q$,
- 3) un pol d'ordre $q - p$, si $p < q$.

DEMOSTRACIÓ: D'acord amb (4.10) i (4.11) tenim

$$\begin{aligned} f(z) &= (z - z_0)^p F(z), \quad \text{amb } F(z_0) \neq 0, \\ g(z) &= (z - z_0)^q G(z), \quad \text{amb } G(z_0) \neq 0, \end{aligned}$$

i, per tant,

$$\frac{f(z)}{g(z)} = (z - z_0)^{p-q} \frac{F(z)}{G(z)}, \quad \text{amb } \frac{F(z_0)}{G(z_0)} \neq 0.$$

◇

Exemple 4.10 Analitzem els dos primers casos de l'exemple 4.9 des de la perspectiva del teorema 4.14.

- 1) La funció $f(z) = (1 + z - e^z)/z$ té un zero doble a $z = 0$ al numerador i un zero simple al mateix punt al denominador. Per tant, $z = 0$ és un zero simple de $f(z)$:

$$\begin{aligned}\frac{1 + z - e^z}{z} &= \frac{1}{z} \left(1 + z - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \right) = - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{z^{k-1}}{k!} \\ &= -z \left(\frac{1}{2!} + \frac{z}{3!} + \frac{z^2}{4!} + \cdots \right).\end{aligned}$$

- 2) La funció $f(z) = 1/(1 + z^2)^2$ no té cap zero al numerador i $z = \pm i$ són zeros dobles del denominador. Per tant, $z = \pm i$ són pols dobles de $f(z)$.

Teorema 4.15 Si $f(z)$ és analítica a z_0 i $f(z_0) = 0$, però $f(z)$ no és idènticament nul·la en cap entorn de z_0 , aleshores $f(z)$ no s'anul·la en cap altre punt d'algun entorn de z_0 . És a dir, els zeros d'una funció analítica no idènticament nul·la, són sempre aïllats.

DEMOSTRACIÓ: Si $f(z)$ té un zero a z_0 i no és idènticament nul·la en cap entorn d'aquest punt, per a algun m hi haurà una funció $F(z)$ que compleix (4.11). Com que $F(z)$ és analítica i $F(z_0) \neq 0$, per continuïtat hi haurà algun entorn de z_0 on $F(z) \neq 0$. D'altra banda $(z - z_0)^m \neq 0$ quan $z \neq z_0$. Per tant, en aquest entorn $f(z) = (z - z_0)^m F(z)$ no s'anul·la en cap altre punt.

◇

El fet que els zeros d'una funció analítica siguin aïllats té conseqüències importants que es descriuen en els teoremes següents, en els quals analitzem la situació en què una funció analítica en un domini D s'anul·la en un arc de corba continu de D o en un subdomini $E \subset D$.

Teorema 4.16 Si $f(z)$ és analítica en un domini D (obert i connex), i s'anul·la en un arc de corba C continu de D , o en un subdomini E (també obert i connex) de D (vegeu la figura 4.7), aleshores $f(z)$ s'anul·la a tot D .

DEMOSTRACIÓ: Sigui z_0 un punt de l'arc de corba o del subdomini E on $f(z)$ s'anul·la. Com que, en aquest cas, z_0 és un zero no aïllat,

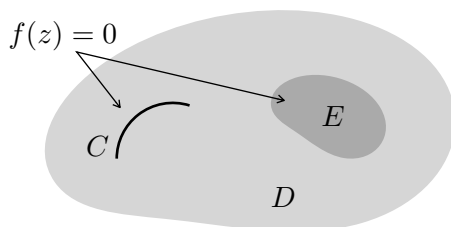


Figura 4.7: Si $f(z)$ és analítica a D i és nul·la a C o a E , també és nul·la a D .

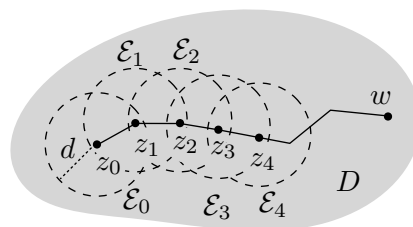


Figura 4.8: Contorn poligonal emprat a la demostració del teorema 4.16.

d'acord amb el teorema 4.15, $f(z)$ ha de ser idènticament nul·la en algun entorn de z_0 . Això vol dir que tots els coeficients de la sèrie de Taylor de $f(z)$ al voltant d'aquest punt han de ser zero, és a dir, $f(z)$ és idènticament nul·la en tot el disc de convergència de la sèrie i, per tant, en qualsevol entorn $\mathcal{E}_0 \subset D$ centrat a z_0 .

Demostrem ara que si w és un punt qualsevol de D es compleix que $f(w) = 0$. Per fer-ho, argumentem com en el teorema 3.18. Com que D és connex, els punts z_0 i w es poden unir amb una poligonal de D . Si d és menor que la distància mínima de la poligonal a la frontera de D , triem un nombre finit de punts $z_1, z_2, \dots, z_n (= w)$ de la poligonal, de forma que $|z_k - z_{k-1}| < d$. Si $\mathcal{E}_0, \mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \dots, \mathcal{E}_n$ són entorns de radi d centrats en aquests punts (incloent z_0), tindrem que $\mathcal{E}_k \subset D$ i que cada z_k està dins de l'entorn $\mathcal{E}_{k-1}$ (vegeu la figura 4.8).

Com que $z_1 \in \mathcal{E}_0$ (on f és idènticament nul·la), els coeficients de la sèrie de Taylor al voltant de z_1 són també nuls i, per tant, f també és idènticament nul·la a $\mathcal{E}_1$. Reiterant el raonament arribem, amb un nombre finit de passos, al fet que f s'anul·la idènticament a $\mathcal{E}_n$ i, per tant, $f(w) = 0$.

◇

Corol·lari 4.17 Si $f(z)$ i $g(z)$ són analítiques en un domini D (obert i connex), i coincideixen en un arc de corba continu de D , o en un subdomini E (també obert i connex) de D , aleshores $f(z) = g(z)$ a tot D .

DEMOSTRACIÓ: Només cal aplicar el teorema anterior a la funció $f(z) - g(z)$.

◇

Aquest resultat ens diu que els valors que pren una funció analítica sobre un arc de corba continu o sobre un domini determinen els valors que aquesta funció pren en tot el seu domini d'analiticitat. Així, per exemple, no hi pot haver cap

altra funció entera, llevat de $f(z) = \sin z$, que sobre l'eix real coincideixi amb la funció real $\sin x$.

D'altra banda, aquest resultat també explica per què les identitats entre funcions reals se segueixen complint entre les corresponents funcions complexes (si són analítiques). Per exemple, la igualtat $(\cos z)^2 + (\sin z)^2 = 1$ es compleix $\forall z \in \mathbb{C}$ com a conseqüència del fet que $(\cos x)^2 + (\sin x)^2 = 1$ es compleix $\forall x \in \mathbb{R}$, ja que tant $(\cos z)^2 + (\sin z)^2$ com 1 són funcions analítiques a tot el pla complex i coincideixen sobre l'eix real.

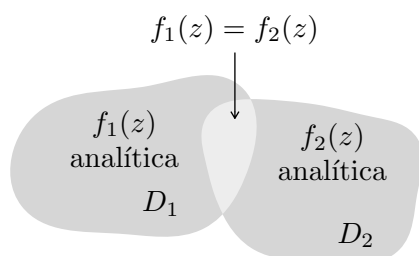


Figura 4.9: f_2 és l'extensió analítica de f_1 a D_2 .

Extensió analítica

Si tenim dues funcions, $f_1(z)$ analítica D_1 (obert i connex) i $f_2(z)$ analítica D_2 (obert i connex), i ambdues funcions coincideixen a $D_1 \cap D_2$, diem que f_2 és l'*extensió analítica* de f_1 a D_2 (vegeu la figura 4.9), ja que cap altra funció analítica a D_2 pot coincidir amb f_1 a $D_1 \cap D_2$.

Exemple 4.11 La funció $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$ és analítica a l'interior del disc de convergència $|z| < 1$, la funció $g(z) = 1/(1 - z)$ és analítica a $\mathbb{C} - \{1\}$ i totes dues coincideixen en el disc $|z| < 1$. Llavors, $g(z)$ és l'extensió analítica de $f(z)$ a tot el pla complex sense el punt $z = 1$.

Exemple 4.12 La funció *gamma d'Euler* complexa es defineix:

$$\Gamma(z) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt, \quad \operatorname{Re} z > 0, \quad (4.12)$$

Aquesta funció és l'extensió natural de la funció d'una variable real amb el mateix nom, $\Gamma(x) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$, on $x > 0$. Recordem que aquesta integral (doblement) impròpia només existeix quan $x > 0$ i que es compleix la relació

$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$, de la qual es dedueix que $\Gamma(n+1) = n!$, si $n \in \mathbb{N}$. La relació anterior també permet estendre la definició de $\Gamma(x)$ a valors negatius no enters de x , ja que quan $-1 < x < 0$ es pot definir $\Gamma(x) \stackrel{\text{def}}{=} \Gamma(x+1)/x$. Un cop fet això, amb la mateixa igualtat es pot definir $\Gamma(x)$ per a $-2 < x < -1$ i l'aplicació reiterada d'aquest procés acaba estenent la definició de $\Gamma(x)$ a tots els valors negatius no enters de x . En els punts $x = 0, -1, -2, \dots$ la funció té discontinuïtats infinites.

Similarment, la funció $\Gamma(z)$ només existeix a la regió $\operatorname{Re} z > 0$, on la integral (doblement) impròpia (4.12) convergeix, ja que quan $\operatorname{Re} z \leq 0$ en el límit inferior tenim $|t^{z-1}| = |e^{(z-1)\log t}| = e^{(\operatorname{Re} z - 1)\log t} = t^{\operatorname{Re} z - 1}$ i la integral divergeix. Amb el mateix raonament de l'exemple 3.5 (aquí $[0, \infty)$ no és compacte, però es pot raonar sobre $[0, R]$ i fer $R \rightarrow \infty$) concloem que $\Gamma(z)$ és *analítica* a $\operatorname{Re} z > 0$. D'altra banda, el corol·lari 4.17 ens permet afirmar que

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z), \quad \operatorname{Re} z > 0,$$

ja que la igualtat es compleix sobre l'eix real. Això permet estendre analíticament $\Gamma(z)$ aplicant reiteradament la definició $\Gamma(z) \stackrel{\text{def}}{=} \Gamma(z+1)/z$

$$\begin{aligned} \Gamma(z) &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{\Gamma(z+1)}{z}, & -1 < \operatorname{Re} z \leq 0, \\ \Gamma(z) &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{\Gamma(z+1)}{z} = \frac{\Gamma(z+2)}{z(z+1)}, & -2 < \operatorname{Re} z \leq -1, \\ \vdots & & \vdots \\ \Gamma(z) &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{\Gamma(z+n+1)}{z(z+1)(z+2)\cdots(z+n)}, & -(n+1) < \operatorname{Re} z \leq -n. \end{aligned}$$

La funció $\Gamma(z)$ s'estén, així, a tot el pla complex, llevat dels punts $0, -1, -2, \dots$ de l'eix real, en els quals, òbviament, té pols simples.

Exemple 4.13 Una manera alternativa d'arribar a la mateixa extensió analítica de $\Gamma(z)$ és convertir la integral (4.12) respecte de la variable *real* t en una integral de contorn respecte de la variable *complexa* t . Escollim el tall de branca de t^{z-1} (que és multivaluada com a funció de t) sobre l'eix real positiu del pla complex t i considerem la integral $\int_C t^{z-1} e^{-t} dt$, on C és el contorn de la figura 4.10. Si $t = x + i\epsilon$, amb $0 \leq x \leq R$ i $\epsilon > 0$, en el límit $\epsilon \rightarrow 0, R \rightarrow \infty$ la contribució del

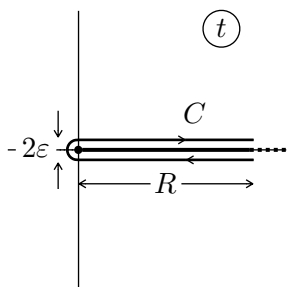


Figura 4.10: Contorn (obert) emprat a la definició de $\Gamma(z)$.

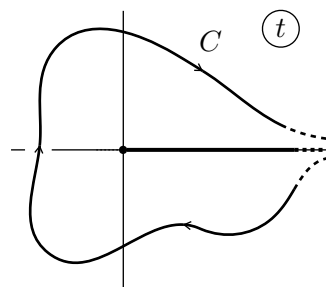


Figura 4.11: Un exemple de contorn (obert) emprat a la definició de l'extensió analítica de $\Gamma(z)$.

segment del costat superior del tall de branca a aquesta integral és

$$\int_0^\infty e^{(z-1)\log x} e^{-x} dx = \int_0^\infty x^{z-1} e^{-x} dx = \Gamma(z),$$

mentre que la contribució del segment del costat inferior, on ara $t = x - i\epsilon$, és

$$\int_\infty^0 e^{(z-1)(\log x + 2\pi i)} e^{-x} dx = - \int_0^\infty x^{z-1} e^{2\pi i z} e^{-x} dx = -e^{2\pi i z} \Gamma(z).$$

D'altra banda, en el límit $\epsilon \rightarrow 0$ la integral sobre la semicircumferència ζ (on $t = \epsilon e^{i\theta}$) s'anul·la, ja que

$$\left| \int_\zeta \dots \right| \leq \int_\zeta |\dots| \propto \epsilon^{\operatorname{Re} z} \rightarrow 0.$$

Tenim, doncs,

$$\int_C t^{z-1} e^{-t} dt = (1 - e^{2\pi i z}) \Gamma(z),$$

i, per tant,

$$\Gamma(z) = \frac{1}{1 - e^{2\pi i z}} \int_C t^{z-1} e^{-t} dt, \quad \operatorname{Re} z > 0.$$

Observem que l'integrand no té singularitats fora de l'eix real positiu (tall de branca de t^{z-1}). Això permet deformar el contorn C i convertir-lo, per exemple, en el de la figura 4.11 sense alterar el valor de la integral. La integral sobre aquest nou contorn (ara allunyat de l'origen) existeix *per a tot* z i pel mateix raonament de l'exemple 3.5, $F(z) = \int_C t^{z-1} e^{-t} dt$ és una funció *entera* a partir de la qual podem definir

$$\Gamma(z) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{F(z)}{1 - e^{2\pi i z}}, \quad \forall z \in \mathbb{C} - \{0, -1, -2, -3, \dots\},$$

on hem exclòs els enters no positius en els quals el denominador $1 - e^{2\pi iz}$ s'anul·la. Tot i que el denominador també s'anul·la a $z = n = 1, 2, 3, \dots$, aquestes són singularitats evitables, ja que $F(z)$ també s'anul·la en aquests punts perquè les contribucions dels dos segments de la figura 4.10 es cancel·len en aquest cas (notem també que l'integrand $t^{n-1}e^{-t}$ és analític i, en no haver-hi tall de branca, podem tancar el contorn C de la figura 4.11 i aplicar el teorema de Cauchy). De fet, ja sabem que $\Gamma(n) = (n-1)!$ quan $n \in \mathbb{N}$.

Aquesta nova $\Gamma(z)$ coincideix amb (4.12) en el domini $\operatorname{Re} z > 0$ i, per tant, l'estén analíticament a tot el pla complex, llevat dels enters no positius on hi ha pols simples, cosa que es fa evident si observem que al voltant d'aquests punts n

$$\begin{aligned} 1 - e^{2\pi iz} &= 1 - e^{2\pi i(z-n)} e^{2\pi in} = 1 - e^{2\pi i(z-n)} \\ &= 1 - [1 - 2\pi i(z-n) + \dots] = 2\pi i(z-n) + \dots, \end{aligned}$$

és a dir, el denominador $1 - e^{2\pi iz}$ té zeros simples a $z = n = 0, -1, -2, -3, \dots$

Tenim, doncs,

$$\Gamma(z) = \frac{1}{1 - e^{2\pi iz}} \int_C t^{z-1} e^{-t} dt, \quad z \neq 0, -1, -2, -3, \dots$$

on C és un contorn (obert) com el de la figura 4.11.

Òbviament, aquesta extensió analítica de $\Gamma(z)$ coincideix (corol·lari 4.17) amb l'obtinguda amb la relació $\Gamma(z) = \Gamma(z+1)/z$ i és evident que el domini d'analiticitat de $\Gamma(z)$ no es pot estendre més.

4.7 Problemes

P4.1 Sigui $a \in \mathbb{R}$. Trobeu els desenvolupaments de

$$f(z) = \frac{1}{a \pm z}$$

en sèrie de potències de z vàlids a $|z| < a$ i a $|z| > a$.

P4.2 Demostreu que la sèrie de Laurent de

$$f(z) = \frac{1}{z(z-1)}$$

és $-\sum_{n=-1}^{\infty} z^n$ en una certa regió. Determineu quina és aquesta regió.

P4.3 Trobeu els desenvolupaments en sèrie de potències de la funció

$$f(z) = \frac{z}{(z-1)(z-2)},$$

vàlids a les regions:

- | | |
|-------------------|---------------------|
| (a) $ z < 1$ | (e) $0 < z-1 < 1$ |
| (b) $1 < z < 2$ | (f) $0 < z-2 < 1$ |
| (c) $ z > 2$ | (g) $ z-2 > 1$ |
| (d) $ z-1 > 1$ | |

P4.4 Desenvolueu e^{1/z^2} al voltant de $z = 0$ i determineu quin tipus de singularitat té la funció en aquest punt.

P4.5 Determineu el tipus de singularitat que tenen a $z = 0$ les funcions següents:

- | | | | |
|------------------------------|---------------------------|-----------------------------------|------------------------------|
| (a) $z + \frac{1}{z}$ | (c) $\frac{e^{z^2}}{z^3}$ | (e) $\frac{z}{e^{\frac{1}{z}-1}}$ | (g) $\frac{z - \sin z}{z^3}$ |
| (b) $\frac{1 - \cos z}{z^2}$ | (d) $z^2 e^{-z^4}$ | (f) $\frac{z}{e^z - 1}$ | (h) $\frac{\sinh z}{z^2}$ |

P4.6 Desenvolueu $f(z) = e^{g(z)}$, on $g(z) = z/(z-2)$, en sèrie de Laurent al voltant de $z = 2$.

P4.7 Demostreu que a la corona $1 < |z| < 2$, la funció

$$f(z) = \frac{z^2 - 2z + 5}{(z-2)(z^2 + 1)}$$

admet el desenvolupament

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n, \quad \text{on } a_n = \begin{cases} -\frac{1}{2^{n+1}}, & n \geq 0 \\ 0, & n \text{ senar} < 0 \\ 2(-1)^{n/2}, & n \text{ parell} < 0. \end{cases}$$

P4.8 Trobeu la sèrie de Taylor de $f(z) = 1/\sqrt{1-z}$ al voltant de $z = 0$. Determineu el seu disc de convergència i comenteu el resultat en referència a les singularitats de $f(z)$. Considereu les branques següents de $f(z)$

$$F_\alpha(z) = r^{-1/2} e^{-i\theta/2}, \quad r > 0, \alpha - \pi < \theta < \alpha + \pi,$$

on $re^{i\theta} \stackrel{\text{def}}{=} 1 - z$ i $\alpha \in (-\pi, \pi]$. Per a quins valors de α la sèrie de Taylor obtinguda convergeix a $F_\alpha(z)$ en el disc de convergència?

P4.9 Seguint amb els exemples 4.12 i 4.13,

- (a) determineu la part principal de la sèrie de Laurent de la funció gamma d'Euler, $\Gamma(z)$, al voltant de $z = 0, -1, -2, \dots$
- (b) integreu (4.12) per parts i demostreu que a $\mathbb{C}$ també es compleix la relació funcional $\Gamma(1+z) = z\Gamma(z)$ si $\operatorname{Re} z > 0$ (justifiqueu que el mètode és aplicable per a t i z complexos). Utilitzeu aquesta relació per estendre $\Gamma(z)$ més enllà de $\operatorname{Re} z > 0$ i identifiqueu-ne les singularitats.
- (c) utilitzeu els resultats de l'apartat (b) per trobar les singularitats de $\Gamma(z)$ i les parts principals de l'apartat (a).

P4.10 Usant branques de $\log z$, esteneu analíticament el logaritme d'una variable real a un domini obert que contingui l'eix real negatiu ($\operatorname{Re} z < 0, \operatorname{Im} z = 0$). Feu-ho de dues maneres: (a) vorejant $z = 0$ pel semiplà $\operatorname{Im} z \geq 0$ i (b) vorejant-lo pel semiplà $\operatorname{Im} z \leq 0$. Coincideixen els resultats? Calculeu $\log(-1)$ de les dues maneres. El resultat contradiu el corol·lari 4.17? Existeix una extensió analítica del logaritme d'una variable real a tot el domini $\mathbb{C}^* \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{C} - \{0\}$?

P4.11 Trobeu la funció entera més general que compleix

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{f(z)}{z^2} = i.$$

P4.12 Trobeu el radi i la regió de convergència de les sèries de potències següents:

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+3)!}{(3n)!} z^n & \text{(c)} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{z}{3 + (-1)^n} \right]^n & \text{(e)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} z^{-2n} \\ \text{(b)} \sum_{n=-\infty}^0 7^{-n} n z^n & \text{(d)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{3^n} (z-1)^{2n} & \text{(f)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n^2}}{(1+1/n)^{n^3}} \end{array}$$

P4.13 Siguin f i g dues funcions analítiques a $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{0\}$. En quins casos ha de ser necessàriament $f(z) = g(z)$ a tot $\mathbb{C}^*$? Demostreu-ho o doneu-ne un contraexemple.

- (a) Si $f(1/n) = g(1/n)$, per a $n \in \mathbb{N}$ i $n > 10$.
- (b) Si $\lim_{n \rightarrow \infty} f(1/n) = \lim_{n \rightarrow \infty} g(1/n)$.
- (c) Si $f(1+1/n) = g(1+1/n)$, per a $n \in \mathbb{N}$.
- (d) Si $f(n) = g(n)$, per a $n \in \mathbb{Z}$.

(e) Si $f(n) = g(n)$, però $f(-n) \neq g(-n)$, per a $n \in \mathbb{N}$. Podeu usar, sense demostrar-ho (la demostració és al problema **P5.9**), que la funció gamma d'Euler $\Gamma(z)$ no té cap zero.

És correcte afirmar que $\Gamma(z)$ és l'extensió analítica de $(n-1)!$ al domini $\mathbb{C} - \mathbb{N}$? Per què?

P4.14 Seguint amb l'exemple 4.3,

(a) demostreu que

$$\zeta(s)\Gamma(s) = \int_0^\infty \frac{t^{s-1}}{e^t - 1} dt, \quad \operatorname{Re} s > 1.$$

Indicació. Intercanvieu d'ordre $\sum$ i $\int$ (no cal justificar-ho).

(b) Caracteritzeu les singularitats de l'integrand $f(t) = t^{s-1}/(e^t - 1)$ per a valors arbitraris de $s \in \mathbb{C}$. Escolliu el tall de branca de t^{s-1} (com a funció de t) sobre l'eix real positiu del pla complex t .

(c) Demostreu que en un cert domini del pla complex s la funció $\zeta(s)$ es pot expressar

$$\zeta(s) = \frac{1/\Gamma(s)}{1 - e^{2\pi is}} \int_C \frac{t^{s-1}}{e^t - 1} dt,$$

on C és un contorn com el que es mostra a la figura 4.11.

(d) Caracteritzeu les singularitats de $\zeta(s)$ i trobeu explícitament la part principal de les corresponents sèries de Laurent. Podeu usar, sense demostrar-ho, que $\Gamma(z)$ no té cap zero (la demostració és al problema **P5.9**). Concloeu que l'expressió de l'apartat anterior és correcta a $\mathbb{C} - \{1\}$.

SOLUCIONS

S4.1 Si $|z| < a$:

$$f(z) = \frac{1}{a \pm z} = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{1 \pm z/a} = \frac{1}{a} \left[1 \mp \frac{z}{a} + \left(\frac{z}{a}\right)^2 \mp \left(\frac{z}{a}\right)^3 + \cdots \right].$$

Si $|z| > a$:

$$\frac{1}{a \pm z} = \pm \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1 \pm a/z} = \pm \frac{1}{z} \left[1 \mp \frac{a}{z} + \left(\frac{a}{z}\right)^2 \mp \left(\frac{a}{z}\right)^3 + \cdots \right].$$

S4.2 La sèrie $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ és la sèrie geomètrica que només convergeix quan $|z| < 1$, i ho fa cap a la funció $1/(1-z)$. Per tant,

$$\frac{1}{z-1} = -\frac{1}{1-z} = -\sum_{n=0}^{\infty} z^n, \quad \text{quan } |z| < 1.$$

D'altra banda, la funció $1/z$ coincideix amb la seva sèrie de Laurent al voltant del punt $z = 0$, que, en aquest cas, té un únic terme i és vàlida quan $z \neq 0$, és a dir, quan $|z| > 0$. Així doncs, a la corona $0 < |z| < 1$ tenim

$$\begin{aligned} f(z) &= -\frac{1}{z} \frac{1}{1-z} = -\frac{1}{z} (1 + z + z^2 + z^3 + \dots) \\ &= -\left(\frac{1}{z} + 1 + z + z^2 + z^3 + \dots\right). \end{aligned}$$

S4.3 $f(z) = z/(z-1)(z-2)$ té singularitats a $z = 1$ i a $z = 2$. Els desenvolupaments dels casos (a), (b) i (c) són vàlids en regions centrades a $z = 0$ i, per tant, són sèries de potències de z . Les regions dels casos (d) i (e) són centrades a $z = 1$ i, per tant, són sèries de potències de $(z-1)$. Els casos (f) i (g) corresponen a sèries de potències de $(z-2)$.

En tots els casos, convé descompondre la funció en fraccions simples, és a dir, buscar els coeficients A i B que permetin expressar la funció com

$$\frac{z}{(z-1)(z-2)} = \frac{A}{z-1} + \frac{B}{z-2}.$$

Si sumem les fraccions de la dreta, obtenim

$$\frac{A(z-2) + B(z-1)}{(z-2)(z-1)} = \frac{(A+B)z - (2A+B)}{(z-2)(z-1)}.$$

Per tant, perquè coincideixi amb $f(z)$, veiem que $A+B = 1$ i que $2A+B = 0$, és a dir, $A = -1$ i $B = 2$. Així, podem escriure $f(z)$ com

$$f(z) = \frac{1}{1-z} + \frac{2}{z-2}.$$

Ara només es tracta de trobar els desenvolupaments en sèrie de cada sumand, vàlids a cadascuna de les regions considerades, i sumar-los. Per fer-ho, usarem la sèrie geomètrica $1/(1-\alpha) = 1 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \dots$ (vàlid quan $|\alpha| < 1$).

(a) $|z| < 1$

$$\begin{aligned}
 f(z) &= \frac{1}{1-z} - \frac{1}{1-(z/2)} \\
 &= (1+z+z^2+z^3+\cdots) - \left[1+\frac{z}{2}+\left(\frac{z}{2}\right)^2+\left(\frac{z}{2}\right)^3+\cdots\right] \\
 &= \frac{1}{2}z + \left(1-\frac{1}{4}\right)z^2 + \cdots + \left(1-\frac{1}{2^n}\right)z^n + \cdots
 \end{aligned}$$

(b) $1 < |z| < 2$

$$\begin{aligned}
 f(z) &= -\frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-(1/z)} - \frac{1}{1-(z/2)} \\
 &= -\frac{1}{z} \left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^3}+\cdots\right) - \left[1+\frac{z}{2}+\left(\frac{z}{2}\right)^2+\left(\frac{z}{2}\right)^3+\cdots\right] \\
 &= \cdots - \frac{1}{z^k} - \cdots - \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z} - 1 - \frac{1}{2}z - \frac{1}{4}z^2 - \cdots - \frac{1}{2^n}z^n + \cdots
 \end{aligned}$$

(c) $|z| > 2$

$$\begin{aligned}
 f(z) &= -\frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-1/z} + \frac{2}{z} \cdot \frac{1}{1-2/z} \\
 &= -\frac{1}{z} \left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^3}+\cdots\right) + \frac{2}{z} \left[1+\frac{2}{z}+\left(\frac{2}{z}\right)^2+\left(\frac{2}{z}\right)^3+\cdots\right] \\
 &= \frac{1}{z} + 3\frac{1}{z^2} + \cdots + (2^n-1)\frac{1}{z^n} + \cdots
 \end{aligned}$$

(d) $|z-1| > 1$

$$\begin{aligned}
 f(z) &= -\frac{1}{z-1} + \frac{2}{z-2} \\
 &= -\frac{1}{z-1} + \frac{2}{(z-1)} \frac{1}{1-(z-1)^{-1}} \\
 &= -\frac{1}{z-1} + \frac{2}{(z-1)} \left[1+\frac{1}{(z-1)}+\frac{1}{(z-1)^2}+\frac{1}{(z-1)^3}+\cdots\right] \\
 &= \frac{1}{z-1} + 2\frac{1}{(z-1)^2} + 2\frac{1}{(z-1)^3} + \cdots + 2\frac{1}{(z-1)^n} + \cdots
 \end{aligned}$$

(e) $0 < |z - 1| < 1$

$$\begin{aligned} f(z) &= -\frac{1}{z-1} - 2\frac{1}{1-(z-1)} \\ &= -\frac{1}{z-1} + 2[1 + (z-1) + (z-1)^2 + (z-1)^3 + \dots] \\ &= -\frac{1}{z-1} + 2 + 2(z-1) + 2(z-1)^2 \\ &\quad + 2(z-1)^3 + \dots + 2(z-1)^n + \dots \end{aligned}$$

(f) $0 < |z - 2| < 1$

$$\begin{aligned} f(z) &= -\frac{1}{z-1} + \frac{2}{z-2} \\ &= -\frac{1}{1+(z-2)} + \frac{2}{z-2} \\ &= -[1 - (z-2) + (z-2)^2 - (z-2)^3 + \dots] + \frac{2}{z-2} \\ &= \frac{2}{z-2} - 1 + (z-2) - (z-2)^2 \\ &\quad + (z-2)^3 + \dots + (-1)^{n+1}(z-2)^n + \dots \end{aligned}$$

(g) $|z - 2| > 1$

$$\begin{aligned} f(z) &= -\frac{1}{(z-2)} \cdot \frac{1}{1+(z-2)^{-1}} + \frac{2}{z-2} \\ &= -\frac{1}{(z-2)} \left(1 - \frac{1}{(z-2)} + \frac{1}{(z-2)^2} - \frac{1}{(z-2)^3} + \dots \right) + \frac{2}{z-2} \\ &= \frac{1}{(z-2)} + \frac{1}{(z-2)^2} - \frac{1}{(z-2)^3} + \dots + (-1)^n \frac{1}{(z-2)^n} + \dots \end{aligned}$$

S4.4 La funció exponencial e^z és analítica a tot arreu. Pel teorema de la sèrie de Laurent, això implica que hi ha un únic desenvolupament en sèrie de potències de z , que és de Taylor i convergeix a tot el pla. Així, $e^z = 1 + z + z^2/2! + z^3/3! + \dots + z^n/n! + \dots$, convergent per a tot z .

La funció e^{1/z^2} té una singularitat a $z = 0$ perquè $\lim_{z \rightarrow 0} e^{1/z^2} = \infty$. La sèrie de potències de z d'aquesta funció és

$$e^{1/z^2} = 1 + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{2!z^4} + \frac{1}{3!z^6} + \dots$$

La sèrie convergeix quan $z \neq 0$ i, en particular, en un entorn al voltant de la singularitat. És, doncs, una singularitat aïllada. D'altra banda, la part principal d'aquesta sèrie té infinits termes i, per tant, es tracta d'una singularitat essencial.

S4.5 Per classificar la (possible) singularitat que hi hagi a $z = 0$, hem de trobar la sèrie de potències de z que convergeixi a cadascuna de les funcions en un entorn de $z = 0$.

(a) La funció $z + 1/z$ ja està expressada com a sèrie de potències de z . Així, $z = 0$ és un pol simple (o d'ordre 1) d'aquesta funció.

(b) La funció $\cos z$ és analítica a tot el pla i, per tant, la sèrie de Taylor $\cos z = 1 - z^2/2! + z^4/4! - z^6/6! + \dots$ convergeix a tot el pla. Així,

$$\begin{aligned} \frac{1 - \cos z}{z^2} &= \frac{1 - (1 - z^2/2! + z^4/4! + \dots)}{z^2} \\ &= \frac{z^2/2! - z^4/4! + \dots}{z^2} = \frac{1}{2!} - \frac{z^2}{4!} + \dots, \end{aligned}$$

que és una sèrie sense part principal i, per tant, no hi ha cap singularitat o, més exactament, aquesta funció té una singularitat evitable a $z = 0$.

$$(c) \frac{e^{z^2}}{z^3} = \frac{1 + z + z^2/2! + \dots}{z^3} = \frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{2!z} + \frac{1}{3!} + \frac{z}{4!} + \dots$$

La part principal arriba fins a z^{-3} , per tant, és un pol d'ordre 3.

(d) No té singularitats.

$$\begin{aligned} (e) \frac{z}{e^{(1/z)-1}} &= z e e^{-1/z} = ez \left(1 - \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} - \frac{1}{3!z^3} + \dots \right) \\ &= ez - e + \frac{1}{2ez} - \frac{1}{3!ez^2} + \dots \end{aligned}$$

És una singularitat essencial.

$$\begin{aligned} (f) \frac{z}{e^z - 1} &= \frac{z}{(1 + z + z^2/2 + z^3/3! + \dots) - 1} \\ &= \frac{z}{z + z^2/2 + z^3/3! + \dots} = \frac{1}{1 + z/2 + z^2/3! + \dots} \\ &= 1 - \frac{1}{2}z + \frac{1}{12}z^2 + \dots \end{aligned}$$

L'última igualtat s'obté dividint 1 per "polinomi" $1 + z/2 + z^2/3! + \dots$.

La sèrie obtinguda no té part principal i, per tant, $z = 0$ és una singularitat evitable.

$$(g) \quad \frac{z - \sin z}{z^3} = \frac{z - (z - z^3/3! + z^5/5! - \dots)}{z^3} = \frac{1}{3!} + \frac{z^2}{5!} - \dots$$

És una singularitat evitable.

$$(h) \quad \frac{\sinh z}{z^2} = \frac{z + z^3/3! + z^5/5! + \dots}{z^2} = \frac{1}{z} + \frac{1}{3!}z + \frac{1}{5!}z^3 + \dots$$

És un pol simple.

S4.6 La sèrie de Laurent “al voltant de $z = 2$ ” significa la sèrie de potències de $(z - 2)$, vàlida en un entorn de $z = 2$.

Podem expressar fàcilment $g(z) = z/(z - 2)$ com una sèrie de potències de $(z - 2)$,

$$g(z) = \frac{z}{z - 2} = \frac{z - 2 + 2}{z - 2} = 1 + \frac{2}{z - 2}.$$

La sèrie només té 2 termes i és vàlida a tot el pla, llevat del punt $z = 2$. Tenim, per tant,

$$\begin{aligned} f(z) &= e^{1 + \frac{2}{z-2}} = e e^{\frac{2}{z-2}} \\ &= e \left[1 + \frac{2}{z-2} + \frac{1}{2!} \left(\frac{2}{z-2} \right)^2 + \frac{1}{3!} \left(\frac{2}{z-2} \right)^3 + \dots \right]. \end{aligned}$$

Així doncs, $z = 2$ és una singularitat essencial de $f(z)$.

S4.7 $f(z)$ té singularitats (pols simples) a $z = 2, \pm i$. Com que es tracta d’una sèrie de potències de z , aquesta funció té tres regions de convergència diferents $|z| < 1$, $1 < |z| < 2$, $|z| > 2$. A cada regió hi ha una sèrie de potències de z *diferent* que convergeix a $f(z)$. Per trobar-les convé expressar f en fraccions simples. Una possibilitat és

$$f(z) = \frac{a}{z - i} + \frac{b}{z + i} + \frac{c}{z - 2},$$

però també podem fer

$$f(z) = \frac{Az + B}{z^2 + 1} + \frac{C}{z - 2},$$

és a dir,

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{(Az + B)(z - 2) + C(z^2 + 1)}{(z^2 + 1)(z - 2)} \\ &= \frac{(A + C)z^2 + (-2A + B)z + (C - 2B)}{(z^2 + 1)(z - 2)} = \frac{z^2 - 2z + 5}{(z^2 + 1)(z - 2)}, \end{aligned}$$

d'on obtenim que $A = 0$, $B = -2$ i $C = 1$. Així doncs,

$$f(z) = -\frac{2}{z^2 + 1} + \frac{1}{z - 2} = -\frac{2}{z^2} \frac{1}{1 + z^{-2}} - \frac{1}{2} \frac{1}{1 - (z/2)}.$$

Ara ja podem utilitzar la sèrie $1 + \alpha + \alpha^2 + \dots = 1/(1 - \alpha)$, quan $|\alpha| < 1$, per a cada sumand, amb $\alpha = -1/z^2$ per al primer i $\alpha = z/2$ per al segon. Així, obtenim,

$$f(z) = -\frac{2}{z^2} \left(1 - \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^4} + \dots \right) - \frac{1}{2} \left(1 + \frac{z}{2} + \frac{z^2}{4} + \frac{z^3}{8} + \dots \right).$$

La primera sèrie és convergent quan $|-1/z^2| < 1$, és a dir, quan $|z| > 1$. La segona sèrie convergeix quan $|z/2| < 1$, és a dir, quan $|z| < 2$. Per tant,

$$f(z) = \dots + 2(-1)^k \frac{1}{z^{2k}} + \dots + \frac{2}{z^4} - \frac{2}{z^2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}z - \frac{1}{8}z^2 + \dots - \frac{1}{2^{n+1}}z^n + \dots,$$

si $1 < |z| < 2$.

S4.8 La funció $f(z) = 1/\sqrt{1 - z}$ és bivaluada, ja que involucra una arrel quadrada. Té una singularitat a $z = 1$ (on s'anul·la el denominador), que és també el punt d'embranchament de $\sqrt{1 - z}$. Per tant, existirà alguna branca (analítica) al voltant de $z = 0$, com es pot veure a la figura 4.12).

Per trobar la sèrie de Taylor, calculem les seves derivades a l'origen:

$$\begin{aligned} F_\alpha^{(0)}(0) &= (1 - 0)^{-1/2} &= 1, \\ F_\alpha^{(1)}(0) &= \frac{1}{2}(1 - 0)^{-3/2} &= \frac{1}{2}, \\ F_\alpha^{(2)}(0) &= \frac{1}{2} \frac{3}{2}(1 - 0)^{-5/2} &= \frac{3 \cdot 1}{2^2}, \\ F_\alpha^{(3)}(0) &= \frac{1}{2} \frac{3}{2} \frac{5}{2}(1 - 0)^{-7/2} &= \frac{5 \cdot 3 \cdot 1}{2^3}, \\ \vdots &= \vdots &= \vdots \\ F_\alpha^{(n)}(0) &= \frac{1}{2} \frac{3}{2} \frac{5}{2} \dots \frac{2n-1}{2} (1 - 0)^{-(2n+1)/2} &= \frac{(2n-1) \dots 5 \cdot 3 \cdot 1}{2^n}, \end{aligned}$$

Però,

$$\frac{(2n-1) \cdots 5 \cdot 3 \cdot 1}{2^n} = \frac{(2n)(2n-1)(2n-2) \cdots 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2^n (2 \cdot n) \cdot [2(n-1)] \cdots (2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 1)} = \frac{(2n)!}{2^{2n} n!}.$$

Per tant,

$$F_\alpha(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)! z^n}{2^{2n} (n!)^2} \quad (4.13)$$

Alternativament, podríem haver obtingut aquest resultat estenent la sèrie binomial

$$(1+x)^b = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{b}{n} x^n$$

als nombres complexos usant la “recepta” de la pàgina 8 i substituint x per $-z$ i b per $-1/2$.

Per trobar el radi de convergència, R , de la sèrie de Taylor obtinguda, recordem que $1/R = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$, on $\{a_n\}$ són els coeficients de la sèrie. En el nostre cas,

$$\begin{aligned} \frac{1}{R} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2} \right]^{1/n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{(2n)^{2n} e^{-2n} \sqrt{4\pi n}}{2^{2n} n^{2n} e^{-2n} 2\pi n} \right]^{1/n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (\pi n)^{-1/(2n)} = \exp \left[- \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(\pi n)}{2n} \right] \\ &= \exp \left(- \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1/n}{2} \right) = e^0 = 1, \end{aligned}$$

on a la primera línia hem usat la fórmula de Stirling⁴ i en passar de la segona a la tercera línia hem emprat la regla de L'Hôpital. Tenim, doncs (figures 4.12 i 4.13),

$$R = 1$$

El radi de convergència no pot superar el valor $R = 1$ perquè totes les branques de $f(z)$ tenen una singularitat a $z = 1$, mentre que la sèrie (4.13) és analítica a l'interior del seu disc de convergència. En particular, la sèrie esmentada convergeix a $F_\alpha(z)$ en tot el disc $|z| < R = 1$ si

$$-\pi/2 \leq \alpha \leq \pi/2$$

com ho mostra clarament la figura 4.13 (per als valors extrems els talls de branca són tangents al disc de convergència).

⁴Fórmula de Stirling: $\lim_{n \rightarrow \infty} (n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n})/n! = 1$.

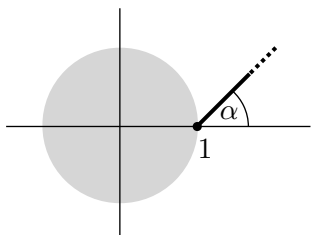


Figura 4.12: En negre, singularitats de les branques $F_\alpha(z)$. En gris, disc de convergència de la sèrie (4.13).

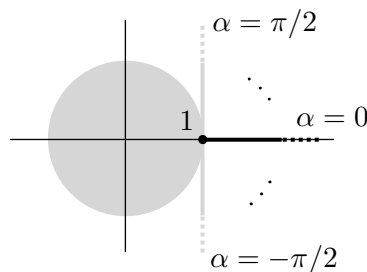


Figura 4.13: En negre, el tall de branca de $F_0(z)$. En gris, els talls corresponents als valors extrems de α per als quals la sèrie (4.13) convergeix a $F_\alpha(z)$ en el seu disc de convergència.

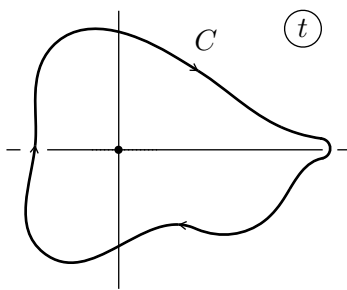


Figura 4.14: Si $z = 0, -1, -2, \dots$, el tall de branca de $t^{z-1}e^{-t}$ desapareix i queda un pol a $t = 0$. En aquest cas podem tancar el contorn C .

S4.9 (a) De l'exemple 4.12 sabem que $\Gamma(z)$ té pols simples al enters no positius. Al voltant d'aquests valors, que designem amb $-n$, tenim

$$\begin{aligned}\Gamma(z) &= \frac{F(z)}{1 - e^{2\pi i(z+n-n)}} = \frac{F(z)}{1 - e^{2\pi i(z+n)}} \\ &= \frac{F(-n) + F'(-n)(z+n) + \dots}{1 - [1 + 2\pi i(z+n) + \dots]} = -\frac{F(-n)}{2\pi i(z+n)} + G(z),\end{aligned}$$

on $G(z)$ és una sèrie de potències de $z - n$ d'exponents no negatius. La part principal de $\Gamma(z)$ es redueix, doncs, a $a_{-1}/(z+n)$, amb $a_{-1} = -F(-n)/(2\pi i)$ i

$$F(-n) = \int_C t^{-n-1}e^{-t}dt,$$

on C és un contorn obert com el de la figura 4.11. Però per a $z = -n$ el tall de branca de l'integrand desapareix ($t^{-n-1}e^{-t}$ no és una funció multivaluada) i només queda un pol d'ordre $n+1$ a $t = 0$. Per tant, podem tancar C per la dreta (figura 4.14) i fer servir la segona fórmula

integral de Cauchy per arribar a

$$F(-n) = \oint_C \frac{e^{-t}}{t^{n+1}} dt = -\frac{2\pi i}{n!} \frac{d^n}{dt^n} e^{-t} \Big|_{t=0} = -\frac{2\pi i}{n!} (-1)^n,$$

on el signe $-$ és degut al fet que C es recorre en el sentit horari. Així doncs, la part principal de la sèrie de Laurent de $\Gamma(z)$ al voltant de $z = -n$ és

$$\boxed{\frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{z+n}}$$

(b) Alternativament, considerem l'equació 4.12. Observem que

$$zt^{z-1}e^{-t} = \frac{d}{dt} (t^z e^{-t}) + t^z e^{-t},$$

i, per tant,

$$\begin{aligned} z\Gamma(z) &= \int_0^\infty zt^{z-1}e^{-t} dt = \int_0^\infty \left[\frac{d}{dt} (t^z e^{-t}) + t^{(z+1)-1} e^{-t} \right] dt \\ &= [t^z e^{-t}]_{t \rightarrow 0}^{t \rightarrow \infty} + \Gamma(z+1) = \Gamma(z+1), \end{aligned}$$

on hem usat que $\lim_{t \rightarrow 0} t^z = 0$ si $\operatorname{Re} z > 0$, ja que $|t^z| = t^{\operatorname{Re} z}$. Això demostra que per a valors complexos de z també és compleix la igualtat

$$\boxed{\Gamma(z+1) = z\Gamma(z), \quad z \in D_0}^5$$

on $D_0 = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\}$ (figura 4.15).

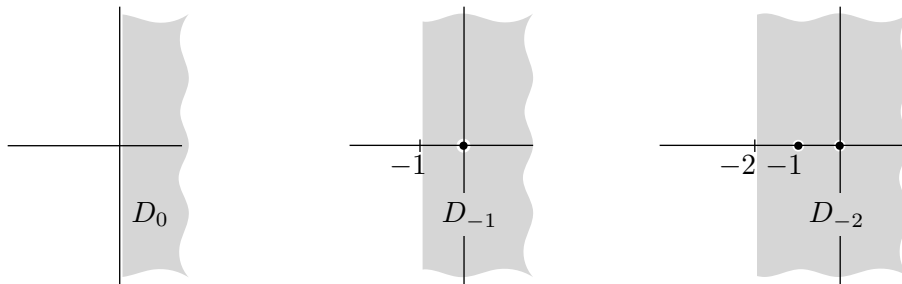


Figura 4.15: Els tres primers dominis D_{-n} usats als apartats (b) i (c) del problema **P4.9**. Els punts negres són el primers dos pols de $\Gamma(z)$.

⁵Recordem que aquesta relació i el resultat $\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t} dt = 1$ demostren que $\Gamma(n) = (n-1)!$ per a tot $n \in \mathbb{N}$.

(c) Escrivim aquesta última relació com

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+1)}{z}, \quad z \in D_0,$$

i observem que el membre de la dreta és una funció analítica en el domini $D_{-1} = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > -1, z \neq 0\}$, $D_0 \subset D_{-1}$ (figura 4.15). Per tant, *defineix l'extensió analítica de $\Gamma(z)$ a D_{-1}* . A més, com que $\Gamma(z+1)$ és analítica a $D_{-1} \cup \{0\}$, aquesta última expressió ens indica que aquesta extensió de $\Gamma(z)$ *té un pol simple a $z = 0$* i que la part principal de la sèrie de Laurent al voltant de $z = 0$ és

$$\boxed{\frac{\Gamma(1)}{z} = \frac{1}{z}}$$

Per a aquesta extensió de $\Gamma(z)$ se satisfà

$$\Gamma(z+1) = \frac{\Gamma(z+2)}{(z+1)}, \quad z \in D_{-2}.$$

on $D_{-2} = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > -2, z \neq 0, -1\}$, $D_0 \subset D_{-1} \subset D_{-2}$ (figura 4.15), ja que $\Gamma(w) = \Gamma(w+1)/w$ si $w \in D_{-1}$ i la igualtat s'obté fent $w = z+1$. Per tant, l'extensió obtinguda satisfà

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+2)}{z(z+1)}, \quad z \in D_{-1},$$

Però, com acabem de veure, el terme de la dreta és una funció analítica en el domini D_{-2} i, conseqüentment, defineix una extensió analítica de $\Gamma(z)$ en aquest nou domini. Així doncs, de forma recurrent, podem estendre aquesta funció a tot el pla complex, llevat dels enters no positius, on $\Gamma(z)$ té pols simples.

Observem que

$$\Gamma(z) = \frac{F(z)}{z+1}, \quad \text{on } F(z) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\Gamma(z+2)}{z}.$$

Com que $F(z)$ és analítica a $z = -1$, $\Gamma(z)$ també té un pol simple a $z = -1$ amb coeficient

$$a_{-1} = F(-1) = \frac{\Gamma(1)}{-1} = -1.$$

Continuant amb aquest procés, l'extensió analítica de $\Gamma(z)$ en el domini D_{-n-1} es pot escriure com

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+n+1)}{z(z+1)(z+2)\cdots(z+n)}.$$

Veiem que aquesta extensió analítica de $\Gamma(z)$ també té un pol simple a $z = -n$ amb

$$\begin{aligned} a_{-1} &= \frac{\Gamma(z+n+1)}{z(z+1)(z+2)\cdots(z+n-1)} \Big|_{z=-n} \\ &= \frac{\Gamma(1)}{(-n)(-n+1)\cdots(-1)} = \frac{(-1)^n}{n!}. \end{aligned}$$

Hem recuperem, doncs, els resultats de l'apartat (a).

S4.10 L'eix real positiu està contingut a $D_0 = \mathbb{C} - \{\operatorname{Re} z < 0, \operatorname{Im} z = 0\}$ (figura 4.16), que és el domini de la branca principal del logaritme

$$F_0(z) \stackrel{\text{def}}{=} \log r + i\theta, \quad -\pi < \theta < \pi,$$

on $z = re^{i\theta}$. En particular, $F_0(x) = \log x$ quan $x > 0$. D'altra banda, $-x$ no pertany al domini de F_0 i, per tant, no té sentit escriure $F_0(-x)$. Hem de fer servir una altra branca, el domini de la qual inclogui l'eix real negatiu, per donar sentit a $\log(-1)$.

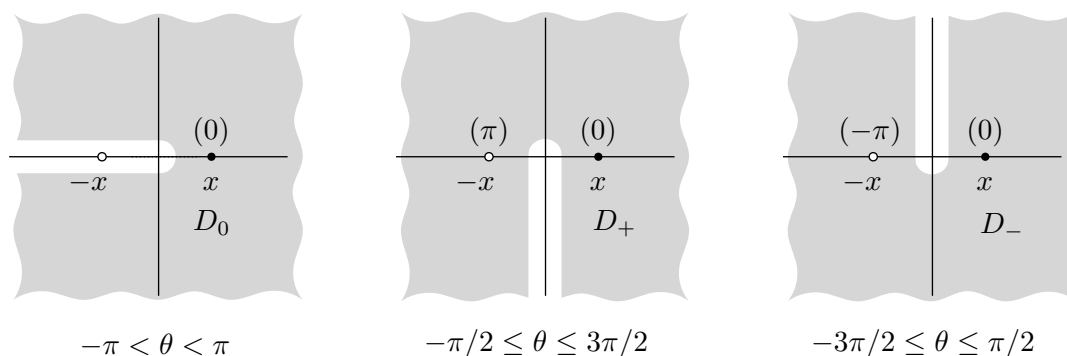


Figura 4.16: Dominis de les branques F_0 , F_+ i F_- del logaritme. S'indica l'interval de valors de l'argument de $z = re^{i\theta}$. Entre parèntesis s'indica el valor de l'argument dels punts genèrics x i $-x$ representats. Els talls de branca s'han exagerat per a més claretat.

(a) Considerem la branca

$$F_+(z) \stackrel{\text{def}}{=} \log r + i\theta, \quad -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2}.$$

$F_+(z)$ és analítica sobre el semiplà $\operatorname{Im} z > 0$ (ens permet vorejar $z = 0$ per sobre) i, a més, $F_+(x) = \log x$. Per tant, $F_+(z)$ és l'extensió analítica que busquem en el domini $D_+ = \mathbb{C} - \{\operatorname{Im} z < 0, \operatorname{Re} z = 0\}$ (figura 4.16), en el qual $F_+(-x) = \log x + i\pi$. Per aquest procediment trobem $\log(-1) = i\pi$.

(b) Considerem ara la branca

$$F_-(z) \stackrel{\text{def}}{=} \log r + i\theta, \quad -\frac{3\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}.$$

$F_-(z)$ és analítica sobre el semiplà $\text{Im } z < 0$ (ens permet vorejar $z = 0$ per sota) i, a més, $F_-(x) = \log x$. Per tant, $F_-(z)$ és l'extensió analítica que busquem en el domini $D_- = \mathbb{C} - \{\text{Im } z > 0, \text{Re } z = 0\}$ (figura 4.16), en el qual $F_-(-x) = \log x - i\pi$. Per aquest procediment obtenim $\log(-1) = -i\pi$.

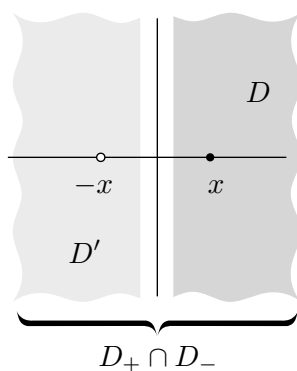


Figura 4.17: $D_+ \cap D_-$ no és un conjunt connex. És la unió de D i D' (disjunts i cap d'ells conté punts de la frontera de l'altre). Només la component D conté l'eix real positiu.

El resultat obtingut no contradiu el corol·lari 4.17. Les funcions F_+ i F_- no són analítiques sobre el mateix domini. Estan definides sobre la regió comuna $D_+ \cap D_-$, que *no és connexa*, com ho mostra la figura 4.17. El domini (obert i connex) on sí que són *simultàniament* analítiques i que conté l'eix real positiu és D . A D es compleix $F_+(z) = F_-(z)$, com ho afirma el corol·lari 4.17. Els punts $z = x$ i $z = -x$ es troben en components (D i D') desconnectades entre elles.

Aquest resultat demostra que dues extensions analítiques obtingudes a través de camins diferents en general no tenen per què coincidir a tota la intersecció dels seus dominis d'analiticitat quan aquesta intersecció no és connexa.

No pot existir una extensió analítica del logaritme real a $\mathbb{C}^*$, ja que, com es demostra a l'exemple 3.3, no es pot definir una funció logarítmica analítica a tota aquesta regió.

S4.11 Considerem la funció $g(z) = f(z) - iz^2$, la qual satisfà $\lim_{z \rightarrow \infty} g(z)/z^2 = 0$. En ser entera, $g(z)$ té sèrie de Taylor i $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ en tot el pla

complex i podem escriure

$$\frac{g(z)}{z^2} = \frac{a_0}{z^2} + \frac{a_1}{z} + G(z), \quad (4.14)$$

on $G(z)$ també és analítica (i, per tant, contínua) a $\mathbb{C}$. Tenim

$$G(z) = \frac{g(z)}{z^2} - \frac{a_0}{z^2} - \frac{a_1}{z},$$

d'on deduïm que

$$\lim_{z \rightarrow \infty} G(z) = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{g(z)}{z^2} - 0 - 0 = 0.$$

Per tant, $|G(z)|$ és fitada (vegeu la solució de l'apartat (c) del problema **P3.12**) i pel teorema de Liouville ha de ser constant, en aquest cas $G(z) = 0$. Si ho substituïm a (4.14) obtenim $g(z) = a_0 + a_1 z$ i finalment

$$f(z) = iz^2 + a_1 z + a_0$$

S4.12 (a) És convenient usar la fórmula de R (pàgina 112) expressada en termes dels quocients entre coeficients consecutius

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+3)!/(3n)!}{(n+4)!/(3n+3)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3n+3)(3n+2)(3n+1)}{n+4} = \infty.$$

Per tant, la sèrie convergeix en tot el pla complex.

(b) Notem que és una sèrie de potències d'exponents negatius

$$\sum_{n=-\infty}^0 7^{-n} n z^n = - \sum_{n=0}^{\infty} 7^n n z^{-n} = - \sum_{n=0}^{\infty} 7^n n w^n,$$

on $w = 1/z$. El radi de convergència d'aquesta darrera sèrie és

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7^n n}{7^{n+1}(n+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{7(n+1)} = \frac{1}{7}.$$

Per tant, la sèrie convergeix a la regió $|w| < 1/7$, és a dir, $|z| > 7$.

(c) En aquest cas els coeficients són $a_n = 1/[3 + (-1)^n]^n$, és a dir, els coeficients amb subíndex parell són potències inverses de 4 i els de subíndex senar són potències inverses de 2. Si separem aquestes contribucions tenim

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{4^{2k}} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k+1}}{2^{2k+1}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{w^k}{4^{2k}} + \frac{z}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{w^k}{2^{2k}},$$

on $w = z^2$. Les fórmules de la pàgina 112 ens donen el radi de convergència en el pla w . Per a la primera sèrie és 4^2 i per a la segona, 2^2 . Per tant, la sèrie completa convergeix a $|z|^2 = |w| < \min\{2^2, 4^2\} = 2^2$ i tenim $R = 2$.

Alternativament,

$$\sup_{n \geq k} \{ \sqrt[n]{|a_n|} \} = \sup_{n \geq k} \{ 1/[3 + (-1)^n] \} = \max\{1/2, 1/4\} = 1/2.$$

Per tant, $R = \left(\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} \right)^{-1} = [\lim_{k \rightarrow \infty} (1/2)]^{-1} = 2$. La sèrie convergeix al disc $|z| < 2$.

(d) Si $w = (z - 1)^2$ la sèrie es pot escriure com

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{3^n} w^n.$$

El radi de convergència en el pla w és, doncs,

$$R_w = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n/3^n}{(n+1)/3^{n+1}} = 3 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 3.$$

Per tant, $R = \sqrt{R_w} = \sqrt{3}$. La sèrie convergeix al disc $|z - 1| < \sqrt{3}$.

Alternativament, $a_n = (n/2)/3^{n/2}$ si n és parell i $a_n = 0$ si n és senar. Així doncs,

$$\sup_{n \geq k} \{ \sqrt[n]{|a_n|} \} = \sup_{n \geq k} \left\{ \left[\frac{(n/2)}{3^{n/2}} \right]^{1/n}, 0 \right\} = \left[\frac{(k/2)}{3^{k/2}} \right]^{1/k} = \frac{(k/2)^{1/k}}{\sqrt{3}}.$$

Per tant,

$$R = \left\{ \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(k/2)^{1/k}}{\sqrt{3}} \right\}^{-1} = \sqrt{3} \lim_{k \rightarrow \infty} (k/2)^{-1/k} = \sqrt{3}.$$

(e) Si $w = 1/z^2$, la sèrie s'expressa

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} w^n.$$

Per tant,

$$R_w = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n)!/(n!)^2}{(2n+2)!/[(n+1)!]^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)} = \frac{1}{4},$$

i $R = 1/\sqrt{R_w} = 2$. La sèrie convergeix, doncs, a $|z| > 2$.

(f) La sèrie de potències és de la forma $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ amb

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{(1 + 1/\sqrt{n})^{n^{3/2}}}, & \text{si } \sqrt{n} \in \mathbb{N} \\ 0, & \text{en cas contrari.} \end{cases}$$

Així doncs,

$$\sup_{n \geq k} \left\{ \sqrt[n]{|a_n|} \right\} = \sup_{n \geq k} \left\{ \frac{1}{(1 + 1/\sqrt{n})^{\sqrt{n}}}, 0 \right\} = \frac{1}{\left(1 + 1/\sqrt{k}\right)^{\sqrt{k}}},$$

i el radi de convergència és

$$R = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 + 1/\sqrt{k}\right)^{\sqrt{k}} = e.$$

Per tant, la sèrie convergeix a $|z| < e$.

S4.13 En tots els apartats usarem la definició $h(z) \stackrel{\text{def}}{=} f(z) - g(z)$.

(a) Observem que els zeros de $h(z)$ tenen un únic punt d'acumulació, però és *fora* del domini de $h(z)$ ($\{1/n\} \rightarrow 0 \notin \mathbb{C}^*$). Per tant, els zeros de $h(z)$ són singularitats aïllades en el domini d'analicitat $\mathbb{C}^*$ de $h(z)$ i no podem concloure que $h \equiv 0$.

De fet, la funció $s(z) = \sin(\pi/z)$ és analítica a tot $\mathbb{C}^*$ i es compleix que $s(1/n) = \sin(\pi n) = 0$ per a $n \in \mathbb{N}$ i, òbviament, $s \not\equiv 0$. Per eliminar els zeros de $s(z)$ a $1, 1/2, 1/3, \dots, 1/10$, és suficient dividir $s(z)$ pel polinomi

$$P(z) = \prod_{k=1}^{10} (z - 1/k).$$

En definitiva, qualsevol $f(z)$ analítica a $\mathbb{C}^*$ (per exemple, $1/z$) i

$$g(z) = f(z) + \frac{\sin(\pi/z)}{\prod_{k=1}^{10} (z - 1/k)}$$

satisfan les condicions de l'enunciat, però $f \neq g$.

(b) Aquesta condició no diu res sobre els zeros de $h(z)$ a $\mathbb{C}^*$, només que $\{h(1/n)\} \rightarrow 0$ (de fet, ni tan sols ha d'existir $h(0)$, ja que $0 \notin \mathbb{C}^*$). No és, doncs, necessari que $h \equiv 0$ ni que, per tant, sigui $f = g$.

Contraexemple: sigui $f(z)$ qualsevol funció analítica a $\mathbb{C}^*$ (per exemple, e^z/z^2) i $g(z) = f(z) + z$.

(c) El conjunt $\{1 + 1/n\}$, $n \in \mathbb{N}$, de zeros de $h(z)$ té de punt d'acumulació $1 \in \mathbb{C}^*$. Per continuïtat, $h(1) = 0$, i tenim que 1 és un zero *no aïllat* de $h(z)$. Pel teorema 4.15, $h \equiv 0$ i conseqüentment $f(z) = g(z)$ a tot $\mathbb{C}^*$.

(d) Tots els zeros de $h(z)$ són aïllats i, per tant, no sembla necessari que $h \equiv 0$.

Contraexemple: sigui $f(z)$ qualsevol funció analítica a $\mathbb{C}^*$ (per exemple, $\cos z/z$) i

$$g(z) = f(z) + \sin(\pi z).$$

(e) Com en l'apartat anterior, no sembla necessari que $f(z) = g(z)$ a $\mathbb{C}^*$. Contraexemple: recordem que $\Gamma(z)$ és analítica a tot $\mathbb{C}$ llevat als enters no positius, on hi té pols simples. Així doncs, $1/\Gamma(1-z)$ té zeros simples als enters positius. D'altra banda, $\Gamma(z)$ no té zeros i, per tant, $1/\Gamma(1-z)$ és entera i s'anul·la a $z = 1, 2, 3, \dots$. Conseqüentment, si $f(z)$ és qualsevol funció analítica a $\mathbb{C}^*$ i

$$g(z) = f(z) + \frac{1}{\Gamma(1-z)},$$

les funcions f i g són diferents i compleixen la condició donada.

No és correcte afirmar que $\Gamma(z)$ és l'extensió analítica de $(n-1)!$, tot i que $\Gamma(n) = (n-1)!$, ja que el conjunt de punts on coincideixen no és ni un arc de corba, ni un domini obert, ni té cap punt d'acumulació. Com en els apartats anteriors, llevat del (c), hi ha moltes funcions (de fet, n'hi ha infinites) que “estenen analíticament” $(n-1)!$ a $\mathbb{C} - \{0, -1, -2, \dots\}$, per exemple,

$$\Gamma(z) + \frac{1}{\Gamma(1-z)}.$$

S4.14 (a) De la definició de $\zeta(s)$ i $\Gamma(s)$ tenim

$$\begin{aligned} \zeta(s)\Gamma(s) &= \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} \int_0^{\infty} u^{s-1} e^{-u} du = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} \int_0^{\infty} (nt)^{s-1} e^{-nt} n dt \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} t^{s-1} e^{-nt} dt = \int_0^{\infty} t^{s-1} \left[\sum_{n=1}^{\infty} (e^{-t})^n \right] dt \\ &= \int_0^{\infty} t^{s-1} \frac{e^{-t}}{1 - e^{-t}} dt = \int_0^{\infty} \frac{t^{s-1}}{e^t - 1} dt, \quad \operatorname{Re} s > 1, \end{aligned}$$

on hem fet el canvi de variables $u = nt$ i usat

$$\frac{z}{1-z} = \sum_{n=1}^{\infty} z^n, \quad |z| < 1,$$

amb $z = e^{-t}$. La condició $\operatorname{Re} s > 1$ és necessària per a la convergència de la sèrie que defineix $\zeta(s)$ (i inclou la condició $\operatorname{Re} s > 0$, necessària perquè l'expressió integral de $\Gamma(s)$ tingui sentit).

(b) L'integrand, $f(t) = t^{s-1}/(e^t - 1)$ té un tall de branca sobre l'eix real positiu per a valors no enters de s . Observem que $1/(e^t - 1)$ té un pol simple a $t = 0$, ja que al voltant d'aquest punt

$$\frac{1}{e^t - 1} = \frac{1}{(1 + t + t^2/2 + \dots) - 1} = \frac{1}{t + t^2/2 + \dots}.$$

Així doncs, per a $s = 2, 3, \dots$ l'integrand és analític a tot el pla complex i per a $s = 1, 0, -1, -2, \dots$ l'integrand té un pol d'ordre $2 - s$ a $t = 0$.

(c) Si procedim com a l'exemple 4.12 i considerem el contorn C de la figura 4.10, tenim

$$\int_C \frac{t^{s-1}}{e^t - 1} dt = (1 - e^{2\pi i s}) \zeta(s) \Gamma(s).$$

Usant els resultats de l'apartat (b), veiem que podem deformar el contorn C apartant-lo de l'eix real positiu i convertint-lo en un contorn com el de la figura 4.11. Així doncs, podem escriure

$$\zeta(s) = \frac{1/\Gamma(s)}{1 - e^{2\pi i s}} \int_C \frac{t^{s-1}}{e^t - 1} dt, \quad \operatorname{Re} s > 1, \quad C \text{ com a la fig. 4.11.}$$

Però l'expressió de la dreta és una funció analítica de s a tot $\mathbb{C}$ llevat, potser, dels enters (a l'apartat següent ho analitzarem amb més detall). Aquesta expressió defineix, doncs, una extensió analítica de $\zeta(s)$ a la regió indicada.

(d) Com que $\Gamma(s)$ no s'anul·la mai, $1/\Gamma(s)$ és entera i té els zeros on $\Gamma(s)$ té els pols, és a dir, a $s = 0, -1, -2, \dots$. El denominador $1 - e^{2\pi i s}$ és una funció entera que s'anul·la als nombres enters. Així doncs, el factor davant de la integral anterior té pols simples a $s = 1, 2, 3, \dots$. D'altra banda, la integral té zeros a $s = 2, 3, \dots$, ja que l'integrand és analític per a aquests valors i podem tancar C i usar el teorema de Cauchy-Goursat. Concloem, doncs, que $\zeta(s)$ només té un pol simple a $s = 1$ i al seu voltant tenim

$$\begin{aligned} \zeta(s) &= \frac{1/\Gamma(1)}{1 - [1 + 2\pi i(s-1) + \dots]} \int_C \frac{dt}{e^t - 1} + F(s) \\ &= \frac{1}{2\pi i(s-1)} \oint_C \frac{t/(e^t - 1)}{t} dt + F(z) \\ &= \frac{1}{s-1} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{e^t - 1} + F(s) = \frac{1}{s-1} + F(s), \end{aligned}$$

on $F(z)$ és analítica en un entorn de $s = 1$ i, per tant, la part principal de la sèrie de Laurent és $1/(s - 1)$. Notem que hem aplicat la primera fórmula integral de Cauchy a la funció entera

$$g(t) = \begin{cases} \frac{t}{e^t - 1}, & \text{si } t \neq 0 \\ \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{e^t - 1} = 1, & \text{si } t = 0. \end{cases}$$

Així doncs,

$$\zeta(s) = \frac{1/\Gamma(s)}{1 - e^{2\pi is}} \int_C \frac{t^{s-1}}{e^t - 1} dt, \quad s \in \mathbb{C} - \{1\}, \quad C \text{ com a la fig. 4.11.}$$

5 Residus

5.1 Teorema dels residus

Una característica molt important de les singularitats aïllades d'una funció és el valor del seu *residu* que definim tot seguit.

Definició 5.1 (Residu) *El residu de $f(z)$ a la singularitat aïllada z_0 és el coeficient a_{-1} de la sèrie de Laurent $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$, que convergeix a $f(z)$ a la corona més interna centrada a z_0 .*

Si designem per $\text{res}_{z=z_0} f(z)$ (o de vegades, de forma més condensada, per k_0) aquest residu i C_0 és un contorn tancat que envolta z_0 i no envolta cap altra singularitat de $f(z)$, i fem $n = -1$ a la igualtat (4.4), tenim

$$\text{res}_{z=z_0} f(z) = k_0 = a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_0} f(z) dz. \quad (5.1)$$

Teorema 5.1 (Teorema dels residus) *Sigui $f(z)$ analítica sobre i a l'interior d'un contorn tancat C , llevat d'un nombre finit de singularitats $z_1, z_2, \dots, z_N$ interiors a C , i siguin $k_1, k_2, \dots, k_N$ els residus de $f(z)$ en aquestes singularitats, aleshores*

$$\oint_C f(z) dz = 2\pi i \sum_{r=1}^N k_r = 2\pi i \sum_{r=1}^N \text{res}_{z=z_r} f(z).$$

DEMOSTRACIÓ: En ser finit el nombre de singularitats de $f(z)$ a l'interior de C , han de ser singularitats aïllades. Considerem els contorns circulars C_j , $j = 1, 2, \dots, N$, tots ells de radi r suficientment petit perquè les circumferències C_j no es tallin entre elles ni tallin el contorn C (vegeu la figura 5.1).

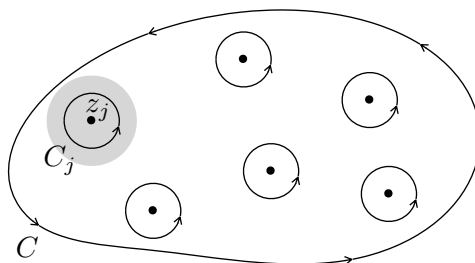


Figura 5.1: Contorns del teorema dels residus.

El teorema de Cauchy-Goursat ens permet escriure

$$\oint_C f(z) dz - \sum_{j=1}^N \oint_{C_j} f(z) dz = 0,$$

és a dir,

$$\oint_C f(z) dz = \sum_{j=1}^N \oint_{C_j} f(z) dz = 2\pi i \sum_{j=1}^N k_j,$$

on hem usat la igualtat (5.1) a cadascuna de les integrals sobre els contorns C_j .

◇

5.2 Càlcul dels residus

El teorema dels residus ens permet avaluar integrals sobre contorns tancats si coneixem els residus de les singularitats que hi ha al seu interior. Vegem ara com calcular el valor del residu per als diferents tipus de singularitat (descrits a la secció 4.5).

Residu d'una singularitat evitable: Si z_0 és una singularitat evitable de $f(z)$, com que la part principal de la sèrie de Laurent de $f(z)$ a la corona més interna centrada a z_0 no conté cap terme, el coeficient a_{-1} de la sèrie és nul. Tenim, per tant,

$$\operatorname{res}_{z=z_0} f(z) = a_{-1} = 0.$$

Residu d'un pol: Si z_0 és un pol d'ordre m de $f(z)$, en algun entorn d'aquest punt tenim

$$f(z) = \frac{a_m}{(z - z_0)^m} + \cdots + \frac{\mathbf{a_{-1}}}{z - z_0} + a_0 + a_1(z - z_0) + \cdots,$$

amb $a_m \neq 0$. El residu és el coeficient $\mathbf{a_{-1}}$ (destacat en negreta). Però d'altra banda, d'acord amb (4.9) i (4.10), tenim que $f(z) = F(z)/(z - z_0)^m$, amb $F(z_0) \neq 0$, on

$$\begin{aligned} F(z) &= f(z)(z - z_0)^m \\ &= a_m + \cdots + \mathbf{a_{-1}}(z - z_0)^{m-1} + a_0(z - z_0)^m + a_1(z - z_0)^{m+1} + \cdots \end{aligned}$$

Així doncs, el coeficient a_{-1} és també el coeficient de $(z - z_0)^{m-1}$ de la sèrie de Taylor de la funció $F(z)$, és a dir, $F^{(m-1)}(z_0)/(m-1)!$. Tenim, doncs,

$$\begin{aligned} \operatorname{res}_{z=z_0} f(z) &= a_{-1} = \frac{F^{(m-1)}(z_0)}{(m-1)!} \\ &= \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \left\{ \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [f(z)(z - z_0)^m] \right\} \end{aligned} \quad (5.2)$$

L'expressió anterior ens dona el valor del residu de $f(z)$ en un pol d'ordre m . En el cas d'un pol simple ($m = 1$) tenim

$$\operatorname{res}_{z=z_0} f(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} [f(z)(z - z_0)], \quad (5.3)$$

i per un pol d'ordre 2

$$\operatorname{res}_{z=z_0} f(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} \{[f(z)(z - z_0)]'\} = \lim_{z \rightarrow z_0} [f'(z)(z - z_0) + f(z)].$$

Residu d'una singularitat essencial: Si z_0 és una singularitat essencial de $f(z)$ no hi ha una forma general (com en el cas dels pols) de calcular el residu i sovint cal usar l'enginy per trobar el coeficient a_{-1} de la sèrie de Laurent vàlida al voltant de z_0 .

Exemple 5.1 Calculem els residus de les singularitats descrites a l'exemple 4.9:

- a) La funció $f(z) = (1 + z - e^z)/z$ té una singularitat evitable a $z = 0$ i, per tant, el residu és 0.
- b) La funció $f(z) = 1/(1 + z^2)^2$ té pols d'ordre 2 a $z = \pm i$. Si fem servir (5.2), el residu de $f(z)$ al pol $z = i$ és

$$\begin{aligned} \operatorname{res}_{z=i} f(z) &= \lim_{z \rightarrow i} \frac{d}{dz} \left[\frac{1}{(1 + z^2)^2} (z - i)^2 \right] \\ &= \lim_{z \rightarrow i} \left[\frac{1}{(z + i)^2} \right]' = \lim_{z \rightarrow i} \left[\frac{-2}{(z + i)^3} \right] = \frac{-2}{(2i)^3} = \frac{-i}{4}. \end{aligned}$$

Similarment trobem $\operatorname{res}_{z=-i} f(z) = i/4$.

- c) La funció $f(z) = z \sin(1/z)$ té una singularitat essencial a $z = 0$. La sèrie de Laurent al voltant de $z = 0$ és

$$z \sin(1/z) = 1 - \frac{1}{3!z^2} + \frac{1}{5!z^4} - \dots$$

i com que la part principal no conté el terme $1/z$, el residu en aquest punt és 0. Podem observar fàcilment que, si la funció fos $f(z) = z^2 \sin(1/z)$, el residu a $z = 0$ seria $(-1/3!)$.

Exemple 5.2 Considerem la situació particular en qual $f(z) = p(z)/q(z)$, on $p(z)$ i $q(z)$ són analítiques, $q(z)$ té un zero *simple* a z_0 , i $p(z)$ no s'anul·la en aquest punt. D'acord amb el teorema 4.14, $f(z)$ té, en aquest cas, un pol simple a z_0 . El residu corresponent és

$$\operatorname{res}_{z=z_0} f(z) = \frac{p(z_0)}{q'(z_0)}.$$

En efecte, només cal observar que les sèries de Taylor de $p(z)$ i $q(z)$ al voltant del punt z_0 són

$$p(z) = p(z_0) + p'(z_0)(z - z_0) + \cdots, \quad q(z) = 0 + q'(z_0)(z - z_0) + \cdots$$

Llavors, si utilitzem (5.3) tenim

$$\begin{aligned} \operatorname{res}_{z=z_0} f(z) &= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{p(z)}{q(z)} (z - z_0) \\ &= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{[p(z_0) + p'(z_0)(z - z_0) + \cdots] (z - z_0)}{q'(z_0)(z - z_0) + \cdots} = \frac{p(z_0)}{q'(z_0)}. \end{aligned}$$

Aquest resultat simplifica el càlcul del residu quan ens trobem en aquesta situació.

Per exemple, si $f(z) = e^{-z^2}/(z^2 + 3z + 1)$, com que el denominador té zeros simples a $z_1 = 1$ i $z_2 = 2$ i el numerador no s'anul·la en aquests punts, la funció $f(z)$ té pols simples a $z_{1,2}$. Per calcular els residus corresponents només cal avaluar $e^{-z^2}/(2z + 3)$ a $z_{1,2}$, és a dir,

$$\operatorname{res}_{z=1} f(z) = \frac{e^{-1}}{5}, \quad \operatorname{res}_{z=2} f(z) = \frac{e^{-4}}{7}.$$

5.3 Càlcul d'integrals definides pel mètode dels residus

Tot i que el teorema dels residus permet avaluar integrals sobre contorns tancats del pla complex, és molt útil per al càlcul d'integrals definides reals. En aquesta secció en veurem alguns tipus.

Integrals del tipus $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$

Si $f(z)$ no té cap singularitat a $\mathbb{R}$ i

$$\lim_{z \rightarrow \infty} |zf(z)| = 0 \quad \text{en el semiplà } \text{Im } z > 0, \quad (5.4)$$

aleshores

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 2\pi i \left[\begin{array}{c} \text{suma de tots els residus de } f(z) \\ \text{en el semiplà } \text{Im } z > 0 \end{array} \right] \quad (5.5)$$

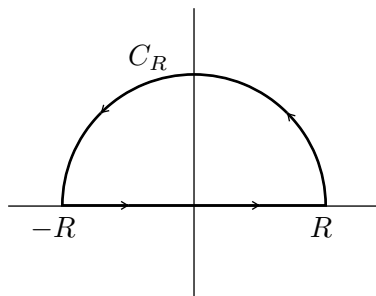


Figura 5.2: Contorns considerats per a deduir l'expressió (5.5).

DEMOSTRACIÓ: Sigui C el contorn tancat de la figura 5.2 format per l'interval $[-R, R]$ de l'eix real i el semicercle C_R de radi R que s'indica a la mateixa figura. Considerem la integral

$$\oint_C f(z) dz = \int_{-R}^R f(x) dx + \int_{C_R} f(z) dz.$$

Si usem el teorema dels residus i parametritzem C_R amb $z = Re^{i\theta}$, $\theta \in [0, \pi]$, $dz = Re^{i\theta} i d\theta$, tenim

$$2\pi i \left[\begin{array}{c} \text{suma dels residus de } f(z) \\ \text{a l'interior de } C \end{array} \right] = \int_{-R}^R f(x) dx + \int_0^\pi f(Re^{i\theta}) Re^{i\theta} i d\theta,$$

i en el límit $R \rightarrow \infty$ tenim

$$2\pi i \left[\begin{array}{c} \text{suma de tots els residus de } f(z) \\ \text{en el semiplà } \text{Im } z > 0 \end{array} \right] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx,$$

ja que la integral sobre C_R tendeix a zero en aquest límit. En efecte,

$$\left| \int_{C_R} f(z) dz \right| = \left| \int_0^\pi f(Re^{i\theta}) Re^{i\theta} i d\theta \right| \leq \int_0^\pi |f(Re^{i\theta})| R d\theta < \epsilon,$$

on hem usat la condició (5.4), segons la qual per a tot $\epsilon > 0$ existeix M tal que si $R = |z| > M$, llavors

$$|f(Re^{i\theta})| R = |zf(z)| < \frac{\epsilon}{\pi}, \quad \theta \in [0, \pi].$$

Per tant, $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} f(z) dz = 0$, i això demostra la igualtat (5.5).

◇

Exemple 5.3 Calculem la integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{x^4 + 16} dx.$$

Primer de tot comprovem que es compleixen les condicions per poder aplicar el mètode. Clarament, l'integrand no té singularitats a $\mathbb{R}$, i per a $|z| > 2$ tenim

$$\left| z \frac{z^2}{z^4 + 16} \right| \leq \frac{|z|^3}{|z|^4 - 16} \xrightarrow{|z| \rightarrow \infty} 0,$$

on hem usat la desigualtat triangular (1.6) al denominador.

Per calcular els residus, notem primer que el denominador s'anul·la sobre les quatre arrels quartes de -16 calculades a l'exemple 1.2. Veiem que només $2e^{i\pi/4}$ i $2e^{i3\pi/4}$ són al semiplà $\text{Im } z > 0$ (figura 1.9), per tant,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{x^4 + 16} dx = 2\pi i \left[\text{res}_{z=2e^{i\pi/4}} \left(\frac{z^2}{z^4 + 16} \right) + \text{res}_{z=2e^{i3\pi/4}} \left(\frac{z^2}{z^4 + 16} \right) \right].$$

Si fem servir el mètode de l'exemple 5.2 obtenim

$$\text{res}_{z=2e^{i\pi/4}} \left(\frac{z^2}{z^4 + 16} \right) = \frac{z^2}{4z^3} \Big|_{z=2e^{i\pi/4}} = \frac{1}{8e^{i\pi/4}} = \frac{e^{i7\pi/4}}{8},$$

i similarment,

$$\text{res}_{z=2e^{i3\pi/4}} \left(\frac{z^2}{z^4 + 16} \right) = \frac{e^{i5\pi/4}}{8}.$$

Així doncs,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{x^4 + 16} dx = 2\pi i \frac{e^{i7\pi/4} + e^{i5\pi/4}}{8} = 2\pi i \frac{1 - i - 1 - i}{8\sqrt{2}} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

Integrals del tipus $\int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \begin{matrix} \cos ax \\ \sin ax \end{matrix} \right\} f(x) dx$

Si a és real i positiu, $f(x)$ és real, $f(z)$ no té cap singularitat a $\mathbb{R}$ i es compleix que

$$\lim_{z \rightarrow \infty} |f(z)| = 0 \quad \text{en el semiplà } \operatorname{Im} z > 0, \quad (5.6)$$

aleshores

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \begin{matrix} \cos ax \\ \sin ax \end{matrix} \right\} f(x) dx = \left\{ \begin{matrix} \operatorname{Re} \\ \operatorname{Im} \end{matrix} \right\} \left[2\pi i \left(\begin{matrix} \text{suma de tots els residus de} \\ e^{iaz} f(z) \\ \text{en el semiplà } \operatorname{Im} z > 0 \end{matrix} \right) \right] \quad (5.7)$$

DEMOSTRACIÓ: Sigui C el contorn tancat de la figura 5.2. Considerem la integral

$$\oint_C e^{iaz} f(z) dz = \int_{-R}^R e^{iax} f(x) dx + \int_{C_R} e^{iaz} f(z) dz.$$

Com en el cas anterior, si usem el teorema dels residus i parametritzem el contorn C_R amb $z = Re^{i\theta}$, $\theta \in [0, \pi]$, $dz = Re^{i\theta} i d\theta$, tenim

$$\begin{aligned} 2\pi i \left(\begin{matrix} \text{suma dels residus} \\ \text{de } e^{iaz} f(z) \\ \text{a l'interior de } C \end{matrix} \right) \\ = \int_{-R}^R e^{iax} f(x) dx + \int_0^\pi e^{iaRe^{i\theta}} f(Re^{i\theta}) Re^{i\theta} i d\theta, \end{aligned} \quad (5.8)$$

i en el límit $R \rightarrow \infty$ tenim

$$2\pi i \left(\begin{matrix} \text{suma de tots els residus de} \\ e^{iaz} f(z) \\ \text{en el semiplà } \operatorname{Im} z > 0 \end{matrix} \right) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{iax} f(x) dx, \quad (5.9)$$

ja que la integral sobre C_R tendeix a zero en aquest límit. En efecte,

$$\left| \int_{C_R} e^{iaz} f(z) dz \right| \leq \int_{C_R} |e^{iaz}| |f(z)| |dz| = \int_0^\pi e^{-aR \sin \theta} |f(Re^{i\theta})| R d\theta.$$

La condició (5.6) ens assegura que per a tot $\epsilon > 0$ existeix M tal que, si $R > M$, llavors $|f(Re^{i\theta})| < a\epsilon/\pi$. Així doncs,

$$\left| \int_{C_R} e^{iaz} f(z) dz \right| < \frac{a\epsilon R}{\pi} \int_0^\pi e^{-aR \sin \theta} d\theta = \frac{a\epsilon R}{\pi} 2 \int_0^{\pi/2} e^{-aR \sin \theta} d\theta,$$

ja que a l'interval $[0, \pi]$ la funció $\sin \theta$ té una gràfica simètrica respecte del punt central $\pi/2$. Notem ara que a l'interval $[0, \pi/2]$ es compleix que $\sin \theta \geq 2\theta/\pi$ (vegeu la figura 5.3) i, per tant, $e^{-aR \sin \theta} \leq e^{-2aR\theta/\pi}$, ja que $aR > 0$. Tenim, doncs,

$$\left| \int_{C_R} e^{iaz} f(z) dz \right| < \frac{a\epsilon R}{\pi} 2 \int_0^{\pi/2} e^{-2aR\theta/\pi} d\theta.$$

El valor de la darrera integral és $\int_0^{\pi/2} e^{-2aR\theta/\pi} d\theta = \pi(1 - e^{-aR})/(2aR)$. Així, arribem finalment a

$$\left| \int_{C_R} e^{iaz} f(z) dz \right| < \epsilon (1 - e^{-aR}) < \epsilon,$$

si R és suficientment gran. Això demostra que

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} e^{iaz} f(z) dz = 0$$

i demostra, per tant, la igualtat (5.9).

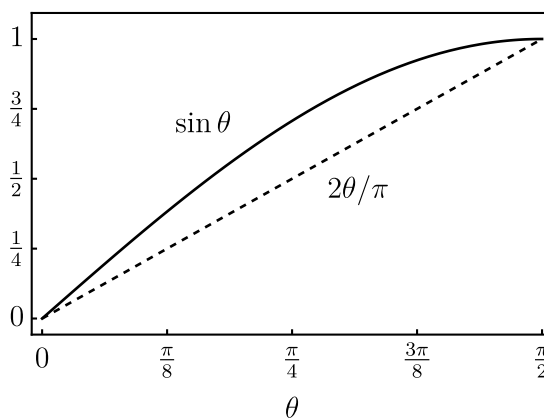


Figura 5.3: A l'interval $[0, \pi/2]$ es compleix que $\sin \theta \geq 2\theta/\pi$.

Com que $\cos(ax)$ i $\sin(ax)$ són, respectivament, la part real i la part imaginària de e^{iax} , i la funció $f(x)$ és real, les dues integrals $\int_{-\infty}^{\infty} \cos(ax) f(x) dx$ i $\int_{-\infty}^{\infty} \sin(ax) f(x) dx$ s'obtenen prenent, respectivament, la part real i la part imaginària de (5.9). Això demostra la igualtat (5.7).

◇

Exemple 5.4 Calculem

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x}{x^4 + 16} dx.$$

Clarament $z/(z^4 + 16)$ satisfà les condicions per poder aplicar el mètode. Com en l'exemple anterior, els dos únics pols (simples) de l'integrand que es troben al pla $\text{Im } z > 0$ són $2e^{i\pi/4}$ i $2e^{i3\pi/4}$. Si procedim com a l'exemple 5.3 obtenim

$$\text{res}_{z=2e^{i\pi/4}} \left(\frac{ze^{iz}}{z^4 + 16} \right) = \frac{e^{\sqrt{2}(-1+i)}}{16i}, \quad \text{res}_{z=2e^{i3\pi/4}} \left(\frac{ze^{iz}}{z^4 + 16} \right) = \frac{e^{\sqrt{2}(-1-i)}}{-16i}.$$

Així doncs,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x}{x^4 + 16} dx &= \text{Im} \left\{ 2\pi i \frac{e^{\sqrt{2}(-1+i)} - e^{\sqrt{2}(-1-i)}}{16i} \right\} \\ &= \frac{\pi e^{-\sqrt{2}}}{8} \text{Im} \left\{ e^{i\sqrt{2}} - e^{-i\sqrt{2}} \right\} = \frac{\pi e^{-\sqrt{2}}}{4} \sin(\sqrt{2}). \end{aligned}$$

Integrals del tipus

$$\int_0^{2\pi} f(\cos \theta, \sin \theta) d\theta$$

Si $f(\cos \theta, \sin \theta)$ no té singularitats a l'interval $0 \leq \theta \leq 2\pi$ de la recta real, aleshores

$$\int_0^{2\pi} f(\cos \theta, \sin \theta) d\theta = 2\pi i \left[\begin{array}{l} \text{suma de tots els residus de} \\ \frac{1}{iz} f\left(\frac{z+z^{-1}}{2}, \frac{z-z^{-1}}{2i}\right) \\ \text{a l'interior del cercle } |z| < 1 \end{array} \right] \quad (5.10)$$

DEMOSTRACIÓ: Considerem la integral

$$\oint_C f\left(\frac{z+z^{-1}}{2}, \frac{z-z^{-1}}{2i}\right) \frac{dz}{iz},$$

on C és la circumferència de radi 1, centrada a l'origen, que es mostra a la figura 5.4.

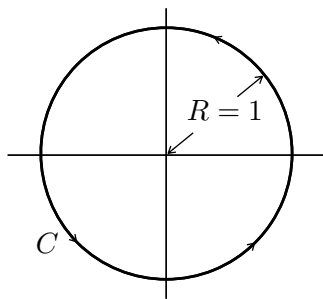


Figura 5.4: Contorn emprat en el càlcul d'integrals del tipus $\int_0^{2\pi} f(\cos \theta, \sin \theta) d\theta$ pel mètode dels residus.

Si fem servir el teorema dels residus tenim

$$\oint_C f\left(\frac{z+z^{-1}}{2}, \frac{z-z^{-1}}{2i}\right) \frac{dz}{iz} = 2\pi i \left[\begin{array}{l} \text{suma de tots els residus de} \\ \frac{1}{iz} f\left(\frac{z+z^{-1}}{2}, \frac{z-z^{-1}}{2i}\right) \\ \text{a l'interior del cercle } |z| < 1 \end{array} \right],$$

i si parametritzem el contorn C amb $z = e^{i\theta}$, $\theta \in [0, 2\pi]$, $dz = e^{i\theta} i d\theta$, tenim

$$\begin{aligned} \oint_C f\left(\frac{z+z^{-1}}{2}, \frac{z-z^{-1}}{2i}\right) \frac{dz}{iz} &= \int_0^{2\pi} f\left(\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}\right) \frac{e^{i\theta} i d\theta}{ie^{i\theta}} \\ &= \int_0^{2\pi} f(\cos \theta, \sin \theta) d\theta, \end{aligned}$$

on hem usat les fórmules d'Euler (1.13). Això demostra la igualtat (5.10).

◇

Exemple 5.5 Calculem

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{\cos(2\theta)}{5 + 4 \cos \theta} d\theta.$$

El mètode descrit equival a fer el canvi $e^{i\theta} = z$ directament a la integral. Obtenim

$$I = \oint_C \frac{(z^2 + z^{-2})/2}{5 + 2(z + z^{-1})} \frac{dz}{iz},$$

on C és la circumferència $|z| = 1$ recorreguda en sentit antihorari. Aquesta expressió es pot simplificar i escriure com

$$I = \oint_C \frac{z^4 + 1}{5z + 2(z^2 + 1)} \frac{dz}{2iz^2} = \oint_C \frac{z^4 + 1}{(z + 2)(z + 1/2)z^2} \frac{dz}{4i}.$$

Només els pols a $z = 0$ (doble) i a $z = -1/2$ (simple) hi contribueixen, ja que $z = -2$ no és a l'interior del contorn. Si anomenem $f(z)$ l'integrand, els seus residus són

$$\begin{aligned} \operatorname{res}_{z=0} f(z) &= \lim_{z \rightarrow 0} \left\{ \frac{d}{dz} [z^2 f(z)] \right\} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{4i} \left[\frac{z^4 + 1}{(z + 2)(z + 1/2)} \right]' = \frac{5i}{8}, \\ \operatorname{res}_{z=-1/2} f(z) &= \lim_{z \rightarrow -1/2} [(z + 1/2)f(z)] = \lim_{z \rightarrow -1/2} \frac{z^4 + 1}{(z + 2)z^2} = -\frac{17i}{24}. \end{aligned}$$

Llavors, si apliquem el teorema dels residus obtenim

$$I = 2\pi i \left(\frac{5i}{8} - \frac{17i}{24} \right) = \frac{\pi}{6}.$$

Integrals del tipus $\int_0^\infty x^{-\alpha} f(x) dx$

Si $\alpha \in \mathbb{R}$ amb $\alpha < 1$, $f(z)$ no té singularitats a l'interval $[0, \infty)$ de la recta real i es compleix que

$$\lim_{z \rightarrow \infty} |z^{1-\alpha} f(z)| = 0, \quad (5.11)$$

aleshores

$$\int_0^\infty x^{-\alpha} f(x) dx = \frac{\pi e^{i\pi\alpha}}{\sin \pi\alpha} \left[\frac{\text{suma de tots els residus de}}{z^{-\alpha} f(z)} \right] \quad (5.12)$$

DEMOSTRACIÓ: Recordem que $z^{-\alpha} = e^{-\alpha \log z}$ i és, per tant, multivaluada. Escollim la branca del logaritme següent:

$$\log z = \log r + i\theta, \quad \theta \in [0, 2\pi),$$

on $z = re^{i\theta}$. El tall de branca és, per tant, el semieix real positiu $[0, \infty)$.

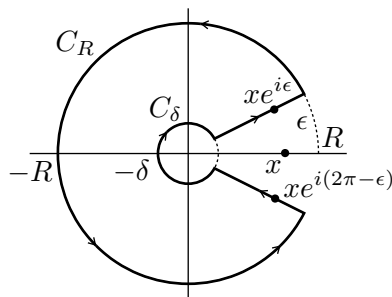


Figura 5.5: Contorn emprat per calcular les integrals del tipus $\int_0^\infty x^{-\alpha} f(x) dx$ amb el mètode dels residus.

Considerem el contorn C de la figura 5.5. Calcularem l'expressió $\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \oint_C z^{-\alpha} f(z) dz$ i farem, després, els límits $\delta \rightarrow 0$, $R \rightarrow \infty$.

Si utilitzem el teorema dels residus, aquesta integral és igual a

$$2\pi i \left(\begin{array}{c} \text{suma dels residus} \\ \text{de } z^{-\alpha} f(z) \\ \text{a l'interior de } C \end{array} \right) \xrightarrow[\epsilon \rightarrow 0^+]{\begin{array}{c} \delta \rightarrow 0 \\ R \rightarrow \infty \end{array}} 2\pi i \left[\begin{array}{c} \text{suma de tots els residus} \\ \text{de } z^{-\alpha} f(z) \end{array} \right].$$

Calculem ara les contribucions a la integral de cadascuna de les parts de C . El segment rectilini superior de C es parametrilitza amb $z = xe^{i\epsilon}$, $x \in [\delta, R]$, $dz = e^{i\epsilon} dx$, i l'inferior amb $z = xe^{i(2\pi-\epsilon)}$, $x \in [\delta, R]$, $dz = e^{i(2\pi-\epsilon)} dx$. En el límit $\epsilon \rightarrow 0^+$, la suma de les integrals sobre aquests segments és

$$\int_\delta^R x^{-\alpha} f(x) dx + \int_R^\delta (xe^{i2\pi})^{-\alpha} f(x) dx = (1 - e^{-i2\pi\alpha}) \int_\delta^R x^{-\alpha} f(x) dx \xrightarrow[\epsilon \rightarrow 0^+]{\begin{array}{c} \delta \rightarrow 0 \\ R \rightarrow \infty \end{array}} 2ie^{-i\pi\alpha} \sin(\pi\alpha) \int_0^\infty x^{-\alpha} f(x) dx.$$

Pel que fa a la contribució de C_R , parametrilitzem el contorn amb $z = Re^{i\theta}$, $\theta \in [0, 2\pi]$ (en el límit $\epsilon \rightarrow 0^+$) i $dz = Re^{i\theta} i d\theta$. Llavors tenim

$$\left| \int_{C_R} z^{-\alpha} f(z) dz \right| \leq \int_{C_R} |z|^{-\alpha} |f(z)| |dz| = \int_0^{2\pi} R^{1-\alpha} |f(Re^{i\theta})| d\theta \xrightarrow[R \rightarrow \infty]{} 0,$$

degut a la condició (5.11).

Finalment, parametritzem C_δ amb $z = \delta e^{i\theta}$, $\theta \in [0, 2\pi]$ (en el límit $\epsilon \rightarrow 0^+$) i $dz = \delta e^{i\theta} i d\theta$. Com que $f(z)$ no té singularitats sobre $[0, \infty)$, és analítica a $z = 0$ i també és analítica (i, per tant, contínua) en algun entorn d'aquest punt. Si triem δ prou petit perquè C_δ estigui dins d'aquest entorn, $|f(z)|$ tindrà un màxim M sobre els punts de C_δ . Llavors tenim

$$\left| \int_{C_\delta} z^{-\alpha} f(z) dz \right| \leq \int_0^{2\pi} \delta^{1-\alpha} |f(\delta e^{i\theta})| d\theta \leq 2\pi M \delta^{1-\alpha} \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} 0,$$

ja que per hipòtesi $0 < \alpha < 1$.

Així doncs, si sumem les contribucions dels segments rectilinis, de C_R i de C_δ , i igualem el resultat amb l'obtingut amb el teorema dels residus (en el límit $\delta \rightarrow 0$, $R \rightarrow \infty$), arribem a

$$2ie^{-i\pi\alpha} \sin(\pi\alpha) \int_0^\infty x^{-\alpha} f(x) dx = 2\pi i \left[\begin{array}{c} \text{suma de tots els residus} \\ \text{de } z^{-\alpha} f(z) \end{array} \right],$$

d'on es dedueix la igualtat (5.12).

◇

Exemple 5.6 Calculem

$$I(s) = \int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{x^2 + x + 1} dx, \quad s \in \mathbb{R}.$$

Les condicions per poder aplicar el mètode se satisfan si $0 < s < 2$. Sigui $f(z) = 1/(z^2 + z + 1)$, que té pols simples als punts $e^{i2\pi/3}$ i $e^{i4\pi/3}$ (figura 5.6). Notem que hem escollit els arguments dins l'interval $[0, 2\pi)$, consistentment amb l'elecció de branca de z^{s-1} . Calculem els residus:

$$\begin{aligned} \operatorname{res}_{z=e^{i\frac{2\pi}{3}}} [z^{s-1} f(z)] &= \lim_{z \rightarrow e^{i\frac{2\pi}{3}}} \frac{z^{s-1}}{z - e^{i\frac{4\pi}{3}}} = \frac{e^{i\frac{2(s-1)\pi}{3}}}{e^{i\frac{2\pi}{3}} - e^{i\frac{4\pi}{3}}} = \frac{e^{i\frac{2(s-1)\pi}{3}}}{\sqrt{3}i}, \\ \operatorname{res}_{z=e^{i\frac{4\pi}{3}}} [z^{s-1} f(z)] &= \lim_{z \rightarrow e^{i\frac{4\pi}{3}}} \frac{z^{s-1}}{z - e^{i\frac{2\pi}{3}}} = \frac{e^{i\frac{4(s-1)\pi}{3}}}{e^{i\frac{4\pi}{3}} - e^{i\frac{2\pi}{3}}} = -\frac{e^{i\frac{4(s-1)\pi}{3}}}{\sqrt{3}i}. \end{aligned}$$

Tenim, doncs,

$$\begin{aligned} I(s) &= \frac{\pi e^{i(1-s)\pi}}{\sin[(1-s)\pi]} \frac{e^{i\frac{2(s-1)\pi}{3}} - e^{i\frac{4(s-1)\pi}{3}}}{\sqrt{3}i} \\ &= -\frac{2\pi e^{-i\frac{3(s-1)\pi}{3}}}{\sqrt{3}\sin(s\pi)} \frac{e^{i\frac{4(s-1)\pi}{3}} - e^{i\frac{2(s-1)\pi}{3}}}{2i} \\ &= -\frac{2\pi \sin[(s-1)\pi/3]}{\sqrt{3}\sin(s\pi)}. \end{aligned}$$

Així doncs,

$$I(s) = \int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{x^2 + x + 1} dx = \frac{2\pi \sin[(1-s)\pi/3]}{\sqrt{3}\sin(s\pi)}, \quad 0 < s < 2.$$

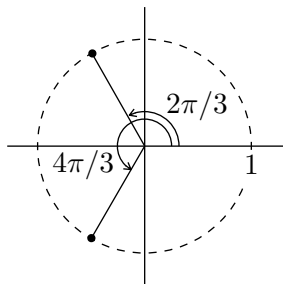


Figura 5.6: Singularitats (pols simples) de $f(z) = 1/(z^2 + z + 1)$.

Integrals del tipus $\int_0^\infty f(x) dx$

Si $f(z)$ no té singularitats a $[0, \infty)$ i es compleix que

$$\lim_{z \rightarrow \infty} |zf(z) \log z| = 0, \quad (5.13)$$

aleshores

$$\int_0^\infty f(x) dx = - \left[\begin{array}{c} \text{suma de tots els residus de} \\ f(z) \log z \end{array} \right] \quad (5.14)$$

DEMOSTRACIÓ: La demostració és similar a la del cas anterior i utilitza el mateix contorn C de la figura 5.5. Considerem la integral

$\oint_C f(z) \log z \, dz$, on escollim la branca

$$\log z = \log r + i\theta, \quad \theta \in [0, 2\pi),$$

del logaritme (el tall de branca és, per tant, el semieix real positiu).

Si usem el teorema dels residus, en el límit $\epsilon \rightarrow 0^+$, $\delta \rightarrow 0$, $R \rightarrow \infty$ aquesta integral és

$$\oint_C f(z) \log z \, dz = 2\pi i \left[\begin{array}{c} \text{suma de tots els residus de} \\ f(z) \log z \end{array} \right].$$

Calculem ara les contribucions a la integral de cadascuna de les parts de C . Els segments rectilinis de C es parametritzem com en el cas anterior. El superior amb $z = xe^{i\epsilon}$, $x \in [\delta, R]$, $dz = e^{i\epsilon} dx$ (per tant, $\log z = \log x + i\epsilon$) i l'inferior amb $z = xe^{i(2\pi-\epsilon)}$, $x \in [\delta, R]$, $dz = e^{i(2\pi-\epsilon)} dx$ (per tant, $\log z = \log x + i(2\pi - \epsilon)$). En el límit $\epsilon \rightarrow 0^+$, la suma de les integrals sobre aquests segments és

$$\begin{aligned} \int_{\delta}^R f(x) \log x \, dx + \int_R^{\delta} f(x) (\log x + 2\pi i) \, dx \\ = -2\pi i \int_{\delta}^R f(x) \, dx \xrightarrow[R \rightarrow \infty]{\delta \rightarrow 0} -2\pi i \int_0^{\infty} f(x) \, dx. \end{aligned}$$

La condició (5.13) garanteix que la contribució de C_R sigui nul·la en al límit $R \rightarrow \infty$, ja que si parametritzem el contorn amb $z = Re^{i\theta}$, $\theta \in [0, 2\pi]$ (en el límit $\epsilon \rightarrow 0^+$) i $dz = Re^{i\theta} i \, d\theta$, tenim

$$\begin{aligned} \left| \int_{C_R} f(z) \log z \, dz \right| &\leq \int_{C_R} |f(z)| |\log z| |dz| \\ &= \int_0^{2\pi} |f(Re^{i\theta})| |\log R + i\theta| R \, d\theta \xrightarrow[R \rightarrow \infty]{} 0. \end{aligned}$$

La contribució de C_{δ} també és nul·la en el límit $\delta \rightarrow 0$, ja que en parametritzar el contorn amb $z = \delta e^{i\theta}$, $\theta \in [0, 2\pi]$ (en el límit $\epsilon \rightarrow 0^+$) i $dz = \delta e^{i\theta} i \, d\theta$, tenim

$$\begin{aligned} \left| \int_{C_{\delta}} f(z) \log z \, dz \right| &\leq \int_0^{2\pi} |f(\delta e^{i\theta})| |\log \delta + i\theta| \delta \, d\theta \\ &\leq 2\pi M |\log \delta + i2\pi| \delta \xrightarrow[\delta \rightarrow 0]{} 0. \end{aligned}$$

Si sumem totes les contribucions i igualem el resultat amb l'obtingut amb el teorema dels residus arribem a

$$-2\pi i \int_0^\infty f(x) dx = 2\pi i \left[\begin{array}{c} \text{suma de tots els residus} \\ \text{de } f(z) \log z \end{array} \right],$$

d'on es dedueix la igualtat (5.14).

◇

Exemple 5.7 Calculem

$$J = \int_0^\infty \frac{dx}{x^2 + x + 1}.$$

És un cas particular de la integral de l'exemple 5.6

$$J = \lim_{s \rightarrow 1} I(s) = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}},$$

però la calcularem emprant (5.14).

Les singularitats de l'integrand són els pols simples de la figura 5.6. Els residus que cal calcular són

$$\begin{aligned} \operatorname{res}_{z=e^{i\frac{2\pi}{3}}} [f(z) \log z] &= \lim_{z \rightarrow e^{i\frac{2\pi}{3}}} \frac{\log z}{z - e^{i\frac{4\pi}{3}}} = \frac{i2\pi/3}{e^{i\frac{2\pi}{3}} - e^{i\frac{4\pi}{3}}} = \frac{2\pi/3}{\sqrt{3}}, \\ \operatorname{res}_{z=e^{i\frac{4\pi}{3}}} [f(z) \log z] &= \lim_{z \rightarrow e^{i\frac{4\pi}{3}}} \frac{\log z}{z - e^{i\frac{2\pi}{3}}} = \frac{i4\pi/3}{e^{i\frac{4\pi}{3}} - e^{i\frac{2\pi}{3}}} = -\frac{4\pi/3}{\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

Si fem servir (5.14) obtenim

$$J = -\left(\frac{2\pi/3}{\sqrt{3}} - \frac{4\pi/3}{\sqrt{3}} \right) = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}.$$

Integrals del tipus $\boxed{\int_0^\infty f(x) \log x dx}$

Si $f(x)$ és real a $[0, \infty)$, $f(z)$ no té singularitats a $[0, \infty)$ i es compleix que

$$\lim_{z \rightarrow \infty} |zf(z)(\log z)^2| = 0 \quad (5.15)$$

aleshores

$$\boxed{\int_0^\infty f(x) \log x dx = -\frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[\begin{array}{c} \text{suma de tots els residus de} \\ f(z) (\log z)^2 \end{array} \right]} \quad (5.16)$$

DEMOSTRACIÓ: La demostració segueix exactament els mateixos passos que les dues anteriors, i fem servir també el contorn C de la figura 5.5 (i les mateixes parametritzacions) en el càlcul de la integral $\oint_C f(z) (\log z)^2 dz$.

En el límit $\epsilon \rightarrow 0^+$, $\delta \rightarrow 0$, $R \rightarrow \infty$, utilitzem el teorema dels residus i tenim

$$\oint_C f(z) (\log z)^2 dz = 2\pi i \left[\begin{array}{c} \text{suma de tots els residus de} \\ f(z) (\log z)^2 \end{array} \right].$$

Les contribucions dels segments rectilinis de C són:

$$\begin{aligned} & \int_{\delta}^R f(x) (\log x)^2 dx + \int_R^{\delta} f(x) (\log x + i2\pi)^2 dx \\ &= -4\pi i \int_{\delta}^R f(x) \log x dx + 4\pi^2 \int_{\delta}^R f(x) dx \\ & \xrightarrow[\substack{\delta \rightarrow 0 \\ R \rightarrow \infty}]{} -4\pi i \int_0^{\infty} f(x) \log x dx + 4\pi^2 \int_0^{\infty} f(x) dx. \end{aligned}$$

La contribució de C_R és nul·la en el límit $R \rightarrow \infty$ degut a la condició (5.15), ja que

$$\begin{aligned} \left| \int_{C_R} f(z) (\log z)^2 dz \right| &\leq \int_{C_R} |f(z)| |\log z|^2 |dz| \\ &= \int_0^{2\pi} |f(Re^{i\theta})| |\log R + i\theta|^2 R d\theta \xrightarrow[R \rightarrow \infty]{} 0. \end{aligned}$$

La contribució de C_{δ} també és nul·la en el límit $\delta \rightarrow 0$, ja que

$$\begin{aligned} \left| \int_{C_{\delta}} f(z) (\log z)^2 dz \right| &\leq \int_0^{2\pi} |f(\delta e^{i\theta})| |\log \delta + i\theta|^2 \delta d\theta \\ &\leq 2\pi M |\log \delta + i2\pi|^2 \delta \xrightarrow[\delta \rightarrow 0]{} 0. \end{aligned}$$

Si sumem totes les contribucions i igualem el resultat amb l'obtingut amb el teorema dels residus arribem a

$$\begin{aligned} & -4\pi i \int_0^{\infty} f(x) \log x dx + 4\pi^2 \int_0^{\infty} f(x) dx \\ &= 2\pi i \left[\begin{array}{c} \text{suma de tots els residus de} \\ f(z) (\log z)^2 \end{array} \right], \end{aligned}$$

i en dividir per $-4\pi i$ obtenim

$$\int_0^\infty f(x) \log x \, dx + i\pi \int_0^\infty f(x) \, dx = -\frac{1}{2} \left[\begin{array}{c} \text{suma de tots els residus de} \\ f(z) \log^2 z \end{array} \right].$$

Com que, per hipòtesi, $f(x)$ és real a $[0, \infty)$, en agafar la part real de la igualtat anterior obtenim la igualtat (5.16). Si prenem la part imaginària obtenim el resultat addicional

$$\int_0^\infty f(x) \, dx = -\frac{1}{2\pi} \operatorname{Im} \left[\begin{array}{c} \text{suma de tots els residus de} \\ f(z) (\log z)^2 \end{array} \right].$$

◇

Exemple 5.8 Calculem

$$1) \ K = \int_0^\infty \frac{\log x}{x^2 + x + 1} \, dx \qquad 2) \ L = \int_0^\infty \frac{\log^2 x}{x^2 + x + 1} \, dx$$

Aquestes integrals es poden calcular directament fent servir el mètode descrit, però també es poden obtenir a partir del resultat de l'exemple 5.6. Observem que la integral $I(s)$ defineix una funció analítica a la regió $0 < \operatorname{Re} s < 2$ del pla complex s ,

$$I(s) = \int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{x^2 + x + 1} \, dx, \quad 0 < \operatorname{Re} s < 2. \quad (5.17)$$

Com que en el càlcul de l'exemple 5.6 enlloc es fa servir que s hagi de ser real, en aquesta regió tenim la identitat

$$I(s) = \frac{2\pi \sin[(1-s)\pi/3]}{\sqrt{3} \sin(s\pi)} = \frac{2\pi \sin[(s-1)\pi/3]}{\sqrt{3} \sin[(s-1)\pi]}, \quad 0 < \operatorname{Re} s < 2. \quad (5.18)$$

És fàcil calcular els primers termes de la seva sèrie de Taylor al voltant de $s = 1$:

$$\begin{aligned} I(s) &= \frac{(2\pi^2/3)(s-1) [1 - (s-1)^2\pi^2/(6 \cdot 3^2) + \dots]}{\sqrt{3}\pi(s-1) [1 - (s-1)^2\pi^2/6 + \dots]} \\ &= \frac{2\pi}{3\sqrt{3}} \left[1 + \frac{\pi^2}{6} \left(1 - \frac{1}{9} \right) (s-1)^2 + \dots \right] \\ &= \frac{2\pi}{3\sqrt{3}} + 0(s-1) + \frac{8\pi^3}{81\sqrt{3}}(s-1)^2 + \dots \end{aligned}$$

En un entorn de $s = 1$ podem intercanviar les operacions derivació respecte de s i integració respecte de x a (5.17) i immediatament deduïm que

$$J = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}, \quad K = 0, \quad L = \frac{16\pi^3}{81\sqrt{3}}.$$

Notem que l'expressió de la dreta de (5.18) permet estendre analíticament $I(s)$ al domini

$$\mathbb{C} - \{\dots, -7, -6, -4, -3, -1, 0, 2, 3, 5, 6, 8, 9, \dots\},$$

on la llista no inclou els enters de la forma $3m + 1$, ja que en aquests punts l'extensió de $I(s)$ és analítica (té singularitats evitables).

5.4 Suma de sèries numèriques pel mètode dels residus

El teorema dels residus també és útil per sumar alguns tipus de sèries numèriques tal com mostra el teorema següent.

Teorema 5.2 (Suma de sèries) *Si $f(z)$ té un nombre finit de pols (cap d'ells a $z = n \in \mathbb{Z}$) i es compleix $|f(z)| \leq M/|z|^k$ on M és una constant i $k > 1$, aleshores*

- 1) $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n) = - \left[\begin{array}{c} \text{suma dels residus de } \pi \cot(\pi z) f(z) \\ \text{als pols de } f(z) \end{array} \right],$
- 2) $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n f(n) = - \left[\begin{array}{c} \text{suma dels residus de } \pi \csc(\pi z) f(z) \\ \text{als pols de } f(z) \end{array} \right],$
- 3) $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f\left(n + \frac{1}{2}\right) = - \left[\begin{array}{c} \text{suma dels residus de } \pi \tan(\pi z) f(z) \\ \text{als pols de } f(z) \end{array} \right],$
- 4) $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n f\left(n + \frac{1}{2}\right) = - \left[\begin{array}{c} \text{suma dels residus de } \pi \sec(\pi z) f(z) \\ \text{als pols de } f(z) \end{array} \right].$

DEMOSTRACIÓ: Únicament demostrarem la primera igualtat (la demostració de les altres és molt semblant). Per fer-ho, considerem la integral

$$\oint_{C_N} \pi \cot(\pi z) f(z) dz, \quad (5.19)$$

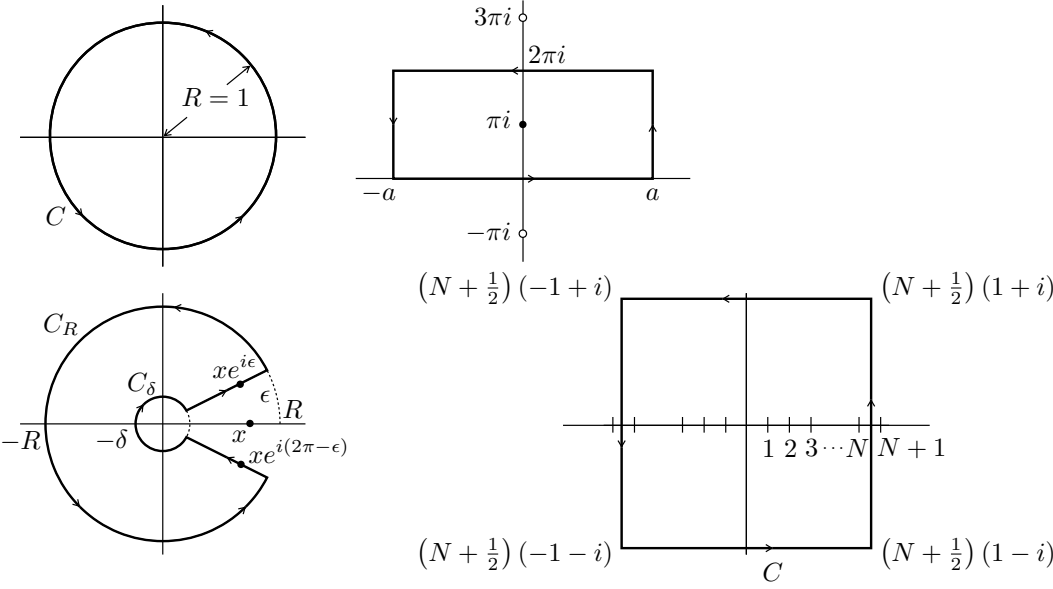


Figura 5.7: Contorn del teorema 5.2.

on C_N és el contorn quadrat de la figura 5.7 definit per les rectes $x = \pm(N + 1/2)$ i $y = \pm(N + 1/2)$, on $N \in \mathbb{N}$.

Calculem la integral (5.19) usant el teorema dels residus. Les singularitats de $\pi \cot(\pi z)f(z)$ són els pols simples de $\cot(\pi z)$, que són a $z = n \in \mathbb{Z}$, i els pols de $f(z)$ (cap d'ells a $z = n$, per hipòtesi).

Els residus de $\pi \cot(\pi z)f(z)$ a $z = n$ (els pols simples de $\cot(\pi z)$) són

$$k_n = \lim_{z \rightarrow n} [\pi \cot(\pi z)f(z)(z - n)] = f(n)$$

i, per tant,

$$\oint_{C_N} \pi \cot(\pi z)f(z)dz = 2\pi i \left[\sum_{n=-N}^N f(n) + \left(\begin{array}{l} \text{suma dels residus de} \\ \pi \cot(\pi z)f(z) \text{ als pols} \\ \text{de } f(z) \text{ interiors a } C_N \end{array} \right) \right].$$

En el límit $N \rightarrow \infty$ tenim

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \oint_{C_N} \cot(\pi z)f(z)dz = 2i \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) + \left(\begin{array}{l} \text{suma dels residus de} \\ \pi \cot(\pi z)f(z) \text{ als pols} \\ \text{de } f(z) \end{array} \right) \right].$$

Demostrem, tot seguit, que el terme de l'esquerra de la igualtat anterior és nul, la qual cosa ens porta al primer resultat del teorema 5.2.

Per veure que $\lim_{N \rightarrow \infty} \oint_{C_N} \cot(\pi z)f(z)dz = 0$, comprovem, primer, que existeix A , independent de N , tal que $|\cot(\pi z)| < A$. En efecte, considerem separatament les parts del contorn C_N en les quals $y > 1/2$, $y < -1/2$ i $-1/2 \leq y \leq 1/2$.

Quan $y > 1/2$ tenim

$$\begin{aligned} |\cot(\pi z)| &= \left| \frac{e^{-i\pi z} + e^{i\pi z}}{e^{i\pi z} - e^{-i\pi z}} \right| \leq \frac{|e^{-i\pi z}| + |e^{i\pi z}|}{||e^{-i\pi z}| - |e^{i\pi z}||} \\ &= \frac{e^{\pi y} + e^{-\pi y}}{e^{\pi y} - e^{-\pi y}} = \frac{1 + e^{-2\pi y}}{1 - e^{-2\pi y}} < \frac{1 + e^{-\pi}}{1 - e^{-\pi}} \stackrel{\text{def}}{=} A. \end{aligned}$$

La desigualtat $|\cot(\pi z)| \leq A$ també se satisfà quan $y < -1/2$, ja que $|\cot(\pi z)|$ és una funció parella.

Finalment, quan $-1/2 \leq y \leq 1/2$, els punts de C_N són de la forma $z = \pm(N + 1/2) + iy$ (vegeu la figura 5.7) i tenim

$$\begin{aligned} \left| \cot \pi \left[\pm \left(N + \frac{1}{2} \right) + iy \right] \right| &= \left| \frac{\cos \pi \left[\pm \left(N + \frac{1}{2} \right) + iy \right]}{\sin \pi \left[\pm \left(N + \frac{1}{2} \right) + iy \right]} \right| \\ &= \left| \frac{\cos [\pm \pi (N + \frac{1}{2})] \cosh \pi y - i \sin [\pm \pi (N + \frac{1}{2})] \sinh \pi y}{\sin [\pm \pi (N + \frac{1}{2})] \cosh \pi y + i \cos [\pm \pi (N + \frac{1}{2})] \sinh \pi y} \right|, \end{aligned}$$

i com que $\cos[\pi(\pm N \pm 1/2)] = 0$ i els valors de $\sin[\pi(\pm N \pm 1/2)]$ són sempre ± 1 tenim

$$\begin{aligned} \left| \cot \pi \left[\pm \left(N + \frac{1}{2} \right) + iy \right] \right| &= \frac{|\sinh \pi y|}{|\cosh \pi y|} = |\tanh \pi y| \\ &\leq \left| \tanh \frac{\pi}{2} \right| = \frac{e^{\pi/2} - e^{-\pi/2}}{e^{\pi/2} + e^{-\pi/2}} = \frac{1 - e^{-\pi}}{1 + e^{-\pi}} \leq \frac{1 + e^{-\pi}}{1 - e^{-\pi}} = A. \end{aligned}$$

Així doncs, com que $|\cot(\pi z)| \leq A$ sobre el contorn C_N i, d'altra banda, $|z| > N$ quan z recorre C_N , tenim

$$\left| \oint_{C_N} \cot(\pi z) f(z) dz \right| \leq \frac{AM}{N^k} (8N + 4) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0,$$

ja que, per hipòtesi, $k > 1$.

◇

Exemple 5.9 Calculem

$$S(s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(3n + s)^2}, \quad s \neq 0, \pm 3, \pm 6, \pm 9, \dots$$

La funció $f(z) = 1/(3z+s)^2$ satisfà clarament les condicions del teorema 5.2. Té un pol doble a $z = s/3$ i el residu que necessitem calcular és

$$\begin{aligned} \operatorname{res}_{z=-s/3} [\pi \cot(\pi z) f(z)] &= \lim_{z \rightarrow -s/3} \left\{ \frac{d}{dz} \left[\left(z + \frac{s}{3} \right)^2 \pi \cot(\pi z) f(z) \right] \right\} \\ &= \lim_{z \rightarrow -s/3} \left\{ \frac{d}{dz} \left[\frac{\pi}{9} \cot(\pi z) \right] \right\} = -\frac{\pi^2}{9} [\csc(-\pi s/3)]^2 = -\frac{\pi^2}{9} [\csc(\pi s/3)]^2. \end{aligned}$$

Per tant,

$$S(s) = \frac{\pi^2}{9} [\csc(\pi s/3)]^2.$$

5.5 Problemes

P5.1 Trobeu els residus a les singularitats de la funció $f(z) = ze^{1/z}/(1+z)$.

P5.2 Calculeu $\oint_C z^2 e^{-1/z} \cos(1/z) dz$, on C és la circumferència $|z| = 1$ recorreguda en sentit positiu (antihorari).

P5.3 Calculeu els residus de les funcions següents als pols corresponents:

- | | | |
|------------------------------|-------------------------------|-------------------------|
| (a) $\frac{z+1}{z^2-2z}$ | (e) $ze^{1/z}$ | (i) $\tanh z$ |
| (b) $\frac{1-e^{2z}}{z^4}$ | (f) $\frac{\pi}{\sin(\pi z)}$ | (j) $\frac{1}{\cosh z}$ |
| (c) $\frac{e^{2z}}{(z-1)^2}$ | (g) $\pi \cot(\pi z)$ | (k) $\Gamma(z)$ |
| (d) $\frac{z^2}{\cos z}$ | (h) $\frac{1}{\sinh z}$ | (l) $\zeta(z)$ |

P5.4 Calculeu les integrals següents:

- | | |
|---|---|
| (a) $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{1+\sin^2 \theta}$ | (d) $\int_0^{\infty} \frac{\cos(ax)}{x^2+1} dx$ |
| (b) $\int_0^{\pi/2} \cos^{2n} \theta d\theta$ | (e) $\int_0^{\infty} \frac{x^\alpha}{x^2+1} dx, 0 < \alpha < 1$ |
| (c) $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^4+1}$ | (f) $\int_0^{\infty} \frac{\log x}{(x^2+1)^2} dx$ |

P5.5 Considereu la integral

$$\oint_C \frac{e^{kz}}{1+e^z} dz,$$

on $0 < k < 1$ i C és el contorn rectangular limitat per les rectes $x = a$, $x = -a$, $y = 0$, $y = 2\pi$, recorregut antihoràriament (figura 5.8).

- Demostreu que en el límit $a \rightarrow \infty$ els costats “verticals” del rectangle no contribueixen a la integral.
- Trobeu la singularitat de l'integrand a l'interior del contorn C . Demostreu que és un pol simple.
- Trobeu el residu de l'integrand en aquest pol.
- Trobeu el valor de la integral real

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{kx}}{1+e^x} dx.$$

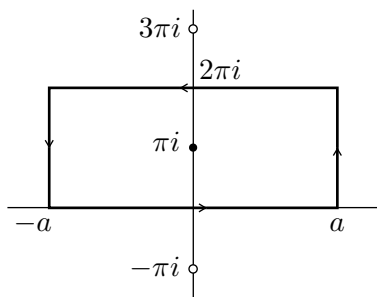


Figura 5.8: Contorn i singularitats del problema **P5.5**.

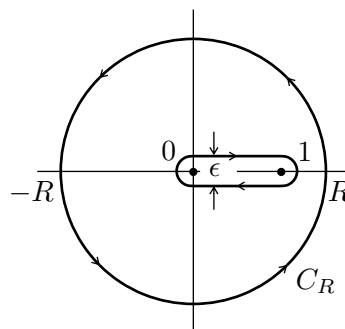


Figura 5.9: Contorn d'integració del problema **P5.8**.

P5.6 Considereu la integral

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{itx}}{2x^2 - itx + t^2} dx,$$

on t és un paràmetre real no nul.

- Dibuixeu clarament el(s) contorn(s) apropiat(s) per avaluar la integral segons quin sigui el valor de t . Dibuixeu també les singularitats de l'integrand.
- Calculeu els residus de les singularitats que hi ha dins del(s) contorn(s) d'integració.
- Trobeu l'expressió final de $f(t)$.

P5.7 Utilitzeu el teorema dels residus per calcular la suma de les sèries numèriques següents:

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 1/4} \quad (b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \quad (c) \frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots$$

P5.8 Avalueu la integral

$$I(s) = \int_0^1 x^{s-1}(1-x)^{-s} dx, \quad 0 < s < 1$$

usant el contorn de la figura 5.9.

P5.9 (a) Demostreu que

$$\Gamma(s)\Gamma(1-s) = I(s)$$

on $I(s)$ és la integral de l'exercici anterior.

(b) Demostreu que $\Gamma(s)$ no té cap zero (no s'anul·la enlloc del pla complex).

El primer apartat és, de fet, un exercici de càlcul en dues variables reals, x i y . Feu el canvi $x = uv$, $y = (1-u)v$.

P5.10 Torneu al problema **P4.14** i avalueu $\zeta(-1)$. En quin sentit es diu a la literatura matemàtica que $1 + 2 + 3 + \dots = -1/12$?

SOLUCIONS

S5.1 $f(z) = ze^{1/z}/(1+z)$ té dues singularitats aïllades: $z = 0$ i $z = -1$.

$z = 0$: Podem trobar el residu de $f(z)$ en aquest punt a partir del desenvolupament en sèrie de potències de z . Tenim dues regions de convergència: $0 < |z| < 1$ i $|z| > 1$. Per trobar el residu a $z = 0$, necessitem el desenvolupament convergent a la corona més interna, és a dir, $0 < |z| < 1$.

La funció $f(z)$ té 3 factors, els desenvolupaments dels quals són coneguts:

- z , que ja està desenvolupat
- $1/(1+z) = 1 - z + z^2 - z^3 + \dots$, vàlid per a $|z| < 1$
- $e^{1/z} = 1 + z^{-1} + z^{-2}/2! + z^{-3}/3! + \dots$, vàlid per a $z \neq 0$.

Així,

$$f(z) = (z - z^2 + z^3 - z^4 + \dots) \left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} + \frac{1}{3!z^3} + \dots \right).$$

Trobar el desenvolupament que resulta d'aquest producte és complicat i llarg, però per trobar el residu de f només ens cal el coeficient de $1/z$ que és a la suma dels productes de cadascun dels termes del parèntesi de la dreta amb el terme del parèntesi de l'esquerra que té una potència menys, és a dir,

$$\frac{1}{z} \left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + \cdots \right) = \frac{e^{-1}}{z}.$$

Per tant,

$$\operatorname{res}_{z=0} f(z) = 1/e.$$

$z = -1$: En aquest punt $e^{1/z}$ és analítica, mentre que $z/(z+1)$ té un pol simple. Per tant,

$$\operatorname{res}_{z=-1} f(z) = \lim_{z \rightarrow -1} (z+1)f(z) = \lim_{z \rightarrow -1} ze^{1/z} = -1/e.$$

S5.2 L'integrand $z^2 e^{-1/z} \cos(1/z)$ té una singularitat essencial (aïllada) a $z = 0$. Pel teorema dels residus, la integral en el contorn tancat $C : |z| = 1$, és

$$I = \oint_C z^2 e^{-1/z} \cos(1/z) dz = 2\pi i \operatorname{res}_{z=0} [z^2 e^{-1/z} \cos(1/z)].$$

Si desenvolupem l'integrand en sèrie de potències de z obtenim

$$\begin{aligned} z^2 e^{-1/z} \cos(1/z) &= z^2 \left(1 - \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} - \frac{1}{3!z^3} + \cdots \right) \\ &\quad \times \left(1 - \frac{1}{2!z^2} + \frac{1}{4!z^4} + \cdots \right). \end{aligned}$$

El terme $1/z$ d'aquest producte de sèries és

$$\frac{1}{z} \left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} \right) = \frac{1}{3z}.$$

Per tant, $\operatorname{res}_{z=0} [z^2 e^{-1/z} \cos(1/z)] = 1/3$ i la integral és $I = 2\pi i/3$.

S5.3 (a) Com que

$$\frac{z+1}{z^2-2z} = \frac{z+1}{z(z-2)},$$

tenim pols simples a $z = 0$ i $z = 2$, amb residus $-1/2$ i $3/2$, respectivament.

(b) Singularitat a $z = 0$.

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1 - e^{2z}}{z^4} = \frac{1 - [1 + 2z + (2z)^2/2! + (2z)^3/3! + \dots]}{z^4} \\ &= -\frac{2}{z^3} - \frac{4}{2!} \frac{1}{z^2} - \frac{8}{3!} \frac{1}{z} - \frac{16}{4!} - \dots \end{aligned}$$

Per tant,

$$\operatorname{res}_{z=0} f(z) = -\frac{4}{3}.$$

(c) Com que e^{2z} és analítica a tot $\mathbb{C}$ i no té cap zero, $f(z) = e^{2z}/(z-1)^2$ té un pol d'ordre 2 a $z = 1$. Per tant,

$$\operatorname{res}_{z=1} f(z) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{d}{dz} \left[(z-1)^2 e^{2z} \frac{1}{(z-1)^2} \right] = 2e^2.$$

(d) La funció $z^2/\cos z$ té pols simples als punts on $\cos z$ té els zeros (també simples), és a dir, a $z = (k + 1/2)\pi$, amb $k \in \mathbb{Z}$. Com que aquesta funció és de la forma

$$\frac{p(z)}{q(z)}, \quad (5.20)$$

on $p(z)$ és analítica i no nul·la a $z = (k + 1/2)\pi$, i $q(z)$ té zeros simples en aquests punts, per calcular els residus podem utilitzar (vegeu l'exemple 5.2)

$$\operatorname{res}_{z=z_0} \left[\frac{p(z)}{q(z)} \right] = \frac{p(z_0)}{q'(z_0)}.$$

Així doncs,

$$\operatorname{res}_{z=(k+\frac{1}{2})\pi} \left(\frac{z^2}{\cos z} \right) = \frac{(k + 1/2)^2 \pi^2}{-\sin \left[(k + \frac{1}{2}) \pi \right]} = (-1)^{k+1} \left(k + \frac{1}{2} \right)^2 \pi^2.$$

(e) La funció $ze^{1/z}$ té una singularitat essencial a $z = 0$. La seva sèrie en potències de z vàlida en un entorn d'aquest punt és

$$z \left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} + \frac{1}{3!z^3} + \dots \right) = z + 1 + \frac{1}{2!z} + \frac{1}{3!z^2} + \dots$$

i, per tant, el residu és $\operatorname{res}_{z=0} (ze^{1/z}) = 1/2$.

(f) La funció $\pi/\sin(\pi z)$ té pols simples a $z = k$ ($k \in \mathbb{Z}$) perquè el $\sin(\pi z)$ té zeros simples en aquests punts i és de la forma (5.20). Els residus són

$$\operatorname{res}_{z=k} \left[\frac{\pi}{\sin(\pi z)} \right] = \frac{\pi}{\pi \cos(k\pi)} = (-1)^k.$$

(g) La funció $\pi \cot(\pi z) = \pi \cos(\pi z) / \sin(\pi z)$ té pols simples a $z = k$ i també és de la forma (5.20). Per tant,

$$\operatorname{res}_{z=k} [\pi \cot(\pi z)] = \left. \frac{\pi \cos(\pi z)}{\pi \sin(\pi z)} \right|_{z=k} = 1.$$

(h) La funció $1/\sinh z$ té pols simples a $z = k\pi i$ i és de la forma (5.20), per tant,

$$\operatorname{res}_{z=k\pi i} \left(\frac{1}{\sinh z} \right) = \frac{1}{\cosh(k\pi i)} = (-1)^k.$$

(i) La funció $\tanh z = \sinh z / \cosh z$ té singularitats a $z = k\pi i$, i és de la forma (5.20). Tenim, doncs

$$\operatorname{res}_{z=k\pi i} \tanh z = \left. \frac{\sinh z}{\cosh z} \right|_{z=k\pi i} = 1.$$

(j) La funció $1/\cosh z$ té pols simples a $z = (k + 1/2)\pi i$ i també és de la forma (5.20). Per tant,

$$\operatorname{res}_{z=(k+\frac{1}{2})\pi i} \left(\frac{1}{\cosh z} \right) = \frac{1}{\sinh[(k + 1/2)\pi i]} = (-1)^{k+1}i.$$

(k) $\operatorname{res}_{z=-n} \Gamma(z) = (-1)^n/n!$ (vegeu el problema **P4.9**).

(l) $\operatorname{res}_{z=1} \zeta(z) = 1$ (vegeu el problema **P4.14**).

S5.4 (a) Aquesta és una integral del tercer tipus dels descrits a la secció 5.3. Si prenem $z = e^{i\theta}$, $d\theta = dz/(iz)$, tenim $\cos \theta = (z + 1/z)/2$ i $\sin \theta = (z - 1/z)/(2i)$ i la integral es pot expressar

$$I = \oint_C \frac{1}{1 + [(z - 1/z)/(2i)]^2} \frac{dz}{iz} = \oint_C \frac{4iz}{z^4 - 6z^2 + 1} dz,$$

on C és la circumferència $|z| = 1$ recorreguda en sentit positiu. L'integrand té pols on el denominador s'anul·la. Les quatre arrels del denominador són

$$\pm\sqrt{3 + \sqrt{8}} = \pm(\sqrt{2} + 1), \quad \pm\sqrt{3 - \sqrt{8}} = \pm(\sqrt{2} - 1).$$

Són zeros simples del denominador i, per tant, pols simples de l'integrand. Els dos primers són fora del contorn d'integració i no contribueixen a I . Així, observant que l'integrand és de la forma (5.20),

$$\operatorname{res}_{z=\sqrt{2}-1} \left[\frac{4iz}{z^4 - 6z^2 + 1} \right] = \left. \frac{4iz}{z^3 - 12z} \right|_{z=\sqrt{2}-1} = \frac{i}{(\sqrt{2}-1)^2 - 3} = -\frac{i}{2\sqrt{2}}.$$

De forma anàloga trobem

$$\operatorname{res}_{z=1-\sqrt{2}} \left[\frac{4iz}{z^4 - 6z^2 + 1} \right] = -\frac{i}{2\sqrt{2}}.$$

Si apliquem el teorema dels residus tenim

$$I = 2\pi i \left(\frac{-i}{\sqrt{2}} \right)$$

i el resultat final és

$$\boxed{\int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{1 + \sin^2 \theta} = \sqrt{2} \pi}$$

(b) Si procedim com a l'apartat anterior,

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\pi/2} \cos^{2n} \theta \, d\theta = \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \cos^{2n} \theta \, d\theta = \oint_{|z|=1} \frac{dz}{4iz} \left[\frac{z + 1/z}{2} \right]^{2n} \\ &= \frac{\pi i/2}{2^{2n} i} \operatorname{res}_{z=0} \left[\frac{1}{z} \cdot \frac{(z^2 + 1)^{2n}}{z^{2n}} \right]. \end{aligned}$$

L'únic pol, a $z = 0$, és d'ordre $2n + 1$. El seu residu és el coeficient del terme z^{2n} del binomi

$$(z^2 + 1)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n-1} \frac{(2n)!}{k!(2n-k)!} z^{2k},$$

és a dir, $(2n)!/(n!)^2$. Per tant,

$$I = \left(\frac{\pi}{2} \right) \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} = \left(\frac{\pi}{2} \right) \frac{(2n)!!(2n-1)!!}{[(2n)!!]^2} = \left(\frac{\pi}{2} \right) \frac{(2n-1)!!}{2n!!}.$$

$$\boxed{\int_0^{\pi/2} \cos^{2n} \theta \, d\theta = \left(\frac{\pi}{2} \right) \frac{(2n-1)!!}{2n!!}}$$

Si tenim en compte les simetries de les funcions trigonomètriques, veiem que la mateixa integral amb $\sin^{2n} \theta$ té el mateix valor. Així doncs,

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2n} \theta \, d\theta = \int_0^{\pi/2} \cos^{2n} \theta \, d\theta = \left(\frac{\pi}{2} \right) \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} = \left(\frac{\pi}{2} \right) \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n},$$

que són les *fórmules de Wallis*.

(c) La integral

$$I = \int_0^\infty \frac{dx}{1+x^4}$$

és del primer tipus dels descrits a la secció 5.3. Considerarem la integral de contorn

$$\oint_C f(z) dz,$$

on $f(z) = 1/(1+z^4)$ i $C = C_R \cup C_1$ és el contorn de la figura 5.10.

Dels quatre pols simples que té l'integrand, només $e^{i\pi/4}$ i $e^{i3\pi/4}$ són dins del contorn C . Veiem primer que la integral en el contorn C_R no contribueix en el límit en què el radi de la semicircumferència tendeix a ∞ . Sobre C_R parametritzem $z = Re^{i\theta}$, amb $0 \leq \theta < \pi$. Llavors,

$$\begin{aligned} \left| \int_{C_R} \frac{dz}{1+z^4} \right| &= \left| \int_0^\pi \frac{e^{i\theta} i d\theta}{1+R^4 e^{i4\theta}} \right| \\ &\leq \int_0^\pi \frac{d\theta}{|1+R^4 e^{i4\theta}|} \leq \int_0^\pi \frac{d\theta}{|R^4 - 1|} = \frac{\pi}{R^4 - 1} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0, \end{aligned}$$

on hem utilitzat la desigualtat $|a+b| \geq ||a| - |b||$.

Pel que fa a l'altra contribució,

$$\int_{C_1} f(z) dz = 2 \int_0^R \frac{dx}{1+x^4} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 2I,$$

ja que l'integrand és una funció parella. Així doncs,

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} \oint_C f(z) dz = \left(\frac{1}{2} \right) 2\pi i \left[\operatorname{res}_{z=e^{i\pi/4}} \left(\frac{1}{1+z^4} \right) + \operatorname{res}_{z=e^{i3\pi/4}} \left(\frac{1}{1+z^4} \right) \right] \\ &= \pi i \left[\frac{1}{4z^3} \Big|_{z=e^{i\pi/4}} + \frac{1}{4z^3} \Big|_{z=e^{i3\pi/4}} \right] = \frac{\sqrt{2}\pi}{4}, \end{aligned}$$

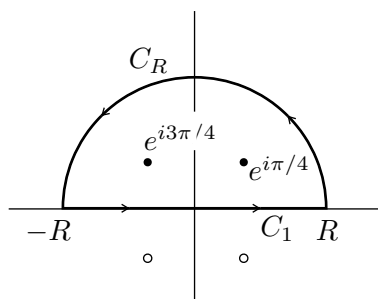


Figura 5.10: Contorn i singularitats del problema **P5.4** (c).

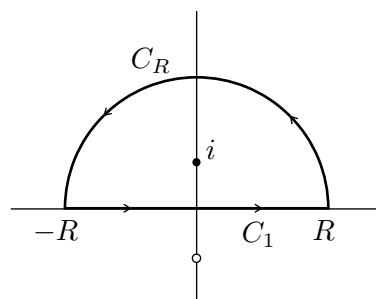


Figura 5.11: Contorn i singularitats del problema **P5.4** (d).

on hem usat que l'integrand és de la forma (5.20). Finalment,

$$\boxed{\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^4} = \frac{\sqrt{2}\pi}{4}}$$

(d) Aquesta integral és del segon tipus dels descrits a la secció 5.3.

$$I = \int_0^\infty \frac{\cos ax}{x^2+1} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty \frac{\cos ax}{x^2+1} dx = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_{-\infty}^\infty \frac{e^{iax}}{x^2+1} dx.$$

Considerem, doncs, la integral

$$\oint_C \frac{e^{iaz}}{z^2+1} dz,$$

on C és el contorn tancat $C = C_R \cup C_1$ de la figura 5.11.

Aquí no demostrarem que la integral en el contorn semicircular s'anul·la en el límit $R \rightarrow 0$ (és clar que es compleixen les condicions d'aplicabilitat del mètode: $|1/(z^2+1)| \rightarrow 0$ quan $|z| \rightarrow \infty$). D'altra banda, és també clar que

$$\frac{1}{2} \operatorname{Re} \left(\int_{C_1} \frac{e^{iaz}}{z^2+1} dz \right) = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left(\int_{-R}^R \frac{e^{iax}}{x^2+1} dx \right) \xrightarrow{R \rightarrow \infty} I,$$

i, per tant,

$$I = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[2\pi i \operatorname{res}_{z=i} \left(\frac{e^{iaz}}{z^2+1} \right) \right] = \operatorname{Re} \left(\pi i \frac{e^{iaz}}{2z} \Big|_{z=i} \right) = \frac{\pi}{2} e^{-a}.$$

Notem que aquest resultat val per al cas en què $a > 0$. Si tenim $a < 0$, llavors el contorn semicircular ha d'estar en el semiplà inferior de $\mathbb{C}$, i el resultat és

$$\boxed{\int_0^\infty \frac{\cos ax}{x^2+1} dx = \frac{\pi e^{-|a|}}{2}}$$

(e) Aquesta integral és del quart tipus dels descrits a la secció 5.3. Es pot calcular a partir de la integral

$$\oint_C \frac{z^\alpha}{z^2+1} dz,$$

on C és un contorn com el de la figura 5.5.

Sabem que les integrals en els contorns C_δ i C_R s'anul·len en el límit $R \rightarrow \infty$ i $\delta \rightarrow 0$. Les úniques contribucions no nul·les provenen dels contorns rectilinis. El superior ve parametriztat per $z = x e^{i\epsilon}$, i obtenim

$$e^{i(1+\alpha)\epsilon} \int_\delta^R \frac{x^\alpha dx}{1+x^2 e^{2i\epsilon}} \xrightarrow[\epsilon \rightarrow 0^+]{\substack{\delta \rightarrow 0 \\ R \rightarrow \infty}} \int_0^\infty \frac{x^\alpha dx}{1+x^2} \stackrel{\text{def}}{=} I,$$

en aquest límit.

El contorn rectilini inferior ve parametriztat per $z = x e^{i(2\pi-\epsilon)}$. Notem que aquesta fase ve determinada per la posició del tall de branca que hem escollit per a la funció z^α (sobre l'eix real positiu). La integral en aquest contorn és

$$e^{i(1+\alpha)(2\pi-\epsilon)} \int_R^\delta \frac{x^\alpha dx}{1+x^2 e^{2i(2\pi-\epsilon)}} \xrightarrow[\epsilon \rightarrow 0^+]{\substack{\delta \rightarrow 0 \\ R \rightarrow \infty}} -e^{2\pi\alpha i} \int_0^\infty \frac{x^\alpha dx}{1+x^2},$$

en el mateix límit.

D'altra banda, podem avaluar la integral en el contorn C mitjançant el teorema dels residus,

$$\oint_C \frac{z^\alpha dz}{z^2+1} = 2\pi i \left(\frac{z^\alpha}{2z} \Big|_{z=i} + \frac{z^\alpha}{2z} \Big|_{z=-i} \right) = \pi \left(e^{i\alpha\frac{\pi}{2}} - e^{i\alpha\frac{3\pi}{2}} \right),$$

ja que z^α és analítica a $z = \pm i$ i l'integrand és de la forma (5.20). Així, obtenim

$$\int_0^\infty \frac{x^\alpha dx}{1+x^2} = \pi \frac{e^{i\alpha\pi} (e^{-i\frac{\alpha\pi}{2}} - e^{i\frac{\alpha\pi}{2}})}{e^{i\alpha\pi} (e^{-i\alpha\pi} - e^{i\alpha\pi})} = \pi \frac{\sin(\alpha\pi/2)}{\sin(\alpha\pi)} = \frac{\pi}{2} \sec\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right).$$

$$\boxed{\int_0^\infty \frac{x^\alpha dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2} \sec\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)}$$

(f) Aquesta integral és del sisè tipus dels descrits a la secció 5.3. S'avalua calculant

$$\oint_C \frac{\log^2 z}{(z^2+1)^2} dz,$$

on C és un contorn com el de la figura 5.5. Igual que en l'apartat anterior, les contribucions dels contorns circulars de radis δ i R s'anul·len en el límit $\delta \rightarrow 0$ i $R \rightarrow \infty$.

El contorn rectilini superior ve parametriztat per $z = x e^{i\epsilon}$, de manera que per a la branca $0 < \theta < 2\pi$ tenim

$$\log z = (\log x + i\epsilon)^2 = (\log^2 x - \epsilon^2) + 2i\epsilon \log x,$$

i la integral en aquest contorn és

$$\int_{\delta}^R \frac{(\log^2 x - \epsilon^2) + 2i\epsilon \log x}{(1 + x^2 e^{2i\epsilon})^2} dx \xrightarrow[\epsilon \rightarrow 0^+]{\substack{\delta \rightarrow 0 \\ R \rightarrow \infty}} \int_0^{\infty} \frac{\log^2 x}{(1 + x^2)^2} dx.$$

El contorn rectilini inferior es parametriza per $z = x e^{i(2\pi - \epsilon)}$. Notem també aquí que aquesta fase ve determinada per la posició del tall de branca que hem escollit per a la branca de la funció $\log z$ (sobre l'eix real positiu). La integral en aquest contorn és

$$\begin{aligned} \int_{\delta}^R \frac{\log^2 x - (2\pi - \epsilon)^2 + 2i(2\pi - \epsilon) \log x}{[1 + x^2 e^{2i(2\pi - \epsilon)}]^2} dx \\ \xrightarrow[\epsilon \rightarrow 0^+]{\substack{\delta \rightarrow 0 \\ R \rightarrow \infty}} - \int_0^{\infty} \frac{\log^2 x - 4\pi^2}{(1 + x^2)^2} dx + 4\pi i \int_0^{\infty} \frac{\log x}{(1 + x^2)^2} dx. \end{aligned}$$

Així,

$$\oint_C \frac{\log^2 z}{(z^2 + 1)^2} dz \xrightarrow[\epsilon \rightarrow 0^+]{\substack{\delta \rightarrow 0 \\ R \rightarrow \infty}} \int_0^{\infty} \frac{4\pi^2}{(1 + x^2)^2} dx + 4\pi i \int_0^{\infty} \frac{\log x}{(1 + x^2)^2} dx,$$

i, per tant,

$$\int_0^{\infty} \frac{\log x}{(1 + x^2)^2} dx = \frac{1}{4\pi} \operatorname{Im} \left[2\pi i \sum_{\substack{\text{res} \\ \forall \text{ pol } z_p}} \frac{\log^2 z}{(z^2 + 1)^2} \right].$$

Les singularitats d'aquesta funció són pols dobles. Podem trobar els corresponents residus a partir de

$$\operatorname{res}_{z=z_0} \left[\frac{\log^2 z}{(z^2 + 1)^2} \right] = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d}{dz} \left[(z - z_0) \frac{\log^2 z}{(z^2 + 1)^2} \right],$$

i obtenim

- per a $z_0 = i = e^{i\pi/2}$, $k_i = (\pi/4 + i)(i\pi/4)$
- per a $z_0 = -i = e^{i3\pi/2}$, $k_{-i} = -(3\pi/4 + i)(3i\pi/4)$

Finalment, trobem

$$\boxed{\int_0^{\infty} \frac{\log x}{(1 + x^2)^2} dx = -\frac{\pi}{4}} \quad \boxed{\int_0^{\infty} \frac{1}{(1 + x^2)^2} dx = \frac{\pi}{4}}$$

S5.5 (a) Considerem el contorn $x = a$, $0 \leq y \leq 2\pi$. Parametritzem $z = a + iy$ de manera que $dz = idy$. La integral en aquest contorn és

$$i \int_0^{2\pi} dy \frac{e^{ak} e^{iky}}{1 + e^a e^{iy}}.$$

El seu mòdul es pot fitar superiorment,

$$\begin{aligned} \left| i e^{ak} \int_0^{2\pi} \frac{e^{iky}}{1 + e^a e^{iy}} dy \right| &\leq e^{ak} \int_0^{2\pi} \frac{1}{|1 + e^a e^{iy}|} dy \\ &\leq e^{ak} \int_0^{2\pi} \frac{1}{e^a - 1} dy = 2\pi \frac{e^{ak}}{e^a - 1} \xrightarrow{a \rightarrow \infty} 0, \end{aligned}$$

ja que $k < 1$.

Per al contorn amb $x = -a$, tenim $z = -a + iy$, i

$$\begin{aligned} \left| i e^{-ak} \int_0^{2\pi} \frac{e^{iky}}{1 + e^{-a} e^{iy}} dy \right| &\leq e^{-ak} \int_0^{2\pi} \frac{1}{|1 + e^{-a} e^{iy}|} dy \\ &\leq e^{-ak} \int_0^{2\pi} \frac{1}{1 - e^{-a}} dy = 2\pi \frac{e^{-ak}}{1 - e^{-a}} \xrightarrow{a \rightarrow \infty} 0, \end{aligned}$$

ja que $k > 0$.

(b) Les singularitats de l'integrand són els zeros de l'equació $1 + e^z = 0$, és a dir, $z = \log(-1) = i(\pi + 2n\pi)$ amb $n \in \mathbb{Z}$, que hem representat a la figura 5.8. A l'interior de C només hi ha $z = i\pi$. Veiem que es tracta d'un pol simple perquè el límit

$$\lim_{z \rightarrow \pi i} (z - \pi i) \frac{e^{kz}}{1 + e^z} = \lim_{z \rightarrow \pi i} \frac{e^{kz} + (z - \pi i)e^{kz}}{e^z} = -e^{ik\pi}$$

és finit i no nul (hem aplicat la regla de L'Hôpital).

(c) El límit de l'apartat anterior ens diu que el residu és $k_{\pi i} = -e^{ik\pi}$.

(d) El contorn horitzontal inferior es parametritza per $z = x$ i la seva contribució és

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{kx}}{1 + e^x} dx.$$

El contorn horitzontal superior es parametritza per $z = x + 2\pi i$ i la seva contribució és

$$e^{2k\pi i} \int_{+\infty}^{-\infty} \frac{e^{kx}}{1 + e^x} dx.$$

Així, en el límit $a \rightarrow \infty$,

$$\oint_C \frac{e^{kz}}{1 + e^z} dz = (1 - e^{2k\pi i}) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{kx}}{1 + e^x} dx = -2\pi i e^{ik\pi}.$$

Si d'aquesta última equació aïllem la integral que volem calcular obtenim

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{kx}}{1+e^x} dx = \frac{\pi}{\sin(\pi k)}$$

S5.6 Aquesta integral la podem calcular considerant

$$\oint_C \frac{e^{itz}}{2z^2 - itz + t^2} dz,$$

on C és un dels contorns de la figura 5.12. Si $t > 0$, el contorn ha d'estar en el semiplà superior, ja que $e^{it(x+iy)} = e^{-ty}e^{itx}$, i e^{-ty} és fitat superiorment i la integral sobre el contorn semicircular no hi contribuirà. Si $t < 0$, el contorn semicircular ha d'estar en el semiplà inferior.

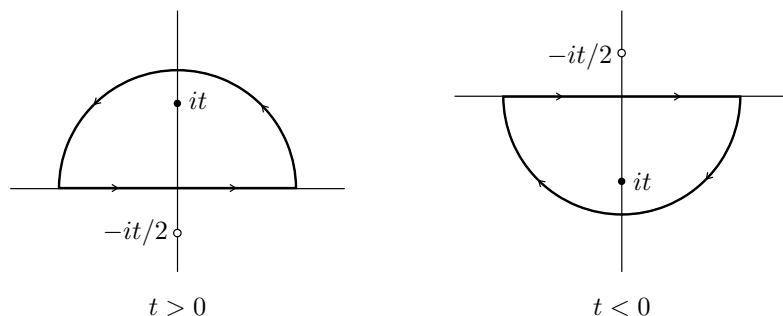


Figura 5.12: Contorn i pols del problema **P5.6**, dependent del signe de t .

Les arrels del denominador són it i $-it/2$, de manera que en tots dos casos la que hi ha a l'interior del contorn d'integració és $z = it$. Com que es tracta d'un pol simple de l'integrand, el residu és $k_{it} = e^{itit}/(4it - it) = -e^{-t^2}i/(3t)$. Tenint en compte que el sentit d'integració és *horari* per $t < 0$, obtenim el resultat

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{itx}}{2x^2 - itx + t^2} dx = \frac{2\pi}{3} \frac{e^{-t^2}}{|t|}$$

vàlid per als dos casos $t > 0$ i $t < 0$.

S5.7 (a) La funció $f(z) = 1/[z^2 + 1/4]$ no té pols a $z = n \in \mathbb{Z}$. Si utilitzem el teorema 5.2 tenim

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{n^2 + 1/4} = - \left[\begin{array}{c} \text{suma dels residus de } \frac{\pi \cot(\pi z)}{z^2 + 1/4} \\ \text{als pols de } \frac{1}{z^2 + 1/4} \end{array} \right].$$

La funció $f(z)$ té dos pols simples a $z_1 = i/2$ i $z_2 = -i/2$. Els residus de $\pi \cot(\pi z)f(z)$ a $z_{1,2}$ són:

$$k_1 = \lim_{z \rightarrow i/2} \frac{\pi \cot(\pi z)}{z^2 + 1/4} \left(z - \frac{i}{2} \right) = \lim_{z \rightarrow i/2} \frac{\pi \cot(\pi z)}{z + i/2} = -\pi \coth(\pi/2),$$

$$k_2 = \lim_{z \rightarrow -i/2} \frac{\pi \cot(\pi z)}{z^2 + 1/4} \left(z + \frac{i}{2} \right) = \lim_{z \rightarrow -i/2} \frac{\pi \cot(-\pi z)}{z - i/2} = -\pi \coth(\pi/2),$$

i, per tant, $k_1 + k_2 = -2\pi \coth(\pi/2)$. Com que $f(z)$ és parella tenim

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{n^2 + 1/4} = 4 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 1/4} = -[-2\pi \coth(\pi/2)],$$

d'on deduïm que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 1/4} = \pi \coth(\pi/2) - 2.$$

(b) En aquest cas $1/z^2$ té un únic pol (doble) a $z = 0$, on també $\cot(\pi z)$ hi té un pol simple, i això fa que $\pi \cot(\pi z)/z^2$ hi tingui un pol d'ordre 3. Sembla, doncs, que el teorema 5.2 no és aplicable, però, de fet, sí que ho és, perquè el que el teorema afirma és que la suma dels residus de *tots* els pols de $\pi \cot(\pi z)/z^2$ ha de ser 0. Per tant, tenim

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{1}{n^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} + \operatorname{res}_{z=0} \left[\frac{\pi \cot(\pi z)}{z^2} \right] = 0.$$

Com que $1/z^2$ és parella, els dos primers sumands són iguals i tenim

$$2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = -\operatorname{res}_{z=0} \left[\frac{\pi \cot(\pi z)}{z^2} \right].$$

Per trobar aquest residu podem fer servir (5.2) però és més ràpid utilitzar els desenvolupaments en sèrie de potències de z ,

$$\begin{aligned} \frac{\pi \cot(\pi z)}{z^2} &= \frac{\pi}{z^2} \frac{1 - (\pi z)^2/2! + \dots}{(\pi z) - (\pi z)^3/3! + \dots} \\ &= \frac{1}{z^3} \left[1 - \frac{(\pi z)^2}{2!} + \dots \right] \left[1 + \frac{(\pi z)^2}{3!} + \dots \right] \\ &= \frac{1}{z^3} - \frac{\pi^2}{3z} + \dots \end{aligned}$$

El residu és, doncs, $-\pi^2/3$ i tenim

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Una altra manera d'arribar a aquest resultat és demostrar, seguint els passos de l'apartat (a), que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + \epsilon^2} = \frac{\pi \epsilon \coth(\pi \epsilon) - 1}{2\epsilon^2}$$

i fer el límit $\epsilon \rightarrow 0$.

(c) Veiem que

$$\begin{aligned} \frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} &= \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \\ &= \frac{9}{8} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(3n+3/2)^2} = \frac{9}{8} \frac{\pi^2}{9} \csc^2[(3/2)\pi/3] = \frac{\pi^2}{8}, \end{aligned}$$

on hem usat els resultats de l'exemple 5.9.

S5.8 Sigui

$$z = r_0 e^{i\theta_0}, \quad z - 1 = r_1 e^{i\theta_1} \quad \text{amb } 0 \leq \theta_0, \theta_1 < 2\pi.$$

Considerem la branca de $z^{s-1}(z-1)^{-s}$ definida com

$$z^{s-1}(z-1)^{-s} = r_0^{s-1} r_1^{-s} e^{i[(s-1)\theta_0 - s\theta_1]},$$

que té el tall a l'interval $[0, 1]$ sobre l'eix real. Integrem-la sobre el contorn tancat de la figura 5.9.

Observem que si $z = x \pm i\epsilon/2$ amb $x \in [0, 1]$, quan $\epsilon \rightarrow 0^+$ tenim $\theta_0 \rightarrow \pi \mp \pi$ i $\theta_1 \rightarrow \pi$ i, per tant,

$$z^{s-1}(z-1)^{-s} \rightarrow x^{s-1}(1-x)^{-s} e^{i(s-1)(\pi \mp \pi) - is\pi} = e^{\mp is\pi} x^{s-1}(1-x)^{-s}.$$

En aquest límit la integral sobre els dos segments rectes esdevé

$$\int_{\overrightarrow{\leftarrow}} z^{s-1}(z-1)^{-s} dz \rightarrow (e^{-is\pi} - e^{is\pi}) \int_0^1 x^{s-1}(1-x)^{-s} dx,$$

que és la integral de la discontinuïtat de $z^{s-1}(z-1)^{-s}$ sobre el tall. Observem també que els dos contorns semicirculars de la figura 5.9 no donen cap contribució en el límit $\epsilon \rightarrow 0^+$, ja que si $0 < s < 1$ tenim

$$\begin{aligned} \int_{\zeta} z^{s-1}(z-1)^{-s} dz &= -i \left(\frac{\epsilon}{2}\right)^s \int_{\pi/2}^{3\pi/2} e^{is\theta_0} [(\epsilon/2)e^{i\theta_0} - 1]^{-s} d\theta_0 \rightarrow 0, \\ \int_{\gamma} z^{s-1}(z-1)^{-s} dz &= i \left(\frac{\epsilon}{2}\right)^{1-s} \\ &\quad \times \left(\int_0^{\pi/2} + \int_{3\pi/2}^{2\pi} \right) [1 + (\epsilon/2)e^{i\theta_1}]^{s-1} e^{i(1-s)\theta_1} d\theta_1 \rightarrow 0. \end{aligned}$$

El teorema de Cauchy-Goursat ens permet escriure

$$(e^{-is\pi} - e^{is\pi}) \int_0^1 x^{s-1}(1-x)^{-s} dx + \oint_{C_R} z^{s-1}(z-1)^{-s} dz = 0,$$

és a dir, $-2i \sin(\pi s) I = - \oint_{C_R} z^{s-1}(z-1)^{-s} dz$. Per tant,

$$I(s) = \frac{1}{2i \sin(\pi s)} \oint_{C_R} z^{s-1}(z-1)^{-s} dz.$$

L'integrand es pot representar per una sèrie de Laurent en potències de z a la regió $|z| > 1$, ja que és analític en aquesta regió. La sèrie és

$$z^{s-1}(z-1)^{-s} = z^{s-1-s} \left(1 - \frac{1}{z}\right)^{-s} = \frac{1}{z} \left(1 + \frac{s}{z} + \dots\right) = \frac{1}{z} + \frac{s}{z^2} + \dots,$$

i es pot obtenir, per exemple, a partir de la sèrie binomial (vegeu també la resolució del problema **P4.8**)

$$(1+z)^s = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{s}{n} z^n.$$

En ser la sèrie convergent, es pot integrar terme a terme. Tenim

$$\oint_{C_R} \frac{dz}{z} = 2\pi i, \quad \oint_{C_R} \frac{dz}{z^n} = 0, \quad n \neq 1,$$

i, per tant,

$$I(s) = \frac{\pi}{\sin(\pi s)} = \pi \csc(\pi s)$$

Alternativament, podríem haver raonat de la manera següent. Si fem el canvi $z = 1/w$ obtenim

$$\begin{aligned}\oint_{C_R} z^{s-1}(z-1)^{-s} dz &= \oint_{C_{1/R}^*} w^{1-s} \left(\frac{1}{w} - 1\right)^{-s} \left(-\frac{dw}{w^2}\right) \\ &= \oint_{C_{1/R}} \frac{(1-w)^{-s}}{w} dw = 2\pi i,\end{aligned}$$

ja que l'integrand té un pol simple a l'interior de la circumferència $C_{1/R}$ de radi $1/R$ i centre $w = 0$ (observem que el numerador és una funció analítica al voltant d'aquest punt).

S5.9 (a) De la definició de la funció gamma d'Euler tenim

$$\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \int_0^\infty x^{s-1} e^{-x} dx \int_0^\infty y^{-s} e^{-y} dy = \iint_{x,y \geq 0} x^{s-1} y^{-s} e^{-x-y} dx dy$$

si $0 < s$, $0 < -s + 1$, és a dir, si $0 < s < 1$. La integral és sobre el primer quadrant del pla xy . Si fem el canvi

$$x = uv, \quad y = (1-u)v$$

veiem que aquest quadrant esdevé la franja $0 \leq u \leq 1$, $0 \leq v$ del pla uv , i

$$\left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| = \begin{vmatrix} v & u \\ -v & 1-u \end{vmatrix} = v.$$

Això ens permet escriure

$$\begin{aligned}\Gamma(s)\Gamma(1-s) &= \int_0^1 \int_0^\infty u^{s-1} (1-u)^{-s} e^{-v} dv du = \int_0^1 u^{s-1} (1-u)^{-s} du \\ &= I(s), \quad 0 < s < 1.\end{aligned}$$

(b) Si combinem aquest resultat amb el del problema **P5.8** obtenim

$$\boxed{\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \pi \csc(\pi s)}$$

que és l'anomenada *fórmula de reflexió d'Euler*. Tot i que hem obtingut aquest resultat per $0 < s < 1$, observem que $f(s) = \Gamma(s)\Gamma(1-s) - \pi \csc(\pi s)$ és una funció analítica en el domini $\mathbb{C} - \mathbb{Z}$ i, per tant, l'extensió analítica de la funció gamma d'Euler també satisfà la relació en aquest domini.

Sabem que $\Gamma(z)$ té pols a $z = 0, -1, -2, \dots$ i no té zeros a $z = 1, 2, 3, \dots$, ja que $\Gamma(n) = (n-1)! \neq 0$; per tant, $\Gamma(z)$ no s'anul·la a $\mathbb{Z} \subset \mathbb{C}$. D'altra

banda, si $z_0 \notin \mathbb{Z}$ fos un zero de $\Gamma(z)$, la funció $\Gamma(1-z)$ seria analítica en un entorn de z_0 (ja que $1-z_0 \notin \mathbb{Z}$) i tindríem

$$0 = \Gamma(z_0)\Gamma(1-z_0) = \pi \csc(\pi z_0).$$

Però, com que $\csc(\pi z_0) \neq 0$, arribaríem a una contradicció. Així doncs, conclouem que la funció gamma d'Euler no té cap zero.

S5.10 Recordem que si $s = -1$

$$\zeta(-1) = \lim_{s \rightarrow -1} \frac{1/\Gamma(s)}{1 - e^{2\pi i s}} \int_C \frac{t^{s-1}}{e^t - 1} dt,$$

on C és un contorn com el que es mostra a la figura 4.11. A $s = -1$ la funció $1/\Gamma(s)$ hi té un zero, ja que $\Gamma(s)$ hi té un pol. El residu en aquest pol és $(-1)^1/1! = -1$. Per tant,

$$\begin{aligned} \zeta(-1) &= \lim_{s \rightarrow -1} \frac{-(s+1)}{1 - e^{2\pi i(s+1)}} \int_C \frac{1}{t^2(e^t - 1)} dt \\ &= \lim_{s \rightarrow -1} \frac{-(s+1)}{1 - [1 + 2\pi i(s+1) + \dots]} \int_C \frac{1}{t^2(e^t - 1)} dt \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{1}{t^2(e^t - 1)} dt, \end{aligned}$$

on a l'última línia hem tancat el contorn C per la dreta i l'hem convertit en el de la figura 4.14. Això ho podem fer perquè l'integrand no té tall de branca quan $s = -1$. L'integrand només té un pol d'ordre 3 a l'origen i l'última integral la podem calcular usant el teorema dels residus. Per trobar el residu desenvolupem l'integrand en sèrie de Laurent al voltant de $z = 0$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{t^2(e^t - 1)} &= \frac{1}{t^3(1 + t/2 + t^2/6 + \dots)} \\ &= \frac{1}{t^3} \left[1 - (t/2 + t^2/6 + \dots) + (t/2 + t^2/6 + \dots)^2 + \dots \right] \\ &= \frac{1}{t^3} \left[1 - \frac{t}{2} + \frac{t^2}{4} - \frac{t^2}{6} + \dots \right] = \frac{1}{t^3} - \frac{1}{2t^2} + \frac{1}{12t} + \dots \end{aligned}$$

Per tant,

$$\operatorname{res}_{t=0} \left[\frac{1}{t^2(e^t - 1)} \right] = \frac{1}{12}.$$

Alternativament (però el càlcul és més larg), podem usar la fórmula

$$\operatorname{res}_{t=0} \left[\frac{1}{t^2(e^t - 1)} \right] = \frac{1}{2} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{d^2}{dt^2} \left[\frac{t}{(e^t - 1)} \right].$$

Finalment obtenim

$$\zeta(-1) = -\frac{1}{12}.$$

El signe $-$ és conseqüència del fet que C (figura 4.14) es recorre en sentit horari.

La suma infinita $1 + 2 + 3 + \dots$, que és clarament divergent, s'escriu també

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{-1}}.$$

Com que $\zeta(s)$ és l'única funció analítica a $\mathbb{C} - \{1\}$ que coincideix amb $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^s$, podem definir la suma anterior com $\zeta(-1) = -1/12$. Això dona sentit a una suma que altrament seria infinita.¹

Aquesta és la idea que hi ha al darrere de la regularització mitjançant la funció zeta (*zeta function regularization* en anglès) que es fa servir en diverses branques de les matemàtiques i la física teòrica, per exemple, en teories quàntiques de camps i en la teoria de cordes.

¹Malgrat que aquest resultat pugui sorprendre, cal recordar que una suma infinita és ambigua i que la prescripció $\sum_0^{\infty} \dots \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_0^n \dots$ és una, però no l'única, opció possible.

Apèndix: Exàmens resolts

Examen A

PA.1 Considereu la regió del pla complex z

$$\begin{cases} e \leq |z| \leq e^2, \\ \operatorname{Re} z < 0. \end{cases}$$

En quina regió del pla complex w es transforma per la funció $w = \log(z^2)$?
Suposeu que la branca de $\log$ escollida és analítica a la regió donada.
Representeu gràficament les dues regions.

PA.2 La funció f té un pol simple a $z = ie^{-1}$ i és analítica a la resta del pla complex. Sabem que

$$\oint_{|z|=1} f(z) dz = 1, \quad f(2) = \frac{1}{4\pi(2e - i)}.$$

(a) Calculeu la integral

$$\oint_{|z|=3} \frac{f(z)}{z - 2} dz.$$

(Tots els contorns es recorren en sentit positiu.)

(b) Trobeu una funció f que compleixi les condicions de l'enunciat.

PA.3 Representeu gràficament i expresseu en forma polar o binomial *tots* els valors de:

$$(a) \ 1^{1/i\pi} \qquad (b) \ \left(\cosh \frac{i\pi}{6} \right)^{1/3}$$

PA.4 Trobeu el(s) desenvolupament(s) en sèrie de potències de la funció

$$f(z) = \frac{\sin z}{(\pi - 2z)^2}$$

al voltant del(s) seu(s) punt(s) singular(s) i especifiqueu-ne la regió de convergència.

PA.5 Si a és un nombre real positiu, utilitzeu el mètode dels residus per calcular la integral

$$\int_0^\infty \frac{x \sin(ax)}{x^2 + 1} dx.$$

Nota: Aquesta integral és convergent; no cal comprovar-ho.

SOLUCIONS

SA.1 La regió del pla complex de l'enunciat és l'àrea ombrejada de la figura A.1:

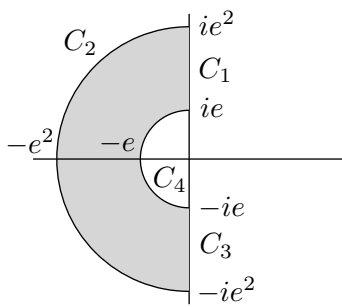


Figura A.1: Regió del pla complex z del problema **PA.1**.

Els diversos segments $C_1, \dots, C_4$ són:

$$\begin{aligned} C_1: z &= t e^{i\pi/2}, \quad e \leq t \leq e^2; & C_3: z &= t e^{3i\pi/2}, \quad e \leq t \leq e^2; \\ C_2: z &= e^2 e^{i\theta}, \quad \pi/2 < \theta < 3\pi/2; & C_4: z &= e e^{i\theta}, \quad \pi/2 < \theta < 3\pi/2. \end{aligned}$$

Notem que C_1 i C_3 no pertanyen a la regió, ja que a l'enunciat s'especifica que $\operatorname{Re} z$ és estrictament negatiu.

La funció $w = \log z^2$ (on la branca del logaritme està definida per $\log z = \log r + i\theta$; $0 \leq \theta < 2\pi$; $z = r e^{i\theta}$) transforma aquests contorns en els segments rectes següents:

$$\begin{aligned} C'_1: w &= s + \pi i, \quad 2 \leq s \leq 4; & C'_3: w &= s + 3\pi i, \quad 2 \leq s \leq 4; \\ C'_2: w &= 4 + i\phi, \quad \pi < \phi < 3\pi; & C'_4: w &= 2 + i\phi, \quad \pi < \phi < 3\pi; \end{aligned}$$

on $s = 2 \log t$ i $\phi = 2\theta$. La regió transformada es mostra a la figura A.2.

Si considerem $\log z$ com la funció multivaluada $\log z = \log r + i(\theta + 2\pi k)$, $k \in \mathbb{Z}$, la regió transformada és la banda de la figura A.3, on els segments horitzontals amb $y = (2k + 1)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, no pertanyen a la regió.

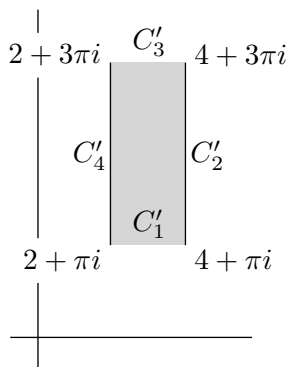


Figura A.2: Regió del pla complex w del problema **PA.1**.

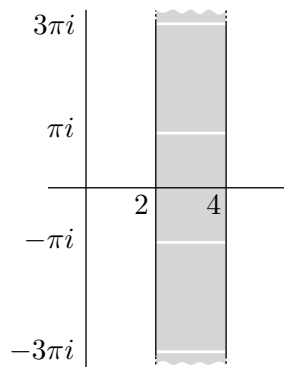


Figura A.3: Regió del pla complex w del problema **PA.1** si $\log$ és la funció logarítmica multivaluada.

SA.2 (a) El pol simple de f és a l'interior al contorn $|z| = 1$, ja que $|ie^{-1}| < 1$. Si a_{-1} és el residu de f a $z = ie^{-1}$ tenim

$$2\pi i a_{-1} = \oint_{|z|=1} f(z) dz = 1,$$

i, per tant, $a_{-1} = 1/(2\pi i)$. Com que $z = ie^{-1}$ és l'única singularitat de f i es tracta d'un pol simple tenim

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{z - ie^{-1}} + g(z), \quad (\text{A.1})$$

on $g(z)$ és analítica. Així doncs, el residu de $f(z)/(z - 2)$ a $z = ie^{-1}$ és

$$b_{-1} = \lim_{z \rightarrow ie^{-1}} \left[(z - ie^{-1}) \frac{f(z)}{z - 2} \right] = \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{ie^{-1} - 2} = -\frac{1}{4\pi i} \frac{2e}{2e - i}.$$

D'altra banda, el residu de $f(z)/(z - 2)$ a $z = 2$ és

$$b'_{-1} = \lim_{z \rightarrow 2} \left[(z - 2) \frac{f(z)}{z - 2} \right] = f(2) = \frac{1}{4\pi(2e - i)} = \frac{1}{4\pi i} \frac{i}{2e - i}.$$

La integral que busquem és, doncs,

$$\oint_{|z|=3} \frac{f(z)}{z - 2} dz = 2\pi i (b_{-1} + b'_{-1}) = 2\pi i \left(-\frac{1}{4\pi i} \right) = -\frac{1}{2}.$$

$$\boxed{\oint_{|z|=3} \frac{f(z)}{z - 2} dz = -\frac{1}{2}}$$

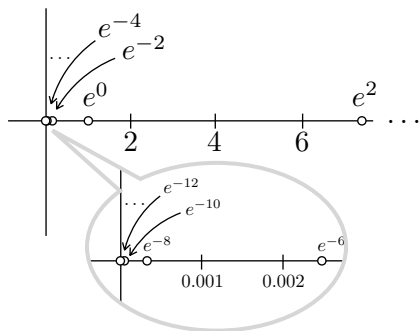


Figura A.4: El conjunt de nombres complexos e^{2k} , $k \in \mathbb{Z}$.

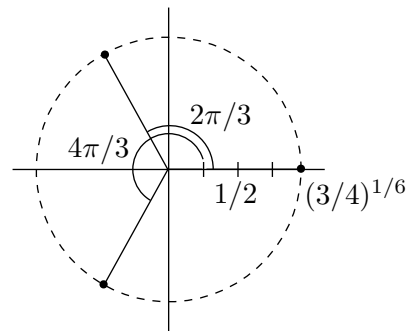


Figura A.5: El conjunt de nombres complexos $[\cosh(i\pi/6)]^{1/3}$.

(b) L'elecció més simple s'obté si fem que $g(z)$ a (A.1) sigui una constant k . La determinem imposant que

$$\frac{1}{2\pi i} \frac{1}{2 - ie^{-1}} + k = f(2),$$

és a dir,

$$k = f(2) - \frac{1}{4\pi i} \frac{2e}{2e - i} = \frac{1}{4\pi(2e - i)} - \frac{1}{4\pi i} \frac{2e}{2e - i} = \frac{i}{4\pi}.$$

Així doncs, una possible elecció de f és

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{z - ie^{-1}} + \frac{i}{4\pi}$$

SA.3 (a)

$$1^{1/i\pi} = \exp \left[\frac{\log 1 + 2\pi ki}{i\pi} \right] = e^{2k}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$1^{1/i\pi} = e^{2k}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Aquest conjunt de nombres complexos es representa a la figura A.4

(b)

$$\begin{aligned} \left(\cosh \frac{i\pi}{6} \right)^{1/3} &= \left(\cos \frac{\pi}{6} \right)^{1/3} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^{1/3} \\ &= \left(\frac{3}{4} \right)^{1/6} e^{(0+2\pi k)i/3}, \quad k = 0, 1, 2, \end{aligned}$$

i la resposta és (vegeu figura A.5)

$$\left(\cosh \frac{i\pi}{6} \right)^{1/3} = \left(\frac{3}{4} \right)^{1/6} e^{i2\pi k/3}, \quad k = 0, 1, 2$$

SA.4 L'única singularitat de $f(z)$ és $z = \pi/2$ (és un pol doble). Hem de trobar, doncs, una sèrie de Laurent de potències de $z - \pi/2$ vàlida al voltant d'aquest punt.

$$f(z) = \frac{\sin z}{(\pi - 2z)^2} = \frac{\sin[(z - \pi/2) + \pi/2]}{4(z - \pi/2)^2} = \frac{\cos(z - \pi/2)}{4(z - \pi/2)^2}.$$

Sabem que $\cos w = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n w^{2n} / (2n)!$. Per tant,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(z - \pi/2)^{2n-2}}{4(2n)!} = \frac{1}{4(z - \pi/2)^2} - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(z - \pi/2)^{2n}}{4(2n+2)!},$$

$$f(z) = \frac{1}{4(z - \pi/2)^2} - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(z - \pi/2)^{2n}}{4(2n+2)!}$$

Aquesta sèrie és convergent a $|z - \pi/2| > 0$

SA.5 L'integrand és una funció parella, per tant,

$$I = \int_0^{\infty} \frac{x \sin ax}{x^2 + 1} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin ax}{x^2 + 1} dx = \frac{1}{2} \operatorname{Im} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x e^{iax}}{x^2 + 1} dx \right).$$

Les singularitats de l'integrand són pols simples a $z = \pm i$. Usem el contorn de la figura A.6, ja que, en ser $a > 0$, tenim assegurat que la integral sobre la semicircumferència s'anul·la en el límit $R \rightarrow \infty$. La figura també indica la localització dels pols de l'integrand.

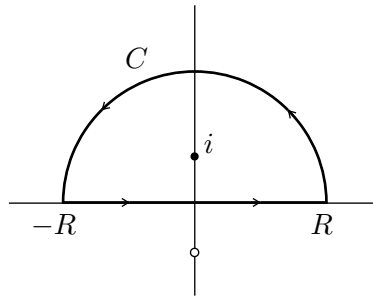


Figura A.6: Contorn d'integració i singularitats del problema **PA.5**.

Així doncs, tenim

$$I = \frac{1}{2} \operatorname{Im} \left(\oint_C \frac{z e^{iaz}}{z^2 + 1} dz \right) = \frac{1}{2} \operatorname{Im} \left(2\pi i \operatorname{res}_{z=i} \frac{z e^{iaz}}{z^2 + 1} \right). \quad (\text{A.2})$$

Notem que només contribueix el pol del semiplà superior, ja que és l'únic interior al contorn d'integració. El residu corresponent és

$$\begin{aligned} \operatorname{res}_{z=i} \frac{z e^{iaz}}{z^2 + 1} &= \lim_{z \rightarrow i} \left[(z - i) \frac{z e^{iaz}}{z^2 + 1} \right] \\ &= \lim_{z \rightarrow i} \left[(z - i) \frac{z e^{iaz}}{(z - i)(z + i)} \right] = \lim_{z \rightarrow i} \frac{z e^{iaz}}{z + i} = \frac{e^{-a}}{2}. \end{aligned}$$

Si substituïm a (A.2), tenim finalment

$$\boxed{\int_0^\infty \frac{x \sin ax}{x^2 + 1} dx = \frac{\pi e^{-a}}{2}}$$

Examen B

PB.1 Considereu la funció

$$f(z) = \frac{2x - a - 2iy}{(x - 1)^2 + by^2},$$

on $a, b \in \mathbb{R}$ i $z = x + iy$.

- Determineu per a quins valors de a i b la funció f és analítica en alguna regió.
- Especifiqueu aquesta regió.
- Trobeu les singularitats de f i determineu-ne el tipus.

PB.2 Una funció f és analítica a tot $\mathbb{C}$, excepte a $z = 0$, i compleix

$$\lim_{z \rightarrow \infty} |f(z)| = 1, \quad \lim_{z \rightarrow 0} [zf(z)] = 1.$$

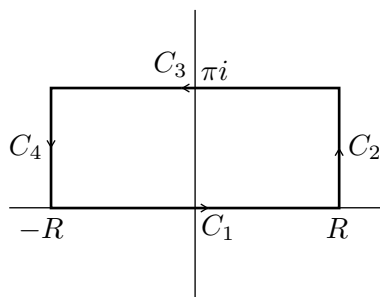
Determineu *totes* les possibles funcions f que compleixen aquestes condicions.

PB.3 Representeu gràficament i expresseu en forma polar o binomial *tots* els valors de:

$$(a) \quad 1^i \qquad (b) \quad \left(\sinh \frac{i\pi}{6} \right)^{1/4}$$

PB.4 Trobeu els desenvolupaments en sèrie de potències de $z - 1$, en els respectius dominis de convergència, de la funció

$$f(z) = \frac{i + 1/2}{(z - 2)[z - (1 + i/2)]}.$$

Figura B.1: Contorn del problema **PB.5**.

PB.5 Considereu la integral $\oint_C dz / \cosh z$ sobre el contorn de la figura B.1

- Demostreu que quan $R \rightarrow \infty$, les integrals sobre C_2 i C_4 s'anul·len.
- Trobeu la singularitat de l'integrand a l'interior del contorn, demostreu que és un pol simple i calculeu el seu residu.
- A partir dels resultats anteriors, trobeu el valor de la integral real

$$\int_0^\infty \frac{dx}{\cosh x}.$$

SOLUCIONS

SB.1 (a) Calculem les derivades parcials de les funcions

$$u(x, y) = \frac{2x - a}{(x - 1)^2 + by^2}, \quad v(x, y) = \frac{-2y}{(x - 1)^2 + by^2}.$$

Per les condicions de Cauchy-Riemann obtenim

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} = 2 \frac{(a - 2)(x - 1)}{[(x - 1)^2 + by^2]^2}, \\ 0 &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 2y \frac{2(1 - b)x + (ab - 2)}{[(x - 1)^2 + by^2]^2}, \end{aligned}$$

i, per tant,

$$\boxed{a = 2} \quad \boxed{b = 1}$$

Així doncs,

$$f(z) = 2 \frac{x - 1 - iy}{(x - 1)^2 + by^2} = 2 \frac{z^* - 1}{|z - 1|^2} = \frac{2}{z - 1}.$$

(b) Veiem que f és analítica a tot $\mathbb{C}$, llevat del punt $z = 1$

(c) L'única singularitat de f és $z = 1$ i és un pol simple

SB.2 Com que

$$\lim_{z \rightarrow 0} zf(z) \neq 0,$$

la funció $f(z)$ té un pol simple a $z = 0$ i el residu corresponent és

$$\operatorname{res}_{z=0} f(z) = \lim_{z \rightarrow 0} zf(z) = 1.$$

Per tant,

$$f(z) = \frac{1}{z} + g(z),$$

on $g(z)$ és analítica a tot $\mathbb{C}$. D'altra banda,

$$\lim_{z \rightarrow \infty} |g(z)| = \lim_{z \rightarrow \infty} |f(z)| = 1, \quad (\text{B.1})$$

ja que $\lim_{z \rightarrow \infty} (1/z) = 0$. Per tant, $|g(z)|$ és fitada i, d'acord amb el teorema de Liouville, tenim $g(z) = k$. La constant k ha de tenir mòdul 1, ja que, altrament, (B.1) no es podria complir.

Per tant,

$$f(z) = \frac{1}{z} + e^{i\theta_0}, \quad \theta_0 \in \mathbb{R}$$

SB.3 (a) $1^i = e^{i \log 1} = e^{i(2\pi k)} = e^{-2\pi k}, \quad k \in \mathbb{Z}.$

$$e^{-2\pi k}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Aquests valors es representen a la figura B.2.



Figura B.2: Conjunt de nombres complexos $1^i = e^{-2\pi k}, \quad k \in \mathbb{Z}.$

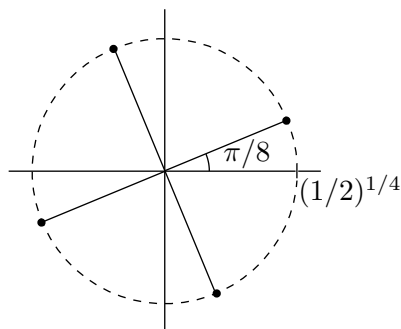


Figura B.3: Conjunt de nombres complexos $e^{i(\pi/2+2\pi k)/4}$, $k = 0, 1, 2, 3$.

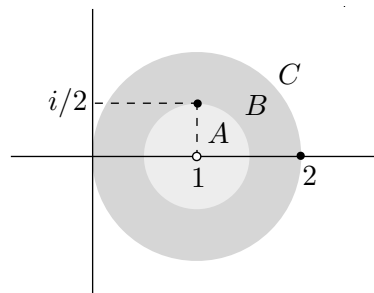


Figura B.4: Singularitats i regions de convergència de la funció $f(z)$ del problema **PB.4**.

$$(b) \left(\sinh \frac{i\pi}{6} \right)^{1/4} = \left(i \sin \frac{\pi}{6} \right)^{1/4} = \left(\frac{i}{2} \right)^{1/4} = \sqrt[4]{\frac{1}{2}} e^{i(\pi/2+2\pi k)/4}, \quad k = 0, 1, 2, 3.$$

$$\boxed{e^{i(\pi/2+2\pi k)/4}, \quad k = 0, 1, 2, 3}$$

Aquests valors es representen a la figura B.3.

SB.4 Les singularitats de $f(z)$ són a $z = 2$ i a $z = 1 + i/2$ (vegeu la figura B.4). Si descomponem en fraccions simples veiem que

$$f(z) = \frac{i}{z-2} - \frac{i}{z-(1+i/2)}.$$

A les regions A ($|z-1| < 1/2$), B ($1/2 < |z-1| < 1$) i C ($1 < |z-1|$) tenim

$$\frac{i}{z-2} = \begin{cases} -\frac{i}{1-(z-1)} = -i \sum_{n=0}^{\infty} (z-1)^n, & \text{convergent a } A \cup B; \\ \frac{i/(z-1)}{1-1/(z-1)} = i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(z-1)^n}, & \text{convergent a } C. \end{cases}$$

Anàlogament

$$-\frac{i}{z-(1+i/2)} = \begin{cases} \frac{2}{1-2i(1-z)} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} (-2i)^n (z-1)^n, & \text{conv. a } A; \\ -\frac{i/(z-1)}{1-\frac{i}{2}\frac{1}{z-1}} = -i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(i/2)^{n-1}}{(z-1)^n}, & \text{conv. a } B \cup C; \end{cases}$$

on en tots els casos hem usat

$$\frac{1}{1-\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n, \text{ si } |\alpha| < 1.$$

Per tant,

$$f(z) = \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} [2(-2i)^n - i] (z-1)^n, & \text{convergent a } A; \\ -i \sum_{n=0}^{\infty} (z-1)^n - i \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{i}{2}\right)^{n-1} \frac{1}{(z-1)^n}, & \text{convergent a } B; \\ i \sum_{n=1}^{\infty} \left[1 - \left(\frac{i}{2}\right)^{n-1}\right] \frac{1}{(z-1)^n}, & \text{convergent a } C. \end{cases}$$

SB.5 (a) Sobre C_2 , $z = R + iy$ i, per tant, quan $R \rightarrow \infty$ tenim

$$\begin{aligned} \left| \int_{C_2} \frac{dz}{\cosh z} \right| &\leq \int_0^\pi \frac{|i| dy}{|\cosh(R + iy)|} \\ &\leq \int_0^\pi \frac{2 dy}{|e^R - e^{-R}|} \leq \frac{2\pi e^{-R}}{1 - e^{-2R}} \rightarrow 0, \quad (\text{B.2}) \end{aligned}$$

on hem usat

$$|\cosh(R + iy)| = \frac{1}{2} |e^R e^{iy} + e^{-R} e^{-iy}| \geq \frac{1}{2} (e^R - e^{-R}).$$

Similarment, sobre C_4 , $z = -R + iy$ i, per tant, quan $R \rightarrow \infty$ tenim

$$\begin{aligned} \left| \int_{C_4} \frac{dz}{\cosh z} \right| &\leq \int_0^\pi \frac{|i| dy}{|\cosh(-R + iy)|} \\ &\leq \int_0^\pi \frac{2 dy}{|e^{-R} - e^R|} \leq \frac{2\pi e^{-R}}{1 - e^{-2R}} \rightarrow 0. \quad (\text{B.3}) \end{aligned}$$

(b) Les singularitats de l'integrand són els valors de z que anul·len $\cosh z$. Com que $\cosh z = \cos iz$ aquestes singularitats són

$$z_k = i\pi \frac{2k+1}{2}, \quad k \in \mathbb{Z},$$

de les quals només $z_0 = i\pi/2$ és interior a C . El residu corresponent és

$$\begin{aligned} \operatorname{res}_{z=i\pi/2} \frac{1}{\cosh z} &= \lim_{z \rightarrow i\pi/2} \frac{z - i\pi/2}{\cosh z} \stackrel{(*)}{=} \lim_{z \rightarrow i\pi/2} \frac{1}{\sinh z} \\ &= \frac{1}{\sinh(i\pi/2)} = \frac{1}{i \sin(\pi/2)} = -i, \quad (\text{B.4}) \end{aligned}$$

on hem usat la regla de L'Hôpital a la igualtat (*). La igualtat (B.4) demostra que $z = z_0$ és un pol simple i alhora ens dona el residu corresponent.

(c) Observem que sobre C_1 , $z = x$, i, per tant

$$\int_{C_1} \frac{dz}{\cosh z} = \int_{-R}^R \frac{dx}{\cosh x}.$$

Sobre C_3 , $z = x + i\pi$, i, per tant

$$\int_{C_3} \frac{dz}{\cosh z} = \int_R^{-R} \frac{dx}{\cosh(x + i\pi)} = \int_{-R}^R \frac{dx}{\cosh x},$$

on hem usat que $\cosh(z + i\pi) = -\cosh z$. En el límit $R \rightarrow \infty$ tenim

$$\begin{aligned} 2\pi i(-i) &= \oint_C \frac{dz}{\cosh z} = \int_{C_1} \frac{dz}{\cosh z} + \int_{C_3} \frac{dz}{\cosh z} \\ &= 2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\cosh x} = 4 \int_0^{\infty} \frac{dx}{\cosh x}, \end{aligned}$$

on hem usat el teorema dels residus, (B.2), (B.3) i el fet que $\cosh z$ és una funció parella. Així doncs,

$$\boxed{\int_0^{\infty} \frac{dx}{\cosh x} = \frac{\pi}{2}}$$

Examen C

PC.1 Representeu gràficament i expresseu en forma polar *tots* els valors de:

- (a) i^i ,
- (b) $\sqrt{\sinh(\xi + i\pi)}$, on ξ és el nombre *real* $\xi = \log(1 + \sqrt{2})$ (el valor de ξ s'ha escollit perquè el resultat final sigui molt senzill).

PC.2 Considereu l'operació següent $\sim$ sobre $\mathbb{C}$. Si $z = x + iy$ definim

$$\tilde{z} = -x + iy \quad (\text{és una reflexió sobre l'eix } y).$$

Sigui $f(z)$ una funció analítica a tot $\mathbb{C}$. És analítica la funció $g(z) = \tilde{f}(\tilde{z})$? Demostreu que ho és o doneu un contraexemple.

PC.3 Trobeu els desenvolupaments en sèrie de potències de $z - 1$, en els respectius dominis de convergència, de la funció

$$f(z) = \frac{e^{az}}{z - 1} + \frac{1}{z}.$$

Indiqueu de quin tipus de desenvolupament es tracta i calculeu el residu de $f(z)$ en el punt $z = 1$.

PC.4 Sigui I la integral real

$$I = \int_0^1 \sqrt{x(1-x)} \, dx.$$

- (a) Usant el contorn de la figura C.1, on $\epsilon \rightarrow 0^+$, i escollint adientment la branca de $\sqrt{z(z-1)}$, demostreu que

$$I = \frac{i}{2} \oint_{C_R} \sqrt{z(z-1)} \, dz, \quad (\text{C.1})$$

on C_R és una circumferència de radi $R > 1$ centrada a l'origen.

- (b) Desenvolpeu l'integrand de (C.1) en sèrie de Laurent de potències de z , vàlida a la regió $|z| > 1$. Integreu la sèrie terme a terme i calculeu I .

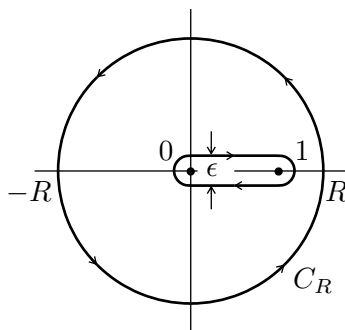


Figura C.1: Contorn d'integració del problema **PC.4**.

- (c) El resultat de l'apartat anterior, contradiu el teorema dels residus? Raoneu la resposta.

PC.5 Feu servir el teorema dels residus i calculeu el valor de la integral real

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 \theta}{1 + 8 \cos^2 \theta} d\theta.$$

SOLUCIONS

SC.1 (a)

$$i^i = e^{i \log i} = e^{i(\frac{\pi}{2} + 2\pi ki)} = e^{-\frac{\pi}{2} - 2\pi k}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

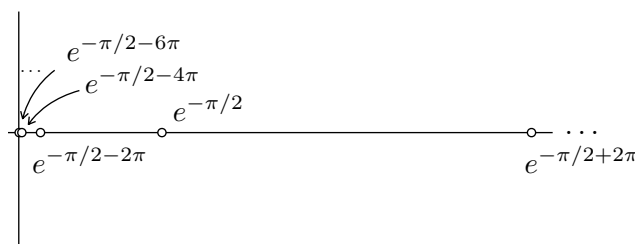


Figura C.2: El conjunt de nombres complexos $e^{-\frac{\pi}{2} - 2\pi k}$, $k \in \mathbb{Z}$.

$$i^i = e^{-\frac{\pi}{2} - 2\pi k}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Aquests valors es representen a la figura C.2.

(b) De la definició de sinh tenim

$$\begin{aligned} \sinh(\xi + i\pi) &= \frac{e^{\xi+i\pi} - e^{-\xi-i\pi}}{2} = \frac{-e^{\xi} + e^{-\xi}}{2} = -\frac{1 + \sqrt{2} - \frac{1}{1+\sqrt{2}}}{2} \\ &= -\frac{(1 + \sqrt{2})^2 - 1}{2(1 + \sqrt{2})} = -\frac{1 + 2\sqrt{2} + 2 - 1}{2(1 + \sqrt{2})} = -1. \end{aligned}$$

Per tant, $\sqrt{\sinh(\xi + i\pi)} = \sqrt{-1} = \pm i$.

$$\sqrt{\sinh(\xi + i\pi)} = \pm i$$

Aquests valors es representen a la figura C.3.

SC.2 Definim, com és habitual, u , v , U , V , com les parts reals i imaginàries de $f(z)$ i de $g(z)$. És a dir,

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y); \quad g(z) = U(x, y) + iV(x, y).$$

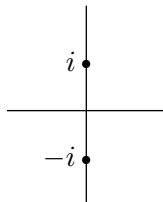


Figura C.3: Els valors complexos $\sqrt{\sinh(\xi + i\pi)} = \pm i$.

Veiem immediatament que

$$U(x, y) + iV(x, y) = g(z) = \tilde{f}(\tilde{z}) = -u(-x, y) + iv(-x, y),$$

i, per tant,

$$U(x, y) = -u(-x, y), \quad V(x, y) = v(-x, y).$$

Provem si les condicions de Cauchy-Riemann es compleixen per a U i V . Si $\eta \stackrel{\text{def}}{=} -x$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} U(x, y) &= -\frac{\partial}{\partial \eta} u(\eta, y) \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \eta} u(\eta, y) \stackrel{(*)}{=} \frac{\partial}{\partial y} v(\eta, y) = \frac{\partial}{\partial y} V(x, y), \\ \frac{\partial}{\partial x} V(x, y) &= \frac{\partial}{\partial \eta} v(\eta, y) \frac{\partial \eta}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial \eta} v(\eta, y) \stackrel{(*)}{=} -\frac{\partial}{\partial y} u(\eta, y) = -\frac{\partial}{\partial y} U(x, y), \end{aligned}$$

on les igualtats assenyalades amb $(*)$ són les condicions de Cauchy-Riemann per a la funció (analítica) f . Veiem, doncs, que les condicions de Cauchy-Riemann,

$$\frac{\partial}{\partial x} U(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} V(x, y), \quad \frac{\partial}{\partial x} V(x, y) = -\frac{\partial}{\partial y} U(x, y),$$

es compleixen per a tot $z \in \mathbb{C}$. Per tant,

$$\boxed{g(z) \text{ és analítica a tot } \mathbb{C}}$$

SC.3 Observem que

$$e^{az} = e^a e^{a(z-1)} = e^a \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n (z-1)^n}{n!}, \quad \forall z \in \mathbb{C},$$

i que

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{1 + (z - 1)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z - 1)^n, \quad |z - 1| < 1,$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{z} &= \frac{1}{(z - 1) + 1} = \frac{1/(z - 1)}{1 + 1/(z - 1)} = \frac{1}{z - 1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(z - 1)^n} \\ &= \frac{1}{z - 1} - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(z - 1)^n}, \quad |z - 1| > 1. \end{aligned}$$

Per tant,

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{e^a}{z - 1} + e^a \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n (z - 1)^{n-1}}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z - 1)^n \\ &= \frac{e^a}{z - 1} + \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{a^{n+1} e^a}{(n+1)!} + (-1)^n \right] (z - 1)^n, \quad 0 < |z - 1| < 1, \end{aligned}$$

$$f(z) = \frac{1 + e^a}{z - 1} - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(z - 1)^n} + e^a \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^{n+1} (z - 1)^n}{(n+1)!}, \quad |z - 1| > 1.$$

Així doncs,

$$f(z) = \begin{cases} \frac{e^a}{z - 1} + \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{a^{n+1} e^a}{(n+1)!} + (-1)^n \right] (z - 1)^n, & 0 < |z - 1| < 1 \\ \frac{1 + e^a}{z - 1} - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(z - 1)^n} + e^a \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^{n+1} (z - 1)^n}{(n+1)!}, & |z - 1| > 1 \end{cases}$$

En tots dos casos es tracta d'un desenvolupament de Laurent. El residu a $z = 1$ es llegeix directament del primer desenvolupament i és

$$\boxed{\operatorname{res}_{z=1} f(z) = e^a}$$

SC.4 (a) Si

$$z = r_0 e^{i\phi_0}, \quad z - 1 = r_1 e^{i\phi_1} \quad \text{amb } -\pi \leq \phi_0, \phi_1 < \pi,$$

escollim la branca de $\sqrt{z(z - 1)}$ definida per

$$\sqrt{z(z - 1)} = \sqrt{r_0 r_1} e^{(\phi_0 + \phi_1)/2}.$$

Notem que si $z = x \pm i\epsilon/2$ amb $x \in [0, 1]$, quan $\epsilon \rightarrow 0^+$ tenim $\phi_0 \rightarrow 0$ i $\phi_1 \rightarrow \pm\pi$ i, per tant,

$$\sqrt{z(z-1)} \rightarrow \sqrt{x(1-x)} e^{\pm i\pi/2} = \pm i\sqrt{x(1-x)}.$$

Notem, també, que els dos contorns semicirculars de la figura C.1 no donen cap contribució en el límit $\epsilon \rightarrow 0^+$, ja que

$$\begin{aligned} - \int_{\zeta} \sqrt{z(z-1)} dz &= \int_{\gamma} \sqrt{z(z-1)} dz \\ &= i \left(\frac{\epsilon}{2}\right)^{3/2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{i\phi} \sqrt{e^{i\phi}[(\epsilon/2)e^{i\phi} - 1]} d\phi \rightarrow 0. \end{aligned}$$

El teorema de Cauchy-Goursat ens permet escriure

$$i \int_0^1 \sqrt{x(1-x)} dx - i \int_1^0 \sqrt{x(1-x)} dx + \oint_{C_R} \sqrt{z(z-1)} dz = 0,$$

és a dir, $2iI = - \oint_{C_R} \sqrt{z(z-1)} dz$. Per tant,

$$I = \frac{i}{2} \oint_{C_R} \sqrt{z(z-1)} dz.$$

(b) L'integrand es pot representar per una sèrie de Laurent en potències de z a la regió $|z| > 1$, ja que és analític en aquesta regió. La sèrie és

$$\sqrt{z(z-1)} = z\sqrt{1 - \frac{1}{z}} = z - \frac{1}{2} - \frac{1}{8} \frac{1}{z} - \frac{1}{16} \frac{1}{z^2} + \dots,$$

i es pot obtenir, per exemple, a partir del desenvolupament en sèrie de Taylor $\sqrt{1-x} = 1 - x/2 - x^2/8 + \dots$. En ser la sèrie convergent, es pot integrar terme a terme. Tenim

$$\oint_{C_R} \frac{dz}{z} = 2\pi i, \quad \oint_{C_R} \frac{dz}{z^n} = 0, \quad n \neq 1,$$

i, per tant,

$$\boxed{I = \frac{\pi}{8}}$$

(c) L'integrand no té pols a l'interior de C_R i si apliquéssim el teorema dels residus hauríem de trobar que la integral sobre aquest contorn és zero.

El teorema dels residus només s'aplica quan les singularitats de l'integrand interiors al contorn d'integració són aïllades. En aquest cas, a l'interior de C_R , la funció $\sqrt{z(z-1)}$ té singularitats que *no* són aïllades (té punts d'embranchament i talls de branca). No hi ha, per tant, cap contradicció, ja que el teorema dels residus no és aplicable.

SC.5 En aquest tipus d'integrals reals cal substituir $e^{i\theta}$ per z , amb la qual cosa

$$\sin \theta = \frac{z - z^{-1}}{2i}, \quad \cos \theta = \frac{z + z^{-1}}{2}, \quad d\theta = -i \frac{dz}{z},$$

i la integració respecte de θ a l'interval $[0, 2\pi]$ es converteix en la integració respecte de z sobre la circumferència C de radi 1 centrada a l'origen. Tenim, doncs,

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 \theta}{1 + 8 \cos^2 \theta} d\theta = \oint_C \frac{(z^2 - 1)^2}{2z^4 + 5z^2 + 2} \frac{idz}{z}.$$

Busquem els zeros del denominador

$$\begin{aligned} (2z^4 + 5z^2 + 2)z &= 2z(z^2 + 2) \left(z^2 + \frac{1}{2} \right) \\ &= 2z \left(z + i\sqrt{2} \right) \left(z - i\sqrt{2} \right) \left(z + \frac{i}{\sqrt{2}} \right) \left(z - \frac{i}{\sqrt{2}} \right). \end{aligned}$$

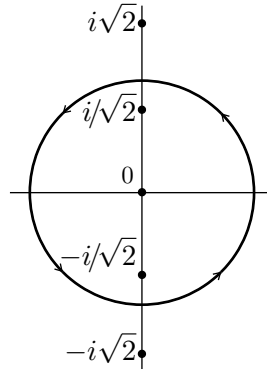


Figura C.4: Contorn d'integració del problema **PC.5**. També es representen els pols de l'integrand.

Per tant, l'integrand té *pols simples* als punts $z = i\sqrt{2}$, $z = -i\sqrt{2}$, $z = 0$, $z = i/\sqrt{2}$, $z = -i/\sqrt{2}$, que s'indiquen a la figura C.4. Notem que únicament els tres últims són interiors al contorn. Els seus residus són

$$k_0 = \frac{i}{8}, \quad k_{i/\sqrt{2}} = -\frac{3i}{16}, \quad k_{-i/\sqrt{2}} = -\frac{3i}{16},$$

i, per tant,

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 \theta}{1 + 8 \cos^2 \theta} d\theta = 2\pi i \left(\frac{i}{8} - \frac{3i}{16} - \frac{3i}{16} \right).$$

Finalment,

$$\boxed{\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 \theta}{1 + 8 \cos^2 \theta} d\theta = \frac{\pi}{2}}$$

Examen D

PD.1 Trobeu i representeu gràficament *totes* les solucions de les equacions

$$(a) \ e^{1/z} = -1, \quad (b) \ z^\pi = 1.$$

PD.2 Considereu la branca del logaritme següent:

$$f(z) = \log r + i\theta, \quad \pi/4 \leq \theta < 9\pi/4,$$

on, com és habitual, $z = re^{i\theta}$.

- (a) Dibuixeu les seves singularitats i el tall de branca.
- (b) Calculeu la sèrie de Laurent de $f(z)$ al voltant del punt $z = 1$.
- (c) Determineu i dibuixeu la regió on
 - i) la sèrie convergeix
 - ii) la sèrie convergeix *cap a la funció* $f(z)$.
- (d) Responen els apartats anteriors considerant la branca principal del logaritme

$$g(z) = \log r + i\theta, \quad -\pi < \theta \leq \pi. \quad (\text{D.1})$$

PD.3 Trobeu els diferents desenvolupaments en sèrie de potències de z de la funció

$$f(z) = \frac{1}{z} \left(\frac{2}{z-2} - \frac{1}{z-1} \right),$$

en els respectius dominis de convergència.

PD.4 Sigui C el *foli de Descartes* $x^3 + y^3 = 6xy/\sqrt[3]{4}$ en el pla complex (on $x + iy = z$) que s'il·lustra a la figura D.1, on també es mostra l'asíptota de C : $x + y + 2/\sqrt[3]{4} = 0$. Trobeu el valor de les integrals

$$(a) \int_C \frac{dz}{(z-1-i)^2} \quad (b) \int_C \frac{dz}{z^2 - 2i}$$

Nota: Tant l'equació de C com la de la seva asíptota no són necessàries per calcular les integrals que es demanen. Us caldrà tancar el contorn d'alguna forma.

PD.5 Calculeu la integral real

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)},$$

on $a > b > 0$.

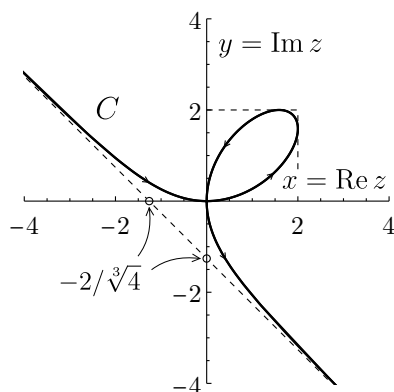


Figura D.1: Foli de Descartes $x^3 + y^3 = 6xy/\sqrt[3]{4}$ i la seva asymptota $x + y + 2/\sqrt[3]{4} = 0$.

SOLUCIONS

SD.1 (a)
$$z_n = \frac{i}{(2n+1)\pi}, \quad n \in \mathbb{Z}$$

Aquest conjunt es representa a la figura D.2.

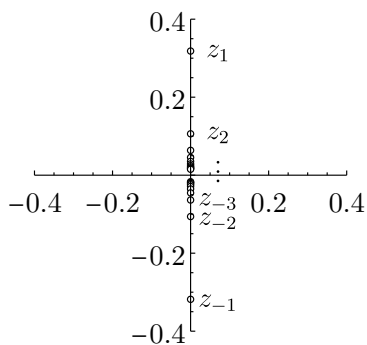


Figura D.2: Els valors complexos $i/[(2n+1)\pi]$, $n \in \mathbb{Z}$.

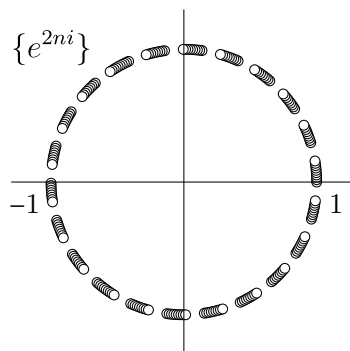


Figura D.3: Els 200 primers valors del conjunt $\{e^{2ni}\}$. S'observa com aquests punts van poblant densament la circumferència $|z| = 1$.

(b)
$$z_n = e^{2ni}, \quad n \in \mathbb{Z}$$

Els nombres $\{z_n\}$ poblen densament la circumferència unitat. Es representen a la figura D.3.

SD.2 (a) Les singularitats i tall de branca de $f(z)$ es mostren a la figura D.4.

(b) Al voltant del punt $z = 1$ la branca donada del logaritme és derivable

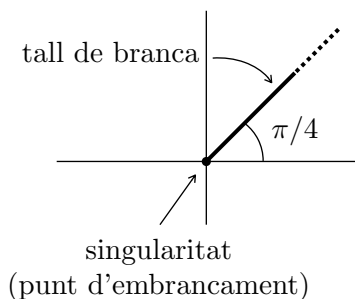


Figura D.4: Tall de branca i punt d'embranchament de $f(z)$ al problema **PD.2**.

i $f'(z) = 1/z$. Per tant,

$$f'(z) = \frac{1}{1 - (1 - z)} = \sum_{n=0}^{\infty} (1 - z)^n, \quad (\text{D.2})$$

i si integrem terme a terme obtenim $f(z) = k - \sum_{n=1}^{\infty} (1 - z)^n/n$. La constant d'integració és $k = f(1) = 2\pi i$, ja que 2π és l'únic argument d'1 comprès entre $\pi/4$ i $9\pi/4$. Així doncs,

$$f(z) = 2\pi i - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1 - z)^n}{n} \quad (\text{D.3})$$

Una altra manera, més directa, d'arribar a aquest resultat és adonar-se que la sèrie buscada és de Taylor i que, per tant, la podem obtenir calculant les derivades successives del logaritme a $z = 1$.

(c) i. La sèrie (D.3) convergeix a la regió circular $|z - 1| < 1$ (vegeu la figura D.5), ja que aquest és el disc de convergència de la sèrie (D.2).

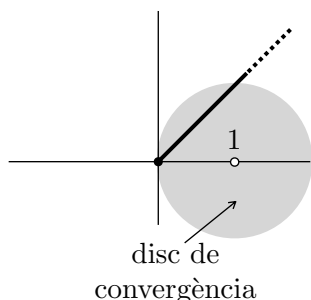


Figura D.5: Disc de convergència de la sèrie (D.3).

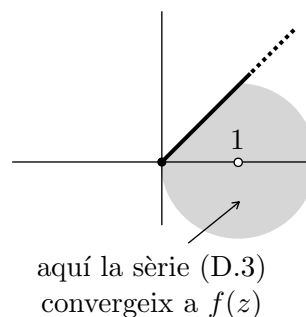


Figura D.6: Regió on la sèrie (D.3) convergeix a $f(z)$.

ii. Notem, però, que la sèrie (D.3) només convergeix a la funció $f(z)$ a la regió indicada a la figura D.6.

(d) *Apartat (a) per a la funció $g(z)$* : les singularitats i tall de branca de $g(z)$ en aquest cas es mostren a la figura D.7.

Apartat (b) per a la funció $g(z)$: la constant d'integració és ara $k = g(1) = 0$, ja que 0 és l'únic argument d'1 comprès entre $-\pi$ i π . Per tant,

$$g(z) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-z)^n}{n} \quad (\text{D.4})$$

Apartat (c) per a la funció $g(z)$: la sèrie (D.4) és convergent a la regió circular $|z-1| < 1$ (vegeu figura D.8) i convergeix a $g(z)$ en tot aquest disc.

SD.3 Si descomponem en fraccions simples, tenim

$$\frac{1}{z} \frac{2}{z-2} = -\frac{1}{2-z} - \frac{1}{z}, \quad -\frac{1}{z} \frac{1}{z-1} = \frac{1}{1-z} + \frac{1}{z}.$$

Si sumem aquestes igualtats veiem que els termes z^{-1} es cancel·len i que

$$f(z) = \frac{1}{1-z} - \frac{1}{2-z}.$$

Les singularitats de $f(z)$ són, doncs, $z = 1$ i $z = 2$. El punt $z = 0$ és una singularitat evitable que desapareix si definim $f(0) = 1/2$.

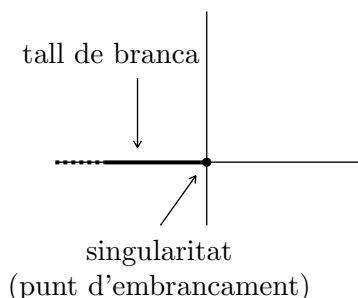


Figura D.7: Tall de branca i punt d'embranchament de $g(z)$ al problema **PD.2**.

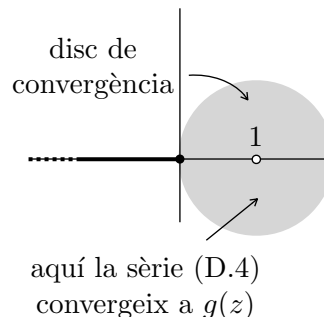


Figura D.8: Disc de convergència de la sèrie (D.4). La sèrie convergeix a $g(z)$ en tot el disc.

En el cercle $|z| < 1$ fem els desenvolupaments

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n, \quad |z| < 1,$$

$$\frac{1}{2-z} = \frac{1}{2} \frac{1}{1-z/2} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n, \quad |z| < 2.$$

Per tant,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) z^n, \quad |z| < 1$$

A la corona $1 < |z| < 2$,

$$\frac{1}{1-z} = -\frac{1}{z} \frac{1}{1-1/z} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{n+1}}, \quad |z| > 1,$$

i, per tant,

$$f(z) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^n} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}}, \quad 1 < |z| < 2$$

Finalment, a la regió $|z| > 2$,

$$\frac{1}{2-z} = -\frac{1}{z} \frac{1}{1-2/z} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{z^{n+1}}, \quad |z| > 2,$$

i, per tant,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n - 1}{z^{n+1}}, \quad |z| > 2$$

SD.4 (a) Tanquem el contorn afegint al foli de Descartes $C (= C_O \cup C_T)$ el tros de circumferència C_R de radi R centrada a $z_0 = 1+i$ (vegeu la figura D.9) i separem el contorn sencer pel punt $z = 0$ (on el foli es talla a ell mateix) en dos contorns tancats, C_T i $C_O \cup C_R$. Notem que la integral sobre el contorn C_R és zero en el límit $R \rightarrow \infty$, ja que

$$\begin{aligned} \left| \int_{C_R} \frac{dz}{(z-1-i)^2} \right| &\leq \int_{-\theta_0}^{\theta_0-3\pi/2} \frac{|iRe^{i\theta}d\theta|}{|R^2e^{2i\theta}|} = \frac{1}{R} \int_{\theta_0}^{3\pi/2-\theta_0} d\theta \\ &= \frac{1}{R} \left(\frac{3\pi}{2} - 2\theta_0 \right) \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

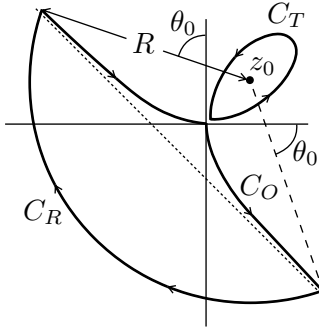


Figura D.9: Contorns emprats a la solució del problema **PD.4** (a).

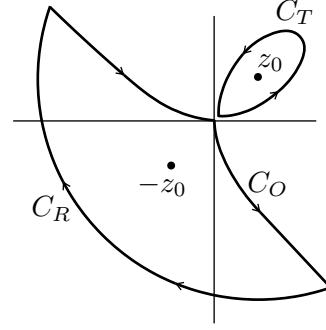


Figura D.10: Contorns emprats a la solució del problema **PD.4** (b).

Per tant, en aquest límit tenim

$$\int_{C_O} \frac{dz}{(z-1-i)^2} = \oint_{C_R \cup C_O} \frac{dz}{(z-1-i)^2} = 0,$$

ja que el contorn tancat $C_R \cup C_O$ no conté cap singularitat. Notem també que

$$\oint_{C_T} \frac{dz}{(z-1-i)^2} = 0,$$

ja que el residu de $(z-1-i)^{-2}$ a z_0 és zero. Per tant,

$$\boxed{\int_C \frac{dz}{(z-1-i)^2} = 0}$$

(b) Primer de tot observem que

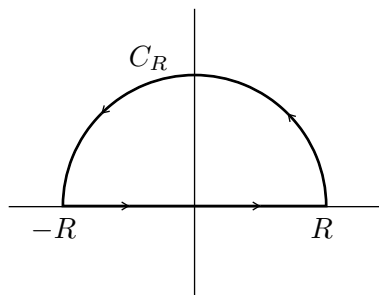
$$z^2 - 2i = (z-1-i)(z+1+i).$$

Tanquem el contorn exactament com a l'apartat anterior. El tros C_R ara tampoc contribueix, ja que

$$\begin{aligned} \left| \int_{C_R} \frac{dz}{z^2 - 2i} \right| &\leq \int_{-\theta_0}^{\theta_0 - 3\pi/2} \frac{|iRe^{i\theta}d\theta|}{|Re^{i\theta}| |Re^{i\theta} + 2 + 2i|} \leq \int_{\theta_0}^{3\pi/2 - \theta_0} \frac{d\theta}{|R - 2\sqrt{2}|} \\ &= \frac{1}{|R - 2\sqrt{2}|} \left(\frac{3\pi}{2} - 2\theta_0 \right) \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

La diferència amb l'apartat anterior és que ara hi ha també un pol a l'interior de $C_R \cup C_O$. Els residus són

$$\operatorname{res}_{z=\pm z_0} \left(\frac{1}{z^2 - 2i} \right) = \frac{1}{2z} \Big|_{z=\pm(1+i)} = \pm \frac{1}{2(1+i)} = \pm \frac{1-i}{4}.$$

Figura D.11: Contorn del problema **PD.5**.

Apliquem ara el teorema dels residus a C_T i $C_R \cup C_O$ (recordem que es recorre en sentit negatiu) separatament

$$\int_C \frac{dz}{z^2 - 2i} = 2\pi i \left[\frac{1-i}{4} - \left(-\frac{1-i}{4} \right) \right],$$

i la solució és

$$\boxed{\int_C \frac{dz}{z^2 - 2i} = \pi(1+i)}$$

SD.5 Si

$$I = \int_0^\infty \frac{dx}{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)},$$

com que l'integrand és una funció parella, tenim $I = (1/2) \lim_{R \rightarrow \infty} I_R$, on

$$I_R = \int_{-R}^R \frac{dx}{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)}.$$

Segui C el contorn tancat $[-R, R] \cup C_R$ de la figura D.11. Considerem la integral

$$\begin{aligned} \mathcal{J} &\stackrel{\text{def}}{=} \int_C \frac{dz}{(z^2 + a^2)(z^2 + b^2)} = I_R + \int_{C_R} \frac{dz}{(z^2 + a^2)(z^2 + b^2)} \\ &\stackrel{\text{def}}{=} I_R + I'_R. \end{aligned} \tag{D.5}$$

Sobre el contorn C_R tenim $z = Re^{i\theta}$, $dz = Re^{i\theta} i d\theta$ i, per tant,

$$|I'_R| \leq \int_0^\pi \frac{R d\theta}{|R^2 - a^2||R^2 - b^2|} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0,$$

on hem usat que

$$|z^2 + a^2| \geq ||z|^2 - a^2|$$

(anàlogament per a $|z^2 + b^2|$). Això vol dir que $I'_R = 0$ en el límit $R \rightarrow \infty$.

L'integrand de $\mathcal{J}$ té quatre pols simples a $z = \pm ia$ i $z = \pm ib$. Només $z = ia$ i $z = ib$ són a l'interior del contorn. Els residus són

$$k_{ia} = \frac{1}{(z + ia)(z^2 + b^2)} \Big|_{z=ia} = \frac{1}{2ia} \frac{1}{(b^2 - a^2)},$$

$$k_{ib} = \frac{1}{(z + ib)(z^2 + a^2)} \Big|_{z=ib} = \frac{1}{2ib} \frac{1}{(a^2 - b^2)}.$$

Per tant, el teorema dels residus ens permet escriure

$$\mathcal{J} = 2\pi i (k_{ia} + k_{ib}).$$

Llavors, si fem el límit $R \rightarrow \infty$ a (D.5) tenim

$$I = \frac{1}{2}(2\pi i) (k_{ia} + k_{ib}) = \frac{\pi}{2} \frac{1}{b^2 - a^2} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) = \frac{\pi}{2ab} \frac{1}{a + b}.$$

La solució és, doncs,

$$\boxed{\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)} = \frac{\pi}{2ab} \frac{1}{a + b}}$$

Examen E

PE.1 (a) Obtingueu i representeu gràficament *totes* les solucions de l'equació $\sin z = \sqrt{2}$.

(b) Comproveu que tots aquests valors satisfan $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$.

PE.2 Considereu la branca principal del logaritme:

$$\log z = \log r + i\theta, \quad -\pi < \theta \leq \pi,$$

on, com és habitual, $z = re^{i\theta}$. Calculeu els tres primers termes (els d'exponent més baix) de les sèries de Laurent (si existeixen) de

$$f(z) = 1/\log z$$

al voltant dels punts $z = 1$, $z = 0$ i $z = e$. Determineu en cada cas la regió de convergència i dibuixeu-la.

PE.3 Sigui $z = x + iy$, sigui $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ una funció analítica en un domini D del pla complex i sigui ρ un nombre real positiu més petit

que la distància mínima de z a la frontera de D . Mitjançant la fórmula integral de Cauchy, calculeu

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(x + \rho \cos \phi, y + \rho \sin \phi) d\phi.$$

Ajut: El resultat és una de les possibilitats següents: 0 , $u(x + \rho, y + \rho)$, $f(\rho)$, $u(\rho, \rho)$, $u(x, y)$, $v(x, y)$.

PE.4 Amb el teorema de la sèrie de Laurent, determineu l'expressió més general d'una funció $f(z)$ analítica en *tot* el pla $\mathbb{C}$ i tal que

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{f(z)}{z^2} = 0.$$

PE.5 Feu servir el contorn de la figura E.1 i calculeu amb el mètode dels residus les integrals

$$I_{\pm} = \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^4 \pm 6x^2 + 25},$$

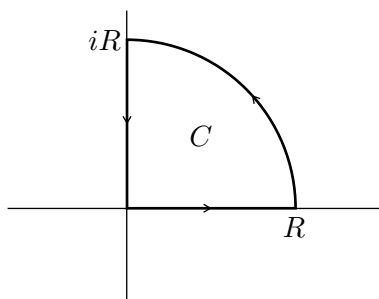


Figura E.1: Contorn utilitzat al problema **PE.5**

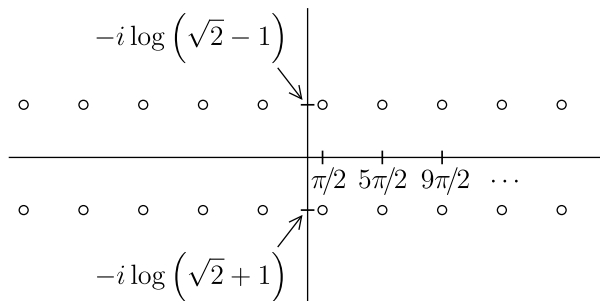


Figura E.2: El conjunt dels nombres complexos de la forma $(1/2 + 2k)\pi - i \log(\sqrt{2} \pm 1)$, $k \in \mathbb{Z}$.

Ajut: Per trobar les arrels del denominador, observeu que

$$z^4 + 6z^2 + 25 = (z^2 - 2z + 5)(z^2 + 2z + 5).$$

PE.6 Calculeu amb el mètode dels residus

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{3 + \cos \theta + 2 \sin \theta}.$$

SOLUCIONS

SE.1 (a)

$$\begin{aligned}\sin z &= \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \sqrt{2} \Rightarrow e^{iz} - i2\sqrt{2} - e^{-iz} = 0 \\ &\Rightarrow (e^{iz})^2 - i2\sqrt{2}e^{iz} - 1 = 0 \Rightarrow e^{iz} = i(\sqrt{2} \pm 1). \quad (\text{E.1})\end{aligned}$$

Per tant,

$$iz = \log \left\{ i(\sqrt{2} \pm 1) \right\} = \log(\sqrt{2} \pm 1) + i \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k \right), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Així doncs,

$$z = \left(\frac{1}{2} + 2k \right) \pi - i \log(\sqrt{2} \pm 1), \quad k \in \mathbb{Z}$$

(b)

$$\begin{aligned}\cos z &= \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \frac{i}{2} \left(\sqrt{2} \pm 1 - \frac{1}{\sqrt{2} \pm 1} \right) \\ &= \frac{i}{2(\sqrt{2} \pm 1)} \left[(\sqrt{2} \pm 1)^2 - 1 \right] = \pm i,\end{aligned}$$

on hem usat (E.1) a la segona igualtat. Per tant,

$$\sin^2 z + \cos^2 z = 2 + (\pm i)^2 = 1.$$

SE.2 i. Sèrie al voltant de $z = 1$:

$$\begin{aligned}-\log z &= -\log [1 - (1 - z)] \\ &= (1 - z) + \frac{(1 - z)^2}{2} + \frac{(1 - z)^3}{3} + \dots \\ &= (1 - z) \left[1 + \frac{(1 - z)}{2} + \frac{(1 - z)^2}{3} \dots \right].\end{aligned}$$

Per tant,

$$\begin{aligned}\frac{1}{\log z} &= -\frac{1}{1 - z} \cdot \frac{1}{1 + \frac{(1-z)}{2} + \frac{(1-z)^2}{3} + \dots} \\ &= -\frac{1}{1 - z} \left\{ 1 - \left[\frac{(1 - z)}{2} + \frac{(1 - z)^2}{3} + \dots \right] \right. \\ &\quad \left. + \left[\frac{(1 - z)}{2} + \frac{(1 - z)^2}{3} + \dots \right]^2 + \dots \right\} \\ &= -\frac{1}{1 - z} \left\{ 1 - \frac{1 - z}{2} - \frac{(1 - z)^2}{3} + \frac{(1 - z)^2}{2^2} + \dots \right\}.\end{aligned}$$

Combinant els dos últims termes obtenim

$$\frac{1}{\log z} = \frac{1}{z-1} + \frac{1}{2} - \frac{z-1}{12} + \dots, \quad 0 < |z-1| < 1$$

ii. Sèrie al voltant de $z = 0$:

no existeix perquè $z = 0$ és un punt d'embranchament

$$\begin{aligned} \text{iii. Sèrie al voltant de } z = e: \log z &= \log \left[e \left(1 - \frac{e-z}{e} \right) \right] \\ &= 1 - \frac{e-z}{e} - \frac{(e-z)^2}{2e^2} + \dots \end{aligned}$$

Per tant,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\log z} &= \frac{1}{1 - \frac{e-z}{e} - \frac{(e-z)^2}{2e^2} + \dots} \\ &= 1 + \left[\frac{e-z}{e} + \frac{(e-z)^2}{2e^2} + \dots \right] + \left[\frac{e-z}{e} + \frac{(e-z)^2}{2e^2} + \dots \right]^2 + \dots \\ &= 1 + \frac{e-z}{e} + \frac{(e-z)^2}{2e^2} + \left(\frac{e-z}{e} \right)^2 + \dots \end{aligned}$$

Combinant els termes quadràtics obtenim

$$\frac{1}{\log z} = 1 - \frac{z-e}{e} + \frac{3(z-e)^2}{2e^2} + \dots, \quad |z-e| < e-1$$

Les regions de convergència de les sèries obtingudes i les diverses singularitats de $f(z)$ es mostren a la figura E.3.

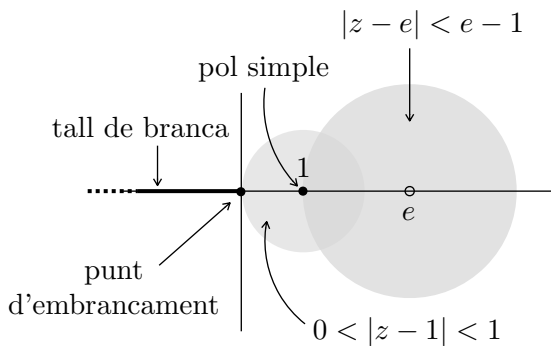


Figura E.3: Discs de convergència i singularitats de la funció $f(z) = 1/\log z$.

SE.3 Sigui C una circumferència de centre z i radi ρ . Com que la funció $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ és analítica sobre i a l'interior a C , tenim

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(w)}{w - z} dw.$$

Si parametritzem $w = z + \rho e^{i\phi}$, $dw = \rho e^{i\phi} i d\phi$ tenim

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z + \rho e^{i\phi}) d\phi,$$

i prenent la part real

$$\boxed{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(x + \rho \cos \phi, y + \rho \sin \phi) d\phi = u(x, y)}$$

SE.4

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{f(z)}{z^2} = 0 \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists R : \left| \frac{f(z)}{z^2} \right| < \epsilon \text{ si } |z| > R.$$

Per tant, per a cada ϵ donat, si $z = re^{i\phi}$ i $r > R$ tindrem

$$\frac{|f(re^{i\phi})|}{r^2} < \epsilon.$$

D'altra banda, en ser $f(z)$ analítica a tot $\mathbb{C}$,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad \forall z \in \mathbb{C},$$

on

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz,$$

i C és qualsevol contorn tancat que envolti l'origen. Si com a contorn C escollim una circumferència de radi $r > \max\{1, R\}$ i centre $z = 0$, tenim

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(re^{i\phi})}{(re^{i\phi})^{n+1}} re^{i\phi} i d\phi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(re^{i\phi})}{r^n e^{in\phi}} d\phi,$$

i, per tant,

$$\begin{aligned} |a_n| &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{|f(re^{i\phi})|}{r^2} \frac{1}{r^{n-2}} d\phi \\ &< \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\epsilon}{r^{n-2}} d\phi = \frac{\epsilon}{r^{n-2}} \leq \epsilon \quad (\text{si } n \geq 2). \end{aligned}$$

En ser a_n nombres complexos determinats (independents de r), aquesta última desigualtat vol dir que $a_n = 0$ per a $n \geq 2$. Per tant,

$$f(z) = a_0 + a_1 z, \quad a_0, a_1 \in \mathbb{C}$$

Un raonament alternatiu per arribar a aquest resultat és que, en ser $f(z)$ analítica a tot el pla complex, es pot expressar

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k, \quad \forall z \in \mathbb{C},$$

i, per tant,

$$\begin{aligned} \frac{f(z)}{z^2} &= \frac{a_0}{z^2} + \frac{a_1}{z} + \sum_{k=2}^{\infty} a_k z^{k-2} \\ &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{a_0}{z^2} + \frac{a_1}{z} + g(z), \end{aligned}$$

on $g(z)$ també és analítica a tot $\mathbb{C}$. Com que $\lim_{|z| \rightarrow \infty} f(z)/z^2 = 0$, i els dos primers termes també tendeixen a zero, es conclou que $\lim_{|z| \rightarrow \infty} g(z) = 0$. Això vol dir que $|g(z)|$ és fitada a tot el pla complex, ja que si, per exemple, considerem un disc $|z| \leq \rho$, podem fer $|g(z)|$, fora del disc, tan petit com vulguem prenent ρ suficientment gran, mentre que al disc, $|g(z)|$ és fitada perquè és contínua i el disc és un conjunt compacte.

El teorema de Liouville ens assegura que si $g(z)$ és analítica i de mòdul fitat a tot el pla complex, ha de ser constant. En aquest cas, $g(z) = 0$, ja que el seu límit quan $|z| \rightarrow \infty$ és zero. Així doncs,

$$\frac{f(z)}{z^2} = \frac{a_0}{z^2} + \frac{a_1}{z} \Rightarrow f(z) = a_0 + a_1 z.$$

SE.5 Considerem la integral

$$\oint_C \frac{dz}{z^4 + 6z^2 + 25},$$

on C és el contorn de la figura E.1. Per obtenir els residus hem de trobar els zeros de $z^4 + 6z^2 + 25$. Si fem servir la informació de l'enunciat, això és equivalent a trobar els zeros de $z^2 + 2z + 5$. Un senzill càlcul ens dona els quatre zeros següents:

$$1 \pm 2i, \quad -(1 \pm 2i).$$

Per tant, tenim

$$z^4 + 6z^2 + 25 = (z - 1 - 2i)(z + 1 + 2i)(z - 1 + 2i)(z + 1 - 2i).$$

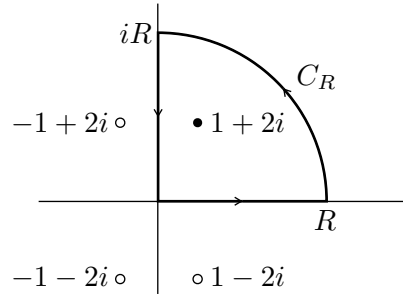


Figura E.4: Pols de $1/(z^4 + 6z^2 + 25)$. Només $1 + 2i$ és interior al contorn d'integració.

Aquests quatre zeros són pols simples de la funció $1/(z^4 + 6z^2 + 25)$ i estan representats a la figura E.4. L'únic pol interior al contorn d'integració és $z = 1 + 2i$. El residu és

$$\begin{aligned} k_{1+2i} &= \lim_{z \rightarrow 1+2i} \left[\frac{(z - 1 - 2i)}{(z + 1 + 2i)(z - 1 + 2i)(z + 1 - 2i)(z - 1 - 2i)} \right] \\ &= \frac{1}{(z + 1 + 2i)(z - 1 + 2i)(z + 1 - 2i)} \Big|_{z=1+2i} \\ &= \frac{1}{(2 + 4i)(4i)(2)} = \frac{1}{16i(1 + 2i)} \cdot \frac{1 - 2i}{1 - 2i} = \frac{1 - 2i}{80i}. \end{aligned}$$

Pel teorema dels residus tenim

$$\oint_C \frac{dz}{z^4 + 6z^2 + 25} = 2\pi i \frac{1 - 2i}{80i} = \frac{\pi(1 - 2i)}{40}. \quad (\text{E.2})$$

La contribució de C_R és zero en el límit $R \rightarrow \infty$, ja que, per exemple,

$$|z^4 + 6z^2 + 25| = |z^2 - (1 + 2i)^2| |z^2 - (1 - 2i)^2| \geq (R^2 - 5)^2,$$

on hem usat la desigualtat $|z - w| \geq ||z| - |w||$. Per tant,

$$\left| \int_{C_R} \frac{dz}{z^4 + 6z^2 + 25} \right| \leq \frac{\pi R}{2(R^2 - 5)^2} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0.$$

La integral sobre l'eix real és

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^4 + 6x^2 + 25} = I_+,$$

mentre que la integral sobre l'eix imaginari és

$$\int_\infty^0 \frac{d(ix)}{(ix)^4 + 6(ix)^2 + 25} = -i \int_0^\infty \frac{dx}{x^4 - 6x^2 + 25} = -iI_-.$$

Així doncs, en el límit $R \rightarrow \infty$ tenim

$$\oint_C \frac{dz}{z^4 + 6z^2 + 25} = I_+ - iI_-.$$

Si ho comparem amb (E.2) arribem a

$$\boxed{I_+ = \frac{\pi}{40}, \quad I_- = \frac{\pi}{20}}$$

SE.6 Si

$$I \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{3 + \cos \theta + 2 \sin \theta},$$

i substituïm $e^{i\theta} = z$, $d\theta = -idz/z$, tenim

$$\begin{aligned} I &= \oint_C \frac{2iz(-idz/z)}{(2+i)z^2 + 6iz - (2-i)} = \oint_C \frac{2dz}{[z + (1+2i)][(2+i)z + i]} \\ &= \frac{2}{2+i} \oint_C \frac{dz}{[z + (1+2i)][z + \frac{i}{2+i}]}, \end{aligned}$$

on C és la circumferència $|z| = 1$. Només el pol situat a $z = -i/(2+i)$ és interior al contorn i el residu és

$$k = \frac{2}{2+i} \frac{1}{\frac{-i}{2+i} + 1 + 2i} = \frac{1}{2i}.$$

Per tant, $I = 2\pi i \left(\frac{1}{2i}\right) = \pi$, és a dir,

$$\boxed{\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{3 + \cos \theta + 2 \sin \theta} = \pi}$$

Examen F

PF.1 Trobeu tots els nombres *reals* a , b , α i β per als quals es compleix

$$a e^{i\alpha} + b e^{i\beta} = 0.$$

PF.2 Sigui $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, on $z = x + iy$. Trobeu la funció $v(x, y)$ per tal que $f(z)$ sigui analítica i especifiqueu el domini d'analiticitat, si

(a) $u(x, y) = 1 - 2xy$

(b) $u(x, y) = 1 - 2(x^2 + y^2)$

PF.3 (a) Amb el teorema de la sèrie de Laurent, determineu l'expressió més general d'una funció $g(z)$ analítica en *tot* el pla $\mathbb{C}$ i tal que

$$\lim_{z \rightarrow \infty} g(z) = 0.$$

(b) Una funció $f(z)$ té un pol doble a $z = 0$ i és analítica a la resta del pla $\mathbb{C}$. Sabem que $f(1/2) = 4$, que $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = 0$ i que

$$\oint_{C_{\square}} f(z) = 0,$$

on $C_{\square}$ és el contorn quadrat de la figura F.1. Determineu $f(z)$.

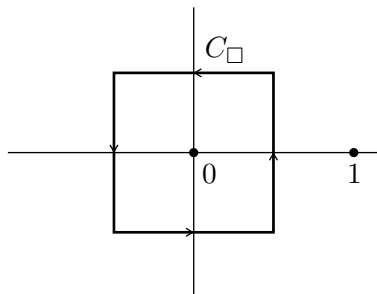


Figura F.1: Contorn del problema **PF.3**.

PF.4 Considereu la funció $f(z) = \frac{z}{1+z^2}$. Trobeu *tots* els desenvolupaments en sèrie de Laurent de $f(z)$,

(a) en potències de z

(b) en potències de $z + i$

Especifiqueu o dibuixeu les regions de convergència.

PF.5 Calculeu la integral

$$I = \int_0^{\infty} \frac{x \sin ax}{(1+x^2)^2} dx,$$

on a és un nombre real positiu.

SOLUCIONS

SF.1 Tenim que

$$a e^{i\alpha} = -b e^{i\beta}. \quad (\text{F.1})$$

Dos nombres complexos són iguals si ho són els seus mòduls i els seus arguments difereixen en múltiples enters de 2π . Per tant,

- si a i b tenen el mateix signe, (F.1) es pot escriure $|a| e^{i\alpha} = |b| e^{i\beta+i\pi}$, i tenim

$$a = b, \alpha = \beta + (2n + 1)\pi, n \in \mathbb{Z}$$

- si a i b tenen signes oposats, (F.1) es pot escriure $|a| e^{i\alpha} = |b| e^{i\beta}$, i tenim

$$a = -b, \alpha = \beta + 2n\pi, n \in \mathbb{Z}$$

SF.2 (a) La funció $u(x, y)$ és harmònica, ja que

$$u_{xx} = u_{yy} = 0 \quad \Rightarrow \quad u_{xx} + u_{yy} = 0$$

i, per tant, és la part real d'una funció $f(z)$ analítica. Per les condicions de Cauchy-Riemann tenim

$$v_y = u_x = -2y \quad \Rightarrow \quad v = -y^2 + g(x),$$

on $g(x)$ és una funció arbitrària. Per l'altra condició de Cauchy-Riemann tenim

$$g'(x) = v_x = -u_y = 2x \quad \Rightarrow \quad g(x) = x^2 + \text{constant}.$$

Per tant,

$$v(x, y) = x^2 - y^2 + \text{constant}$$

L'expressió de $f(z)$ com a funció de z es pot trobar fent les substitucions

$$x = (z + z^*)/2, \quad y = (z - z^*)/2i$$

a la funció $u(z, y) + iv(x, y)$, i s'obté $f(z) = iz^2 + \text{constant}$. El seu domini d'analiticitat és tot el pla complex.

(b) La funció no és harmònica, ja que

$$u_{xx} = u_{yy} = -4 \quad \Rightarrow \quad u_{xx} + u_{yy} = -8 \neq 0.$$

Per tant, no existeix cap funció $v(x, y)$ tal que $f = u + iv$ sigui analítica.

No existeix

SF.3 (a) En ser $g(z)$ analítica en tot el pla complex, admet un desenvolupament en sèrie de Taylor $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ que convergeix a tot el pla. Els coeficients són

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{g(z)}{z^{n+1}} dz,$$

on C és un contorn tancat qualsevol que envolti el punt $z = 0$.

El significat de $\lim_{z \rightarrow \infty} g(z) = 0$ és: $\forall \epsilon > 0, \exists M$ tal que $|g(z)| < \epsilon$, si $|z| > M$. Així doncs, si per cada ϵ donat escollim com a contorn C una circumferència de radi $R > \max\{1, M\}$ i parametritzem $z = Re^{i\theta}$, $\theta \in [0, 2\pi]$, $dz = Re^{i\theta} i d\theta$, tenim

$$|a_n| \leq \frac{1}{2\pi} \oint_C \frac{|g(z)|}{|z|^{n+1}} |dz| = \frac{1}{2\pi R^n} \int_0^{2\pi} |f(Re^{i\theta})| d\theta < \frac{\epsilon}{R^n} \leq \epsilon,$$

d'on deduïm que $a_n = 0, \forall n \geq 0$. Així doncs,

$$\boxed{g(z) = 0}$$

(b) La funció $f(z)$ ha de ser de la forma

$$f(z) = \frac{a_{-2}}{z^2} + \frac{a_{-1}}{z} + g(z),$$

on $g(z)$ és analítica. Com que els dos primers sumands tendeixen a zero quan $|z| \rightarrow \infty$, la condició $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = 0$ implica que $\lim_{z \rightarrow \infty} g(z) = 0$ i, d'acord amb l'apartat anterior, això vol dir que $g(z) = 0$.

D'altra banda, en ser $\oint_{C_{\square}} f(z) = 0$, pel teorema dels residus tenim que $a_{-1} = 0$. Per tant, $f(z) = a_{-2}/z^2$. Determinem a_{-2} amb la condició $f(1/2) = 4$:

$$4 = f(1/2) = \frac{a_{-2}}{(1/2)^2} = 4a_{-2},$$

és a dir, $a_{-2} = 1$. Així arribem a

$$\boxed{f(z) = 1/z^2}$$

SF.4 (a) La funció $z/(1+z^2)$ té singularitats a $z = \pm i$. Com que busquem desenvolupaments al voltant de $z = 0$ (que no és una singularitat), les diferents sèries (de potències de z) convergiran al disc $|z| < 1$ (sèrie de Taylor) i a la corona $|z| > 1$ (sèrie de Laurent). Aquestes regions es representen a la figura F.2, que també mostra els pols de $f(z)$. A la regió $|z| < 1$ tenim

$$\frac{z}{z^2 + 1} = \frac{z}{1 - (-z^2)} = z \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n+1},$$

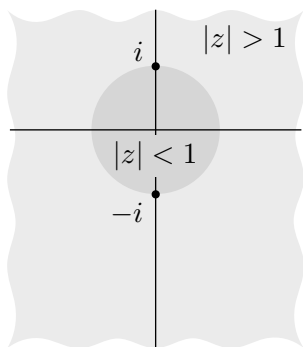


Figura F.2: Regions de convergència de les sèries (F.2).

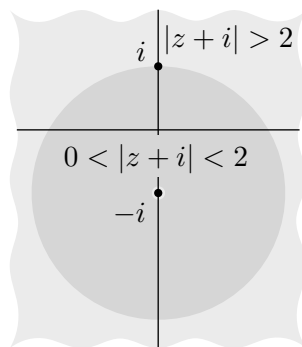


Figura F.3: Regions de convergència de les sèries (F.4).

i a la regió $|z| > 1$

$$\frac{z}{z^2 + 1} = \frac{1}{z} \frac{1}{1 - (-1/z^2)} = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{z^{2n}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{z^{2n+1}}.$$

Així doncs,

$$f(z) = \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n+1}, & |z| < 1 \\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{z^{2n+1}}, & |z| > 1 \end{cases} \quad (\text{F.2})$$

(b) Ara els desenvolupaments són al voltant de $z = -i$ (que és una singularitat), les diferents sèries (de potències de $z + i$) convergiran a les corones $0 < |z + i| < 2$ (sèrie de Laurent) i $|z + i| > 2$ (sèrie de Laurent). Aquestes regions es representen a la figura F.3. Descomponem la funció en fraccions simples

$$\frac{z}{z^2 + 1} = \frac{1/2}{z + i} + \frac{1/2}{z - i}. \quad (\text{F.3})$$

El primer terme ja és una potència de $z + i$ i està definit per $\forall z \neq -i$. A la corona més interna, escrivim el segon terme en la forma

$$\frac{1/2}{z + i - 2i} = -\frac{1/2}{2i[1 - (z + i)/(2i)]} = -\frac{1}{4i} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z + i}{2i}\right)^n,$$

que és convergent quan $|(z + i)/(2i)| < 1$, és a dir, quan $|z + i| < 2$. Llavors, ho substituïm a (F.3) i arribem a

$$\frac{z}{z^2 + 1} = \frac{1/2}{z + i} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n i^{n+1}}{2^{n+2}} (z + i)^n, \quad 0 < |z + i| < 2.$$

A la corona $|z + i| > 2$ hem d'expressar el segon terme de (F.3) com

$$\begin{aligned} \frac{1/2}{z + i - 2i} &= \frac{1/2}{(z + i)[1 - 2i/(z + i)]} \\ &= \frac{1/2}{(z + i)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2i)^n}{(z + i)^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1} i^n}{(z + i)^{n+1}} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{2^{k-2} i^{k-1}}{(z + i)^k}, \end{aligned}$$

on hem redefinit l'índex de sumació $k = n + 1$. Ho substituïm a (F.3) i tenim

$$f(z) = \frac{1}{z + i} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^{n-2} i^{n-1}}{(z + i)^n}, \quad |z + i| > 2.$$

Així doncs,

$$f(z) = \begin{cases} \frac{1}{2} \frac{1}{z + i} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n i^{n+1}}{2^{n+2}} (z + i)^n, & |z + i| < 2; \\ \frac{1}{z + i} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^{n-2} i^{n-1}}{(z + i)^n}, & |z + i| > 2. \end{cases} \quad (\text{F.4})$$

SF.5 En ser l'integrand una funció parella, tenim

$$I = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin ax}{(1 + x^2)^2} dx.$$

Aquesta integral és del segon tipus dels descrits a la secció 5.3 i, per tant,

$$I = \frac{1}{2} \operatorname{Im} \left[2\pi i \left(\begin{array}{c} \text{suma de tots els residus de} \\ \frac{ze^{iaz}}{(z^2 + 1)^2} \\ \text{en el semiplà } \operatorname{Im} z > 0 \end{array} \right) \right].$$

La funció només té un pol doble al semiplà $\operatorname{Im} z > 0$, en el punt $z = i$. El residu és

$$k_i = \lim_{z \rightarrow i} \left\{ \frac{d}{dz} \left[(z - i)^2 \frac{ze^{iaz}}{(z^2 + 1)^2} \right] \right\} = \frac{ae^{-a}}{4}.$$

Així doncs,

$$I = \int_0^{\infty} dx \frac{x \sin ax}{(1 + x^2)^2} = \frac{\pi a e^{-a}}{4}$$

Examen G

PG.1 Trobeu *tots* els valors de

$$(a) \cosh(1 + i\pi) \qquad (b) i^i$$

PG.2 Considereu la funció definida per

$$F(z) = - \int_0^z \frac{\log(1-w)}{w} dw,$$

on $\log z$ és la branca principal de la funció logaritme que té el tall sobre l'eix real negatiu.

- (a) Determineu on és analítica la funció $F(z)$ i quins tipus de singularitats té.
- (b) Calculeu la seva sèrie de Taylor o Laurent en potències de z . Dibuixeu la regió on convergeix.

Nota: No proveu de fer la integral, ja que no es pot expressar en termes de funcions elementals. Useu els teoremes sobre integrals independents del camí.

PG.3 Sigui $f(z)$ una funció que no s'anul·la a cap punt del contorn C , definit per $|z| = 1$, ni al seu interior. Supposeu que a l'interior de C la funció $f(z)$ té dos pols simples i un pol d'ordre 3, i que és analítica a la resta de punts (inclosos els del contorn C). Calculeu el valor de

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz,$$

on C es recorre en sentit positiu (antihorari).

Ajut: Apliqueu el teorema dels residus a la funció $g(z) = f'(z)/f(z)$.

PG.4 Considereu la funció

$$f(z) = \frac{1}{z} + z^2.$$

Trobeu *tots* els desenvolupaments en sèrie de Laurent de $f(z)$ en potències (negatives i/o positives) de $z - 1$ i especifiqueu o dibuixeu les regions de convergència.

PG.5 Amb el teorema dels residus, calculeu la integral

$$I = \int_0^\infty \frac{x \sin x}{x^2 + b^2} dx,$$

on b és un nombre real, no nul.

SOLUCIONS

SG.1 (a) $\cosh z = (e^z + e^{-z})/2$. Per tant,

$$\cosh(1 + i\pi) = \frac{e^1 e^{i\pi} + e^{-1} e^{-i\pi}}{2} = \frac{-e^1 - e^{-1}}{2} = -\cosh 1.$$

$$\boxed{\cosh(1 + i\pi) = -\cosh 1}$$

(b) $z^w = \exp(w \log z)$. Per tant,

$$i^i = \exp(i \log i) = \exp \left[i \left(i \frac{\pi}{2} + 2\pi k i \right) \right] = e^{-\pi/2} e^{-2\pi k},$$

on k és un nombre enter qualsevol. Així doncs,

$$\boxed{i^i = e^{-\pi(2k + \frac{1}{2})}, \quad k \in \mathbb{Z}}$$

SG.2 (a) Apliquem el teorema 3.6 a la funció $f(z) = -z^{-1} \log(1 - z)$. Aquesta funció només és singular als punts z per als quals $1 - z \in (-\infty, 0]$ de l'eix real (tall de branca del logaritme), és a dir, $z \in [1, +\infty)$. Aparentment, sembla que també hi ha un pol simple a $z = 0$, però aquest punt és una singularitat evitable, ja que $-\log(1 - z) = z + z^2/2 + \dots$, la qual cosa implica que $f(z) = z^{-1}(z + z^2/2 + \dots) = 1 + z/2 + \dots$. Així doncs, $f(z)$ és analítica en el domini simplement connex constituït per tot el pla complex, llevat d'un tall de branca que va des del punt d'embranchament $z = 1$ fins a $+\infty$ de l'eix real (vegeu la figura G.1). El teorema 3.6 ens assegura que $F(z)$ és analítica a la mateixa regió, i és evident que té el mateix tipus de singularitats que $f(z)$.

$F(z)$ és analítica a tot el pla complex, llevat d'un tall de branca que va des de $z = 1$ (punt d'embranchament) fins a $+\infty$, sobre l'eix real.

(b) La funció $f(z)$ és desenvolupable en sèrie de potències al voltant de l'origen

$$f(z) = -\frac{1}{z} \log(1 - z) = \frac{1}{z} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^{k-1}}{k}.$$

Aquesta sèrie és de Taylor, ja que $z = 0$ no és una singularitat de f . El disc de convergència és $|z| < 1$, ja que la distància de $z = 0$ a la singularitat més propera $z = 1$ (punt d'embranchament) és 1. Si z és un punt d'aquest disc, podem integrar terme a terme la sèrie anterior per arribar a

$$F(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^z \frac{w^{k-1}}{k} dw = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k^2},$$

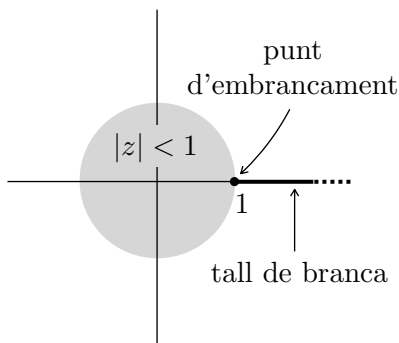


Figura G.1: Regions de convergència de la funció $f(z) = -(1/z) \log(1-z)$ del problema **PG.2**. També s'indiquen les seves singularitats.

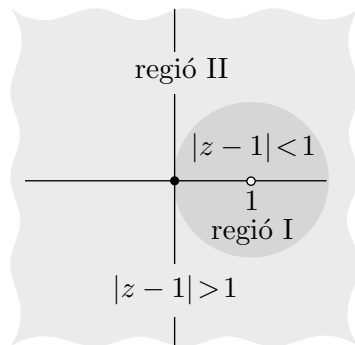


Figura G.2: Regions de convergència i pol de la funció $f(z)$ del problema **PG.4**.

que té el mateix disc de convergència. Així doncs,

$$F(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k^2}, \quad |z| < 1$$

SG.3 Sigui $g(z) = f'(z)/f(z)$. Com que el denominador, $f(z)$, mai s'anul·la a $|z| \leq 1$, les úniques singularitats de $g(z)$ són els pols de $f'(z)$ (que també són pols de $f(z)$, ja que allà on f és analítica, f' també ho és).

Si z_0 és un pol d'ordre m de $f(z)$, en un entorn d'aquest punt tenim

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{b_m}{(z - z_0)^m} + \frac{b_{-m+1}}{(z - z_0)^{m-1}} + \dots \\ &= \frac{b_m}{(z - z_0)^m} \left[1 + \frac{b_{-m+1}}{b_m}(z - z_0) + \dots \right], \end{aligned} \quad (\text{G.1})$$

on $b_m \neq 0$. Si derivem terme a terme tenim

$$\begin{aligned} f'(z) &= \frac{-mb_m}{(z - z_0)^{m+1}} + \frac{(-m+1)b_{-m+1}}{(z - z_0)^m} + \dots \\ &= \frac{-mb_m}{(z - z_0)^{m+1}} \left[1 + \frac{(-m+1)b_{-m+1}}{-mb_m}(z - z_0) + \dots \right]. \end{aligned} \quad (\text{G.2})$$

Veiem, doncs, que allà on f té un pol d'ordre m , f' hi té un pol d'ordre $m+1$. Dividint (G.2) per (G.1) tenim

$$g(z) = \frac{-m}{z - z_0} (1 + \dots),$$

on els punts suspensius $(\dots)$ indiquen potències positives de $z - z_0$. Aquesta igualtat ens diu que $g(z)$ té un pol *simple* allà on $f(z)$ hi té un pol d'ordre m i que el corresponent residu és

$$\operatorname{res}_{z=z_0} g(z) = -m,$$

és a dir, és l'ordre del pol de $f(z)$ amb signe canviat. Així doncs,

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C g(z) dz = -(2 \text{ pols}) \times (\text{ordre } 1) - (1 \text{ pol}) \times (\text{ordre } 3) = -5.$$

Per tant,

$$\boxed{\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = -5}$$

SG.4 La funció $f(z) = 1/z + z^2$ té un pol simple a $z = 0$. Així doncs, té dos desenvolupaments de Laurent en potències de $z - 1$, un vàlid a $|z - 1| < 1$ i l'altre vàlid a $|z - 1| > 1$ (regions I i II de la figura G.2).

Regió I:

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{1 - (1 - z)} = 1 + (1 - z) + (1 - z)^2 + \sum_{k=3}^{\infty} (1 - z)^k,$$

i, també,

$$z^2 = [1 - (1 - z)]^2 = 1 - 2(1 - z) + (1 - z)^2.$$

Sumem aquestes dues expressions i obtenim

$$\boxed{f(z) = 2 - (1 - z) + 2(1 - z)^2 + \sum_{k=3}^{\infty} (1 - z)^k}$$

Regió II:

$$\frac{1}{z} = -\frac{1}{1 - z} \frac{1}{1 - (1 - z)^{-1}} = -\frac{1}{1 - z} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(1 - z)^k} = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(1 - z)^k}$$

i, com abans,

$$z^2 = [1 - (1 - z)]^2 = 1 - 2(1 - z) + (1 - z)^2.$$

Sumem aquestes dues expressions i obtenim

$$\boxed{f(z) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(1 - z)^k} + 1 - 2(1 - z) + (1 - z)^2}$$

SG.5 En ser l'integrand una funció parella, tenim

$$I = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x}{x^2 + b^2} dx.$$

Aquesta integral és del segon tipus dels descrits a la secció 5.3 i, per tant,

$$I = \frac{1}{2} \operatorname{Im} \left[2\pi i \left(\begin{array}{c} \text{suma de tots els residus de} \\ \frac{ze^{iz}}{z^2 + b^2} \\ \text{en el semiplà } \operatorname{Im} z > 0 \end{array} \right) \right].$$

La funció només té un pol simple en el semiplà $\operatorname{Im} z > 0$, en el punt $z = i|b|$. El residu és

$$\operatorname{res} = \lim_{i|b|} \left[(z - i|b|) \frac{ze^{iz}}{z^2 + b^2} \right] = \lim_{z \rightarrow i|b|} \left[\frac{ze^{iz}}{z + i|b|} \right] = \frac{e^{-|b|}}{2}.$$

Així doncs,

$$I = \int_0^{\infty} \frac{x \sin x}{x^2 + b^2} dx = \frac{\pi}{2} e^{-|b|}$$

Bibliografia

Incloem aquí una llista no exhaustiva dels textos que hem utilitzat més en la preparació d'aquest llibre:

BRUNA, J.; CUFÍ, J. 2013. *Complex Analysis*. European Mathematical Society.

CHURCHILL, R. V.; BROWN, J. W. 2004. *Variable compleja y aplicaciones*. 7a ed. McGraw-Hill, Inc.

DERRICK, W. R. 1984. *Complex Analysis and Applications*. Belmont.

PEÑARROCHA, J.; SANTAMARIA, A.; VIDAL, J. 2006. *Mètodes matemàtics. Variable complexa*. Universitat de València.

RUDIN, W. 1976. *Principles of Mathematical Analysis*. McGraw-Hill, Inc.

SPIEGEL, M. R.; LIPSCHUTZ, S.; SCHILLER, J. J.; SPELLMAN, D. 2009. *Schaum's Outline of Complex Variables*. 2a ed. McGraw-Hill, Inc.

SPIVAK, M. 1975. *Calculus*. Reverté.

EMILI BAGAN és catedràtic de Física Teòrica a la UAB i investigador en els camps de la física d'altres energies i de la informació quàntica. Ha fet recerca al BNL (Nova York), al DAMTP (Cambridge), a l'ITP (Heidelberg), al CQT (Singapur), al Hunter College (Nova York) i al CSD de la University of Hong Kong. És professor de la UAB des de 1981, on ha impartit docència de càlcul en variable complexa, equacions diferencials, teoria de grups, mecànica, electrodinàmica, teoria quàntica de camps i informació quàntica.

ANTONI MÉNDEZ és catedràtic emèrit de Física Teòrica a la UAB i investigador en el camp de la física d'altres energies. Ha fet recerca a la Universitat d'Oxford, al CERN (Ginebra), al DESY (Hamburg) i a les universitats de Florida (Gainesville) i de Califòrnia (Berkeley). És professor de la UAB des de 1971, on ha impartit docència de càlcul en una i diverses variables, càlcul en variable complexa, espais de Hilbert, teoria de grups, física quàntica i física de partícules.

ORIOI PUJOLÀS és professor associat de recerca a l'Institut de Física d'Altes Energies (IFAE) i professor investigador vinculat a la UAB. Treballa en els camps de la gravitació i de la física de partícules i ha fet recerca al Yukawa Institute for Theoretical Physics (Kyoto), a la New York University i al CERN (Ginebra). És professor de la UAB des de 1997, on ha impartit docència de càlcul en variable complexa, mecànica quàntica, relativitat general i cosmologia.

El càlcul en variable complexa és una part de les matemàtiques fascinant, que combina conceptes analítics i geomètrics per arribar, de manera senzilla, a resultats molt importants. Les seves aplicacions s'estenen a moltes àrees de la física i de l'enginyeria. Aquest manual recull material didàctic, acumulat al llarg dels anys, sobre càlcul en variable complexa. Inclou apunts de teoria amb exemples, i nombrosos exercicis, problemes i exàmens resolts. Aquesta matèria és part del currículum del grau de Física de la UAB. Els autors han fet un esforç per adaptar el material al grau actual donant pes als aspectes formals, al rigor matemàtic i a les demostracions. El contingut també va dirigit a estudiants d'altres titulacions, com Matemàtiques i Enginyeria, interessats en una introducció assequible, però rigorosa, al càlcul en variable complexa.